

УДК 62–50

© 2003 г. Л. В. Камнева

## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛЬНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ В ТЕРМИНАХ СИНГУЛЯРНЫХ ТОЧЕК

Рассматриваются дифференциальные игры, в которых платой является время достижения заданного терминального множества (игры быстрого действия). В областях гладкости функция цены игры необходимо является классическим решением уравнения Беллмана–Айзекса. В сингулярных точках, где смыкаются гладкие ветви решения, должны быть выполнены более сложные условия в терминах производных по направлению. Найден класс игр и описаны два типа особенностей, таких, что упомянутые условия автоматически следуют из геометрических свойств особенностей. Это класс игр с автономной разделенной динамикой и множеством управления одного из игроков в виде линейного отрезка. Доказывается соответствующая теорема. Результат применяется для построения функции цены игры, имеющей три типа особых поверхностей – рассеивающую, эквивокальную и поверхность переключения.

Для дифференциальных игр быстрого действия известны [1, 2] достаточные условия на произвольную функцию, при выполнении которых она будет функцией цены рассматриваемой дифференциальной игры. Если функция цены игры является гладкой, то задача ее поиска сводится к решению задачи Коши для соответствующего уравнения в частных производных первого порядка (уравнения Беллмана–Айзекса) [3]. При некоторых дополнительных условиях для построения решения задачи Коши используется метод классических характеристик [4]. Однако функция цены является гладкой в исключительно редких случаях. Тем не менее, возможно применение метода характеристик при построении кусочно-гладкой функции цены. Метод построения, предложенный Айзексом [3], заключается в последовательном нахождении гладких ветвей решения методом классических характеристик.

Основная трудность применения метода Айзекса состоит в обнаружении поверхностей стыковки (сингулярных поверхностей) гладких ветвей решения. Были рассмотрены [3] различные типы сингулярных поверхностей и некоторые способы их построения, но в целом отсутствует строгое обоснование того факта, что полученная кусочно-гладкая функция будет функцией цены дифференциальной игры. С современной точки зрения, для этого на сингулярных поверхностях конструируемой функции следует проверить условия стабильности [2, 5].

Результатом данной работы является определение некоторых типов сингулярных точек и доказательство выполнения в них условий стабильности. В качестве примера применения этого результата строится функция цены в игровой задаче о брахистохроне.

**1. Игровая задача быстрого действия, функция цены, условия стабильности.** Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)), \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t) \in R^n$  – фазовое состояние системы в момент времени  $t$ ,  $u(t) \in P$  и  $v(t) \in Q$  – управления первого и второго игроков,  $P \subset R^m$  и  $Q \subset R^l$  – компактные множества.

Предположим, что функция  $f(x, u, v)$  непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x, u, v) - f(y, u, v)\| \leq L\|x - y\|, \quad x, y \in R^n, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

где  $L$  – постоянное число. Кроме того, пусть выполнено условие Айзекса (условие седловой точки в маленькой игре [1])

$$H(x, p) := \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle p, f(x, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle p, f(x, u, v) \rangle, \quad x, p \in R^n \quad (1.2)$$

Позиционными стратегиями [1] первого и второго игроков назовем произвольные функции  $U: R^n \rightarrow P$  и  $V: R^n \rightarrow Q$ . Стратегии  $U, V$  порождают пучки  $X_1(x_0, U), X_2(x_0, V)$  конструктивных [1, 6] движений, выходящих из позиции  $x_0$  при  $t = 0$ .

Конструктивным движением  $x(\cdot) \in X_1(x_0, U)$  называется функция  $x(t)$ , для которой на любом отрезке  $[0, \vartheta]$  найдется последовательность ломаных Эйлера  $x^{(k)}(t)$ , определяемых условиями

$$\dot{x}^{(k)}(t) = f(x^{(k)}(t), U(x^{(k)}(\tau_i^{(k)})), v^{(k)}(t))$$

$$t \in [\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)}), \quad x^{(k)}(0) = x_0, \quad \tau_0^{(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

равномерно сходящаяся к  $x(t)$  и такая, что  $\sup_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Здесь интервалы  $[\tau_i^{(k)}, \tau_{i+1}^{(k)})$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) разбивают полуось  $t \geq 0$ ,  $v_k(\cdot)$  – измеримая функция со значениями в множестве  $Q$ . Аналогично определяются элементы множества  $X_2(x_0, V)$ .

Цель первого игрока – быстрое сближение точки  $x(t)$  с заданным замкнутым терминальным множеством  $M \subset R^n$ . Второй игрок стремится либо исключить встречу с  $M$ , либо максимизировать время до встречи. Таким образом, оптимизируемый функционал для игровой задачи быстрого действия имеет вид

$$J(x(\cdot)) := \begin{cases} \infty, & \text{если } x(t) \notin M \text{ для любого } t \geq 0 \\ \min\{t \geq 0: x(t) \in M\} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Если в точке  $x_0 \in R^n$  выполнено равенство

$$\inf_U \sup_V J(X_1(x_0, U)) = \sup_V \inf_U J(X_2(x_0, V)) =: T^0(x_0) \quad (1.3)$$

то значение  $T^0(x_0) \in [0, \infty]$  называется *ценой игры* в точке  $x_0$ . При указанных условиях на функцию  $f(x, u, v)$  для любого  $x \in R^n$  существует [1, 5] цена игры. Функция  $T^0: R^n \rightarrow [0, \infty]$  называется функцией цены игры.

С функцией цены тесно связаны понятия  $u$ - и  $v$ -стабильных функций [1, 2]. Рассмотрим непрерывную функцию  $T: R^n \rightarrow R$ , такую, что  $M = \{x \in R^n : T(x) = 0\}$  и для любого  $x \in R^n$  существует предел

$$\partial_\eta T(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{T(x + \delta\eta) - T(x)}{\delta}$$

Функция  $T(x)$  называется  $u$ -стабильной ( $v$ -стабильной), если для любого  $x \in R^n \setminus M$  выполнено условие

$$\begin{aligned} \sup_{v \in Q} \inf \{ \partial_\eta T(x) : \eta \in \text{co}f(x, P, v) \} &\leq -1 \\ (\inf_{u \in P} \sup \{ \partial_\eta T(x) : \eta \in \text{co}f(x, u, Q) \}) &\geq -1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь

$$f(x, P, v) := \{f(x, u, v) : u \in P\}, \quad f(x, u, Q) := \{f(x, u, v) : v \in Q\}$$

со  $\{f\}$  – выпуклая оболочка векторов  $\{f\}$ .

Условия (1.4) представляют собой условия стабильности функции  $T(x)$  в точке  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . В области дифференцируемости функции  $T(x)$  неравенства (1.4) обращаются в уравнение Беллмана–Айзекса [3]

$$H(x, DT(x)) = -1 \quad (1.5)$$

Выполнение неравенств (1.4) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция  $T(x)$  была функцией цены дифференциальной игры быстрого действия [2].

Если отсутствует хорошее описание функции  $T(x)$ , то непосредственная проверка условий (1.4) затруднительна. Однако оказывается, что в ряде случаев выполнение условий стабильности в точке полностью зависит от структуры функции  $T(x)$  в окрестности этой точки. Определим некоторые типы таких точек и докажем выполнение в них условий стабильности.

**2. Простейшие сингулярные точки.** Пусть функция  $T(x)$  задана и непрерывна в области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Введем ряд определений, перенося на случай функции  $T(x)$  понятия, приведенные ранее [7] для функции цены игры.

*Определение 1.* Область  $G \subset \Omega$  называется *регулярной областью* функции  $T(x)$ , если

$$1) T \in C^2(G) \text{ и } H(x, DT(x)) = -1, x \in G;$$

$$2) H \in C^2(G \times Y), \text{ где } Y \text{ – некоторая окрестность множества } \{DT(x) : x \in G\}.$$

Если точка  $x^*$  принадлежит регулярной области, то в некоторой окрестности произвольно выбранного момента времени  $t^*$  существует и единственно решение  $(x(t), p(t))$  характеристической системы

$$\dot{x} = H_p(x, p), \quad \dot{p} = -H_x(x, p) \quad (2.1)$$

уравнения (1.5), удовлетворяющее условиям

$$x(t^*) = x^*, \quad p(t^*) = DT(x^*)$$

и такое, что  $p(t) = DT(x(t))$  [4]. Из последнего равенства следует, что через любую точку регулярной области проходит единственное решение  $x(t)$  дифференциального уравнения

$$\dot{x} = H_p(x, DT(x))$$

называемое характеристикой уравнения Беллмана–Айзекса (1.5). Таким образом, в любой регулярной области определено поле характеристик.

Условие Айзекса (1.2) обеспечивает существование функций  $U_T(x)$  и  $V_T(x)$  таких, что

$$H(x, DT(x)) = \langle DT(x), f(x, U_T(x), V_T(x)) \rangle$$

В регулярной области  $G$  имеем

$$H_p(x, DT(x)) = f(x, U_T(x), V_T(x))$$

и функция  $x \rightarrow H_p(x, DT(x))$  принадлежит классу  $C^1(G)$ . Следовательно, позиционные стратегии  $U_T(x)$ ,  $V_T(x)$ , определенные в области  $G$ , порождают движения, идущие вдоль характеристик. Функции  $U_T(x)$  и  $V_T(x)$  ограничены и, значит, имеют конечные частичные пределы для любого  $x \in \partial G$ .

**Определение 2.** Точка  $x \in \Omega$ , для которой существует регулярная область  $G \subset \Omega$ , содержащая  $x$ , называется *регулярной* точкой, иначе точка называется *сингулярной*.

Поверхности, состоящие из сингулярных точек, будем называть сингулярными поверхностями.

**Определение 3.** Сингулярную точку  $x^* \in \Omega$  назовем *простейшей*, если

1) существует окрестность  $G \subset \Omega$  точки  $x^*$ , такая, что  $G = G^+ \cup \Gamma \cup G^-$ , где  $\Gamma$  – гладкая гиперповерхность,  $G^\pm$  – регулярные области;

2) функция  $DT(x)$ ,  $x \in G^\pm$ , имеет непрерывное продолжение на гиперповерхность  $\Gamma$ .

Пусть  $\Sigma(T)$  – множество простейших сингулярных точек функции  $T(x)$ . Для точки  $x^* \in \Sigma(T)$  будем использовать следующие обозначения:  $G^\pm$  – регулярные области (из определения простейшей сингулярной точки), разделенные гиперповерхностью  $\Gamma$ ;  $T^\pm(x)$  – сужения функции  $T(x)$  на области  $G^\pm$ ;  $U_T^\pm(x)$ ,  $V_T^\pm(x)$  – позиционные стратегии игроков, порождающие движения вдоль характеристик в областях  $G^\pm$ . Кроме того, пусть

$$p^\pm := \lim DT^\pm(x), \quad u^\pm := \lim U_T^\pm(x), \quad v^\pm := \lim V_T^\pm(x)$$

при  $x \rightarrow x^*$ ,  $x \in G^\pm$  и

$$f^\pm := f(x^*, u^\pm, v^\pm)$$

Символы  $\lim U_T^\pm(x)$ ,  $\lim V_T^\pm(x)$  обозначают произвольные частичные пределы функций  $U_T^\pm(x)$ ,  $V_T^\pm(x)$  при  $x \rightarrow x^*$ ,  $x \in G^\pm$ .

В силу непрерывности функции  $H(x, p)$  имеем

$$\langle p^\pm, f^\pm \rangle = H(x^*, p^\pm) = -1$$

Отметим некоторые свойства простейших сингулярных точек.

Если  $p^+ = p^-$ , то функция  $T(x)$  дифференцируема в точке  $x^*$  (но не обязательно в окрестности этой точки), причем  $H(x^*, DT(x^*)) = -1$ .

В случае  $p^+ \neq p^-$  функции  $T^\pm(x)$ , определенные на  $G^\pm$ , непрерывно продолжимы [7] на всю область  $G$  так, что  $T^\pm \in C^1(G)$ . При этом гиперповерхность  $\Gamma$ , разделяющая области  $G^\pm$ , представима в виде

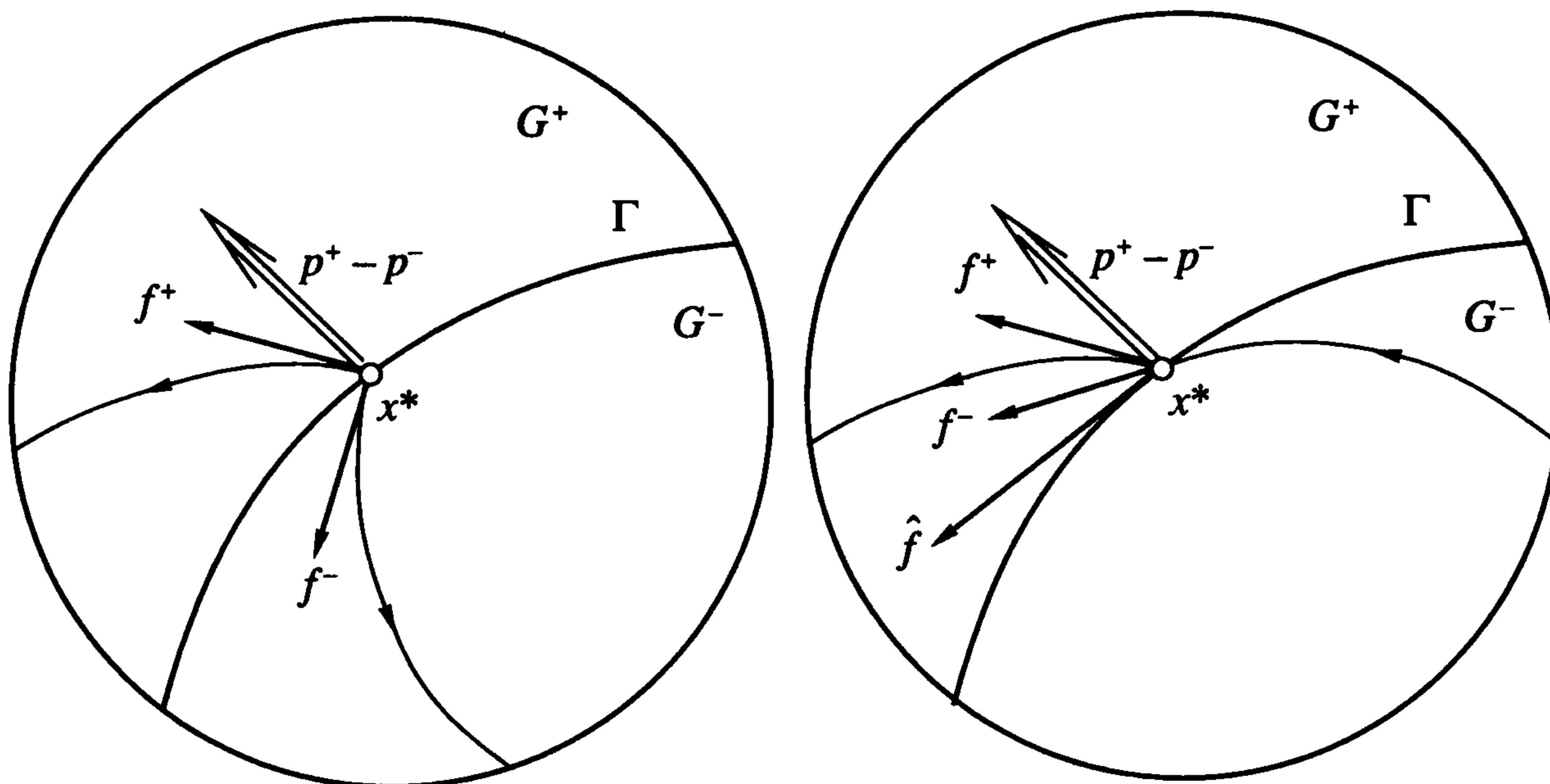
$$\Gamma = \{x \in G: T^+(x) = T^-(x)\}$$

Поскольку гиперповерхность  $\Gamma$  можно рассматривать как поверхность уровня функции  $T^+(x) - T^-(x)$ , то вектор  $p^+ - p^-$  ортогонален  $\Gamma$  в точке  $x^*$ . Кроме того, в области  $G$  верно представление

$$T(x) = \max\{T^+(x), T^-(x)\} \quad (\min\{T^+(x), T^-(x)\})$$

если вектор  $p^+ - p^-$  направлен из  $G^-$  в  $G^+$  (из  $G^+$  в  $G^-$ ). Следовательно, для любого вектора  $\eta \in R^n$  существует производная  $\partial_\eta T(x^*)$  по направлению  $\eta$ , причем  $\partial_\eta T(x^*) = \max\langle p^\pm, \eta \rangle \quad (\min\langle p^\pm, \eta \rangle)$ , если вектор  $p^+ - p^-$  направлен из  $G^-$  в  $G^+$  (из  $G^+$  в  $G^-$ ).

**3. Рассеивающие и эквивокальные сингулярные точки.** В теории дифференциальных игр для функции цены  $T^0(x)$  известны [3, 7] различные типы сингулярных поверхностей (СП), в точках которых оптимальные движения имеют те или иные особенности. Классификация основана на анализе поведения оптимальных траекторий в окрестности СП и учете возможности особых оптимальных движений, идущих вдоль самой СП.



Фиг. 1

Распространим понятия рассеивающей и экивокальной [3, 7] СП на случай функции  $T(x)$ . Для этого сначала определим соответствующие типы простейших сингулярных точек и поясним геометрический смысл данных определений.

**Определение 4.** Точка  $x^* \in \Sigma(T)$  называется *рассеивающей* (РТ), если

$$p^+ \neq p^-, \quad \langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle < 0$$

Простейшая сингулярная точка  $x^*$  будет РТ, если характеристики из смежных регулярных областей  $G^+$  и  $G^-$  покидают ее под ненулевым углом к разделяющей гиперповерхности  $\Gamma$  (фиг. 1, а).

**Определение 5.** Точка  $x^* \in \Sigma(T)$  называется *экивокальной* (ЭТ) (относительно второго игрока), если

$$p^+ \neq p^-, \quad \langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle \geq 0$$

и, кроме того, существует вектор управления  $\hat{u}(x^*) \in P$ , такой, что

$$\langle p^+, \hat{f} \rangle = \langle p^-, \hat{f} \rangle = -1$$

Здесь  $\hat{f} := f(x^*, \hat{u}(x^*), v^-)$  ( $f(x^*, \hat{u}(x^*), v^+)$ ), когда вектор  $p^+ - p^-$  направлен из  $G^-$  в  $G^+$  (из  $G^+$  в  $G^-$ ).

В ЭТ приходит характеристика из регулярной области  $G^-$ , и покидает (под ненулевым углом к  $\Gamma$ ) характеристика, определенная в регулярной области  $G^+$ ; кроме того, существует управление первого игрока, обеспечивающее равную  $-1$  скорость движения вдоль поверхности  $\Gamma$  в случае, когда второй игрок использует предельное управление, соответствующее области  $G^-$  (фиг. 1, б).

Назовем гладкую гиперповерхность *рассеивающей* или *экивокальной*, если она образована соответственно РТ и ЭТ.

**4. Достаточные условия стабильности.** Сформулируем основной результат работы.

**Теорема.** Пусть  $f(x, u, v) = \varphi(x, u) + \psi(x, v)$  и множество  $\psi(x, Q) := \{\psi(x, v) : v \in Q\}$  – линейный отрезок в  $R^n$ . Если точка  $x^* \in \Sigma(T)$  – РТ или ЭТ, причем  $\psi(x^*, v^+) \neq \psi(x^*, v^-)$ , то в ней выполнены условия стабильности (1.4).

**Доказательство.** Рассмотрим точку  $x^* \in \Sigma(T)$  и предположим, что вектор  $p^+ - p^-$  направлен из  $G^-$  в  $G^+$ .

Учитывая выражение для производной по направлению в простейшей сингулярной точке и разделенную динамику системы (1.1), перепишем условия стабильности (1.4) в точке  $x^*$  в следующем виде:

1) для любого вектора  $v \in Q$  существует вектор  $\varphi_v \in \text{соф}(x^*, P)$ , такой, что  $\langle p^\pm, \varphi_v + \psi(x^*, v) \rangle \leq -1$  ( $u$ -стабильность);

2) для любого вектора  $u \in P$  существует вектор  $\psi_u \in \psi(x^*, Q)$ , такой, что

$$\max\{\langle p^+, \varphi(x^*, u) + \psi_u \rangle, \langle p^-, \varphi(x^*, u) + \psi_u \rangle\} \geq -1$$

( $v$ -стабильность).

Пусть

$$Q(x, p) := \operatorname{argmax}_{v \in Q} \langle p, \psi(x, v) \rangle$$

Так как  $\psi(x, Q)$  – отрезок в  $R^n$ , то множество  $\psi(x, Q(x, p))$  либо одноэлементно и содержит один из концов отрезка  $\psi(x, Q)$ , либо совпадает со всем отрезком  $\psi(x, Q)$ . По определению имеем  $V_T^\pm(x) \in Q(x, DT(x))$ . Поскольку  $G^\pm$  – регулярные области, то  $\psi(x, V_T^\pm(x)) \in C^1(G^\pm)$ . Следовательно,  $\psi(x, V_T^\pm(x))$  – один из концов отрезка  $\psi(x, Q)$  для любого  $x \in G^\pm$ .

Введем обозначения

$$\varphi^\pm := \varphi(x^*, u^\pm), \quad \psi^\pm := \psi(x^*, v^\pm)$$

Из определения векторов  $v^\pm$  и условия  $\psi^+ \neq \psi^-$  получаем, что  $\psi^\pm$  – различные концы отрезка  $\psi(x^*, Q)$ . Таким образом, можно записать представление

$$\psi(x^*, Q) = \{\lambda\psi^+ + (1-\lambda)\psi^- : \lambda \in [0, 1]\}$$

Докажем выполнение условия 1 в точке  $x^*$ .

Для произвольного  $v \in Q$  найдем число  $\lambda_v \in [0, 1]$ , такое, что

$$\psi(x^*, v) = \lambda_v\psi^+ + (1-\lambda_v)\psi^-$$

Пусть  $x^*$  – РТ. Положим

$$\varphi_v := \lambda_v\varphi^+ + (1-\lambda_v)\varphi^-$$

Поскольку  $\varphi^\pm \in \text{соф}(x^*, P)$ , то  $\varphi_v \in \text{соф}(x^*, P)$ . Имеем

$$\langle p^\pm, \varphi_v + \psi(x^*, v) \rangle = \lambda_v \langle p^\pm, \varphi^+ + \psi^+ \rangle + (1-\lambda_v) \langle p^\pm, \varphi^- + \psi^- \rangle \quad (4.1)$$

По определению РТ

$$\langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle f^-, p^+ - p^- \rangle < 0$$

Следовательно,

$$\langle p^-, f^+ \rangle < \langle p^+, f^+ \rangle = -1, \quad \langle p^+, f^- \rangle < \langle p^-, f^- \rangle = -1 \quad (4.2)$$

Так как  $f^\pm = \varphi^\pm + \psi^\pm$ , то из (4.1) и (4.2) получаем

$$\langle p^\pm, \varphi_v + \psi(x^*, v) \rangle \leq -1 \quad (4.3)$$

Для РТ  $u$ -стабильность доказана.

Пусть  $x^*$  – ЭТ. Положим

$$\varphi_v := \lambda_v \varphi^+ + (1 - \lambda_v) \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} := \varphi(x^*, \hat{u}(x^*))$$

Здесь  $\hat{u}(x^*)$  – особое управление первого игрока из определения ЭТ. Так как  $\varphi^+$ ,  $\hat{\varphi} \in (x^*, P)$ , то  $\varphi_v \in \text{соф}(x^*, P)$ . Кроме того, верно равенство, аналогичное (4.1) при замене  $\varphi^-$  на  $\hat{\varphi}$ .

По определению ЭТ

$$\langle f^+, p^+ - p^- \rangle > 0, \quad \langle p^-, \hat{f} \rangle = \langle p^+, \hat{f} \rangle = -1$$

Имеем

$$\langle p^-, f^+ \rangle < \langle p^+, f^+ \rangle = -1, \quad f^+ = \varphi^+ + \psi^+, \quad \hat{f} = \hat{\varphi} + \psi^-$$

Следовательно, верно неравенство (4.3). Для ЭТ  $u$ -стабильность доказана. Выполнение условия 2 в точке  $x^*$  следует из неравенства

$$\langle p^\pm, \varphi(x^*, u) + \psi^\pm \rangle \geq \langle p^\pm, \varphi^\pm + \psi^\pm \rangle = -1$$

если положить

$$\psi_u := \psi^\pm$$

Заметим, что предположение о направлении вектора  $p^+ - p^-$  из  $G^-$  в  $G^+$  обеспечивает выполнение условия  $v$ -стабильности для РТ и ЭТ без тех ограничений на динамику системы (1.1), которые указаны в условии теоремы. Аналогично, если вектор  $p^+ - p^-$  направлен из  $G^+$  в  $G^-$ , то условия теоремы не используются при доказательстве  $u$ -стабильности в РТ и ЭТ.

Приведенная теорема позволяет в ряде случаев обоснованно применить методику Айзекса [3] для поиска функции цены игры с помощью полей характеристик и сконструированных сингулярных поверхностей.

**5. Игровая задача о брахистохроне.** В качестве примера применим теорему к игровой задаче о брахистохроне, в которой возникают сингулярные линии указанных типов.

Игровая задача о брахистохроне рассматривалась Айзексом [3], его решение было уточнено и дополнено [8]. Исследуемая в данной работе игровая задача отличается от задачи в постановке Айзекса видом терминального множества и вектограммой  $\psi(x, Q)$  второго игрока.

*Постановка задачи.* Рассмотрим дифференциальную игру быстрого действия

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{x_2} \cos u, & \dot{x}_2 &= \sqrt{x_2} \sin u + wv \\ u &\in P = [0, 2\pi], & v &\in Q = [-1, 1], & t &\geq 0, & x_0 &\in R_+^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

где  $R_+^2$  – верхняя полуплоскость.

Первый (второй) игрок минимизирует (максимизирует) время достижения терминального множества  $M = [-d, 0] \times [0, h]$ . Здесь  $d, h > 0$ . От величины  $w > 0$  зависят возможности второго игрока. Если  $w = 0$ , получаем динамику классической задачи о брахистохроне [9].

Сначала, используя методику Айзекса, определим функцию  $T: R_+^2 \rightarrow [0, \infty]$ . Затем, применяя теорему о достаточных условиях стабильности, покажем, что функция  $T(x)$  будет функцией цены в игровой задаче о брахистохроне.

Так как правая часть системы (5.1) не зависит от  $x_1$ , игра симметрична относительно вертикальной прямой  $x_1 = -d/2$ . Далее все построения будем проводить для полуплоскости  $x_1 \geq -d/2$ .

Результаты расчетов иллюстрируются для разных значений  $h$  при  $w = 2$ .

**Уравнение Беллмана–Айзекса.** Любая функция в регулярной области полностью определяется как решение некоторой краевой задачи для уравнения Беллмана–Айзекса (1.5). Это решение может быть найдено методом классических характеристик. Поэтому первым этапом конструирования функции  $T(x)$  будет интегрирование характеристической системы (2.1).

Выпишем уравнение (1.5) для рассматриваемой игровой задачи о брахистохроне. Имеем

$$H(x, p) = \min_{u \in [0, 2\pi]} \max_{v \in [-1, 1]} [p_1 \sqrt{x_2} \cos u + p_2 (\sqrt{x_2} \sin u + wv)] \quad (5.2)$$

Экстремальные управления  $u^0$  и  $v^0$ , доставляющие минимум и максимум в (5.2), определяются формулами

$$\cos u^0 = -p_1 / \|p\|, \quad \sin u^0 = -p_2 / \|p\|, \quad \|p\| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

$$v^0 \in Q(x, p) = \begin{cases} \text{sign } p_2, & \text{если } p_2 \neq 0 \\ [-1, 1], & \text{если } p_2 = 0 \end{cases}$$

Следовательно,  $H(x, p) = -\sqrt{x_2} \|p\| + w|p_2|$ , и уравнение (1.5) для функции  $T(x)$  принимает вид

$$-\sqrt{x_2} \|DT\| + w|\partial T / \partial x_2| = -1 \quad (5.3)$$

Здесь  $DT = (\partial T / \partial x_1, \partial T / \partial x_2)$  – вектор частных производных функции  $T(x)$ .

**Характеристическая система.** При условиях  $p_2 \neq 0, x_2 > 0$  запишем характеристическую систему для уравнения (5.3) в обратном времени

$$x_1' = \sqrt{x_2} \frac{p_1}{\|p\|}, \quad p_1' = 0, \quad x_2' = \sqrt{x_2} \frac{p_2}{\|p\|} - w\mu_2, \quad p_2' = -\frac{\|p\|}{2\sqrt{x_2}} \quad (5.4)$$

Здесь

$$z' = dz/d\tau, \quad \tau = \text{const} - t, \quad \mu_2 = \text{sign } p_2$$

Пусть начальные условия для характеристической системы даны в виде

$$x(0, s) = \xi(s), \quad p(0, s) = \zeta(s), \quad s \in S \quad (5.5)$$

где функция  $\xi(s)$  параметрически задает гладкую кривую

$$\Gamma = \{x = \xi(s) : s \in S\}$$

Фазовая кривая  $x(\tau, s)$  (при фиксированном значении  $s$ ) является характеристикой. При изменении параметра  $s$  получаем семейство характеристик, выходящих из точек кривой  $\Gamma$ .

Проинтегрируем систему (5.4). Так как  $p_1' = 0$ , то в дальнейшем символом  $p_1$  будем обозначать постоянную, определяемую из начальных условий системы (5.4).

Рассмотрим два случая. Пусть сначала  $p_1 = 0$ . Первое и третье уравнения системы (5.4) принимают вид

$$x_1' = 0, \quad x_2' = (\sqrt{x_2} - w)\mu_2.$$

Они дают первые интегралы

$$x_1 = C_1, \quad \mu_2 \tau - 2(\sqrt{x_2} + w \ln(\sqrt{x_2} - w)) = C_2 \quad (5.6)$$

Уравнение (5.3) представляет собой еще один первый интеграл

$$(w - \sqrt{x_2})\mu_2 p_2 = -1$$

В этом случае характеристики являются вертикальными прямыми. Учитывая начальные условия (5.5), уравнения (5.6) можно переписать в виде

$$x_1 = \xi_1(s), \quad \mu_2 \tau = 2(\sqrt{x_2} + w \ln(\sqrt{x_2} - w)) + C_2(s)$$

Функция  $C_2(s)$  определяется путем подстановки в левую часть второго из уравнений (5.6) начальных условий (5.5). Если функция  $\xi_1(s)$  обратима, то второе уравнение явно задает функцию  $\tau = T(x)$  в области, покрываемой вертикальными характеристиками.

Пусть теперь  $p_1 \neq 0$ . Уравнение (5.3) представляет собой первый интеграл

$$-\sqrt{x_2}\|p\| + w|p_2| + 1 = 0$$

характеристической системы и задает зависимость между значениями  $x_2$  и  $p_2$ . Используя эту зависимость, разбиваем уравнения (5.4) на систему

$$x_1' = \frac{x_2 p_1 (w^2 - x_2)}{-x_2 + \sigma w R(x_2, p_1)}, \quad x_2' = \frac{\mu_2 \sigma R(x_2, p_1) (x_2 - w^2)}{-x_2 + \sigma w R(x_2, p_1)} \quad (5.7)$$

где

$$\sigma := \text{sign}(w p_1^2 - |p_2|), \quad R(x_2, p_1) := \sqrt{x_2(1 + p_1^2(w^2 - x_2))}$$

и уравнение

$$p_2' = -\|p\|^2 / (2w|p_2| + 2) \quad (5.8)$$

В областях постоянства значения  $\sigma$  находим первый интеграл системы (5.7)

$$x_1 + \mu_1 \mu_2 \sigma [\lambda(p_1) \arcsin \sqrt{x_2/\lambda(p_1)} - \sqrt{x_2(\lambda(p_1) - x_2)}] = D_1$$

а значит, и системы (5.4). Здесь

$$\mu_i := \text{sign } p_i, \quad i = 1, 2, \quad \lambda(p_1) := w^2 + 1/p_1^2$$

$D_1$  – постоянная.

Интегрирование уравнения (5.8) определяет еще один первый интеграл системы (5.4)

$$\tau + w \mu_2 \ln \|p\|^2 + p_1^{-1} \text{arctg}(p_2/p_1) = D_2$$

где  $D_2$  – постоянная.

Начальные условия (5.5) задают значения постоянных  $D_1$  и  $D_2$  в зависимости от значения  $s \in S$ , что позволяет записать систему уравнений

$$\begin{aligned} -\sqrt{x_2}\|p\| + w \mu_2 p_2 + 1 &= 0 \\ x_1 + \mu_1 \mu_2 \sigma [\lambda(p_1) \arcsin \sqrt{x_2/\lambda(p_1)} - \sqrt{x_2(\lambda(p_1) - x_2)}] &= D_1(s) \\ \tau + w \mu_2 \ln \|p\|^2 + p_1^{-1} \text{arctg}(p_2/p_1) &= D_2(s) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$p_1 = \zeta_1(s)$$

которая представляет собой алгебраическую систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $p_1, p_2, s$  и  $\tau$ . Она неявно определяет функцию  $\tau = T(x)$  в области, покрываемой характеристиками.

Характеристическая система (5.4) полностью проинтегрирована.

Сложности в дальнейшем аналитическом исследовании задачи возникают из-за невозможности явного задания функции  $T(x)$ .

*Построение первичных семейств характеристик при  $h > w^2$ .* Рассмотрим случай  $h > w^2$ . Найдем допустимую зону  $\Gamma_0 \subset \partial M$  [3] (с учетом отмеченной ранее симметрии задачи). Имеем

$$\Gamma_0 = \{x_1 = 0, 0 < x_2 \leq h\} \cup \{-d/2 \leq x_1 \leq 0, x_2 = h\}$$

Положим  $T(x) = 0$  на  $\Gamma_0$ . Будем строить первичные семейства характеристик, выходящие из горизонтального и вертикального участков множества  $\Gamma_0$ , а также из точки  $(0, h)$ .

Характеристики, выпущенные с горизонтального участка множества  $\Gamma_0$  при  $\mu_2 = +1$ , являются вертикальными прямыми и определяют функцию

$$T(x) := 2\sqrt{x_2} - \sqrt{h} + w \ln((\sqrt{x_2} - w)/(\sqrt{h} - w)) \quad (5.10)$$

в точках вертикальной полосы  $\{(x_1, x_2): -d/2 \leq x_1 \leq 0, x_2 \geq h\}$ .

Далее строим два гладких семейства характеристик: первое – из правого вертикального участка множества  $\Gamma_0$  при  $\mu_2 = -1$  и второе – из точки  $(0, h)$  при  $\mu_2 = +1$ . Указанные значения  $\mu_2$  выбраны из эвристических соображений.

Полученные семейства частично накладываются друг на друга и определяют функции  $T_1(x)$  и  $T_2(x)$  в некоторых областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно.

Первое семейство характеристик ограничено снизу гладкой линией  $\mathfrak{B}$ , состоящей из полупроницаемой кривой [3], задаваемой уравнением

$$x_1 = B_*(x_2) := w^2 \arcsin \frac{\sqrt{x_2}}{w} - \sqrt{x_2(w^2 - x_2)}, \quad x_2 \in [0, w^2]$$

и луча  $\{(x_1, x_2): x_1 \geq \pi w^2/2, x_2 = w^2\}$ . Линия  $\mathfrak{B}$  будет барьером [3].

Второе семейство ограничено снизу линией  $\tilde{\mathcal{F}}$ , определяемой условием  $p_2 = +0$  при движении вдоль характеристик.

На фиг. 2 приведены численные построения первичных семейств характеристик, выходящих в обратном времени из допустимой зоны  $\Gamma_0$ , для значений параметров  $h = 9$ ,  $w = 2$ . Цифрами 1 и 2 обозначены первое и второе семейства характеристик.

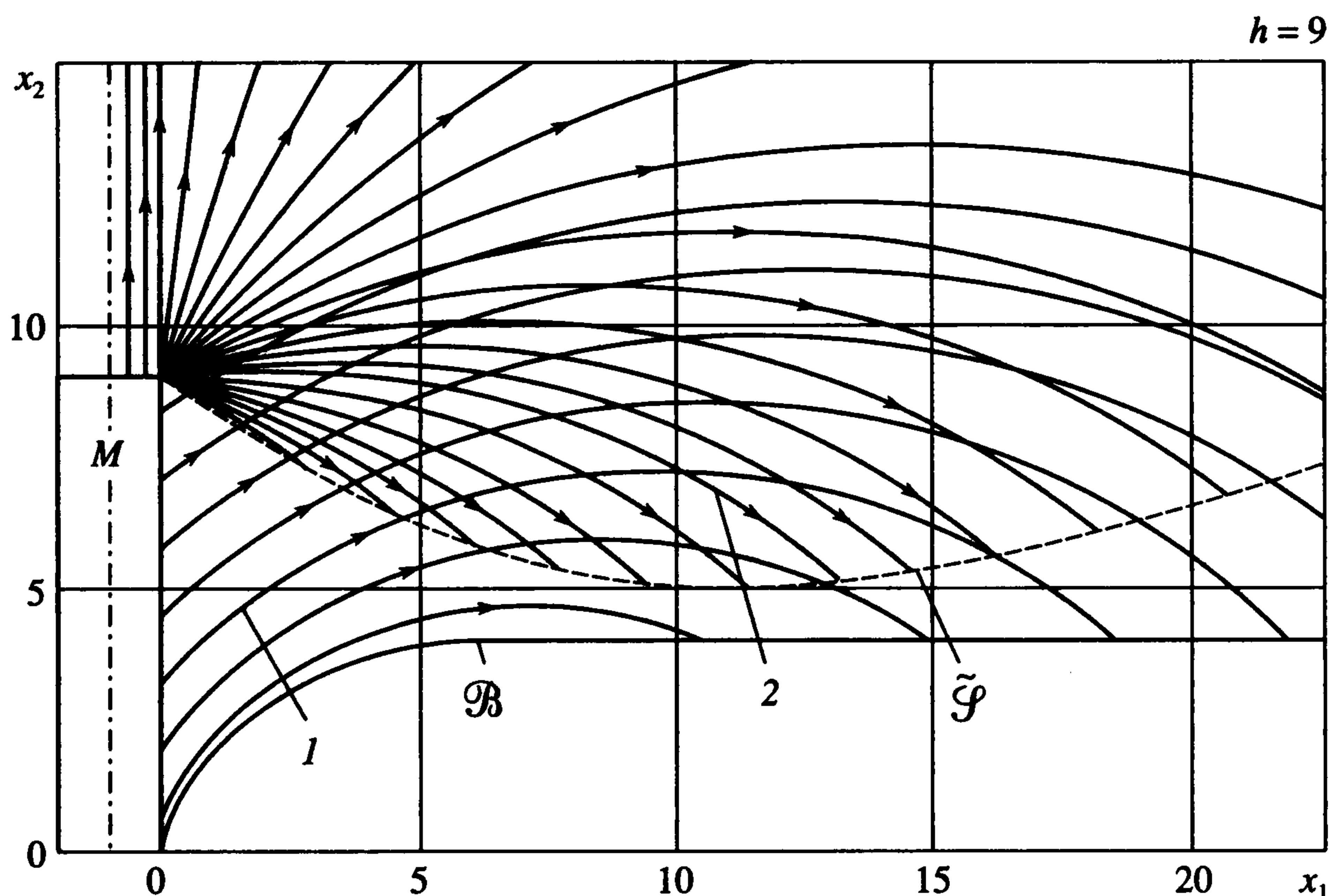
*Построение сингулярной линии при  $h > w^2$ .* На основе первичных семейств характеристик построим сингулярную линию, разделяющую область выше барьера  $\mathfrak{B}$  на два множества. Выше сингулярной линии конструируемая функция  $T(x)$  будет совпадать с функцией  $T_2(x)$ , ниже – частично с функцией  $T_1(x)$ , частично будет определяться вторичным семейством характеристик, выходящим из точек сингулярной линии.

Пусть

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{x \in \Omega_1 \cap \Omega_2: T_1(x) = T_2(x)\}$$

При  $h > w^2 + \Delta_w$ , где  $\Delta_w$  – некоторое положительное число, линия  $\tilde{\mathcal{D}}$  касается одной из характеристик (критической) первого семейства. При значениях  $h$ , близких к  $w^2$ , происходит касание линии  $\tilde{\mathcal{D}}$  и барьера  $\mathfrak{B}$ . В обоих случаях обозначим точку касания через  $a = (a_1, a_2)$ . Положим

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{D}}: x_1 \leq a_1\}$$



Фиг. 2

Части характеристик обоих семейств после пересечения с линией  $\mathcal{D}$  отбросим.

Если  $a \notin \mathcal{B}$ , то линию  $\mathcal{D}$  продолжим линией  $\mathcal{E}$ , движение по которой (в обратном времени) задано уравнениями

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{x_2} \cos \hat{u}(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = -\sqrt{x_2} \sin \hat{u}(x_1, x_2) + w$$

$$\hat{u}(x_1, x_2) = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + \arccos \frac{wp_2 - 1}{\sqrt{x_2} \|p\|}, \quad p_i(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, 2$$

Управление  $\hat{u}(x)$  находим из равенства

$$p_1(x) \sqrt{x_2} \cos \hat{u}(x) + p_2(x) (\sqrt{x_2} \sin \hat{u}(x) - w) = -1$$

Если  $a \in \mathcal{B}$ , то линию  $\mathcal{E}$  выпустим из некоторой точки  $a^* = (a_1^*, a_2^*)$ , определяемой условием касания вектора

$$(\sqrt{a_1^*} \cos \hat{u}(a^*), \sqrt{a_2^*} \sin \hat{u}(a^*) - w)$$

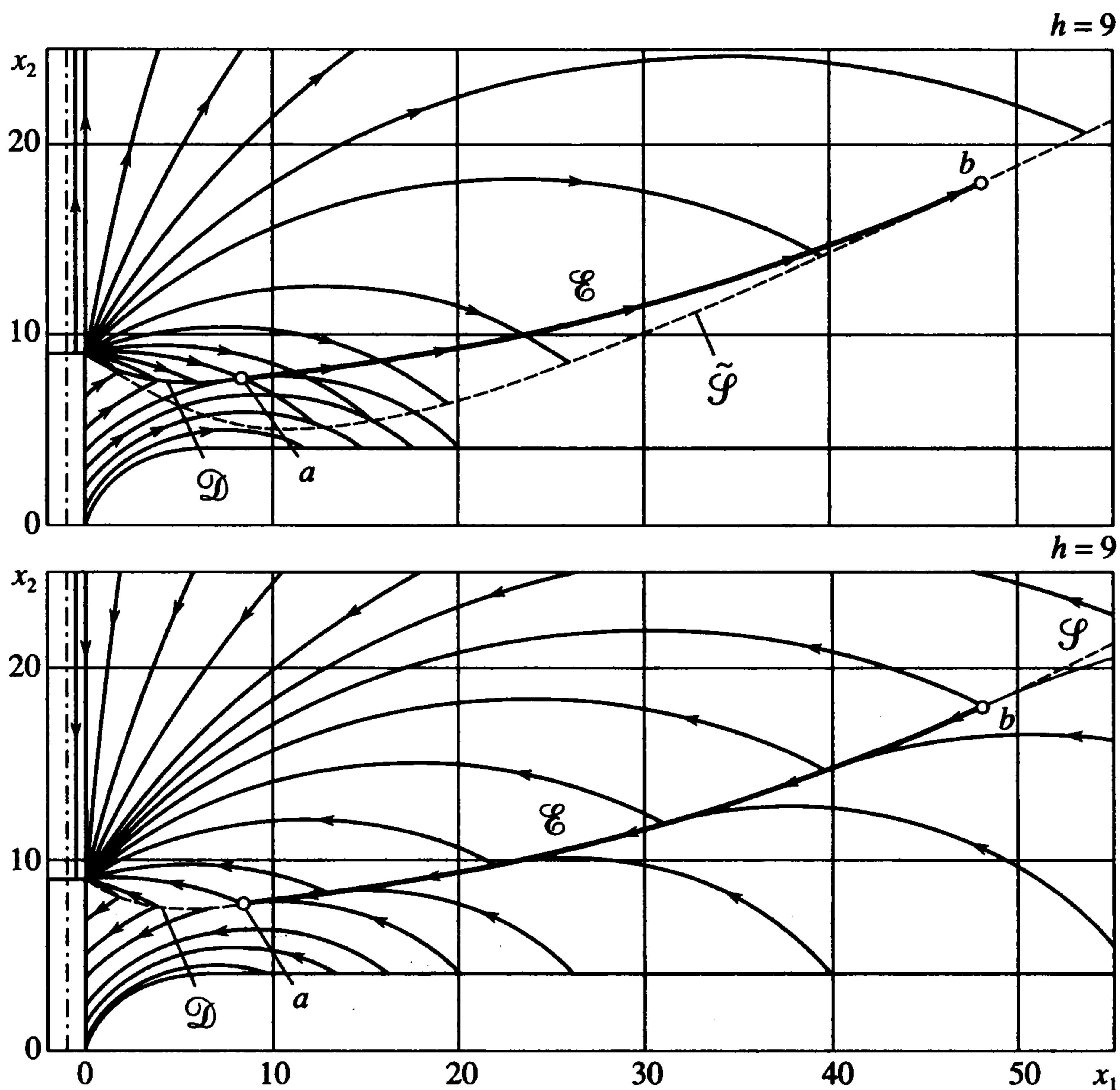
и кривой  $\mathcal{B}$  в точке  $a^*$ .

Линия  $\mathcal{E}$  продолжима до точки  $b = (b_1, b_2)$ , в которой происходит касание с линией  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Пусть

$$\mathcal{F} = \{(x_1, x_2) \in \tilde{\mathcal{F}}: x_1 \geq b_1\}$$

Части характеристик второго семейства после пересечения с линией  $\mathcal{E}$  отбрасываем.

В верхней части фиг. 3 даны результаты численных построений (в обратном времени) линий  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{E}$  для значений параметров  $h = 9$ ,  $w = 2$ . Части характеристик после пересечения с  $\mathcal{D}$  не изображены.



Фиг. 3

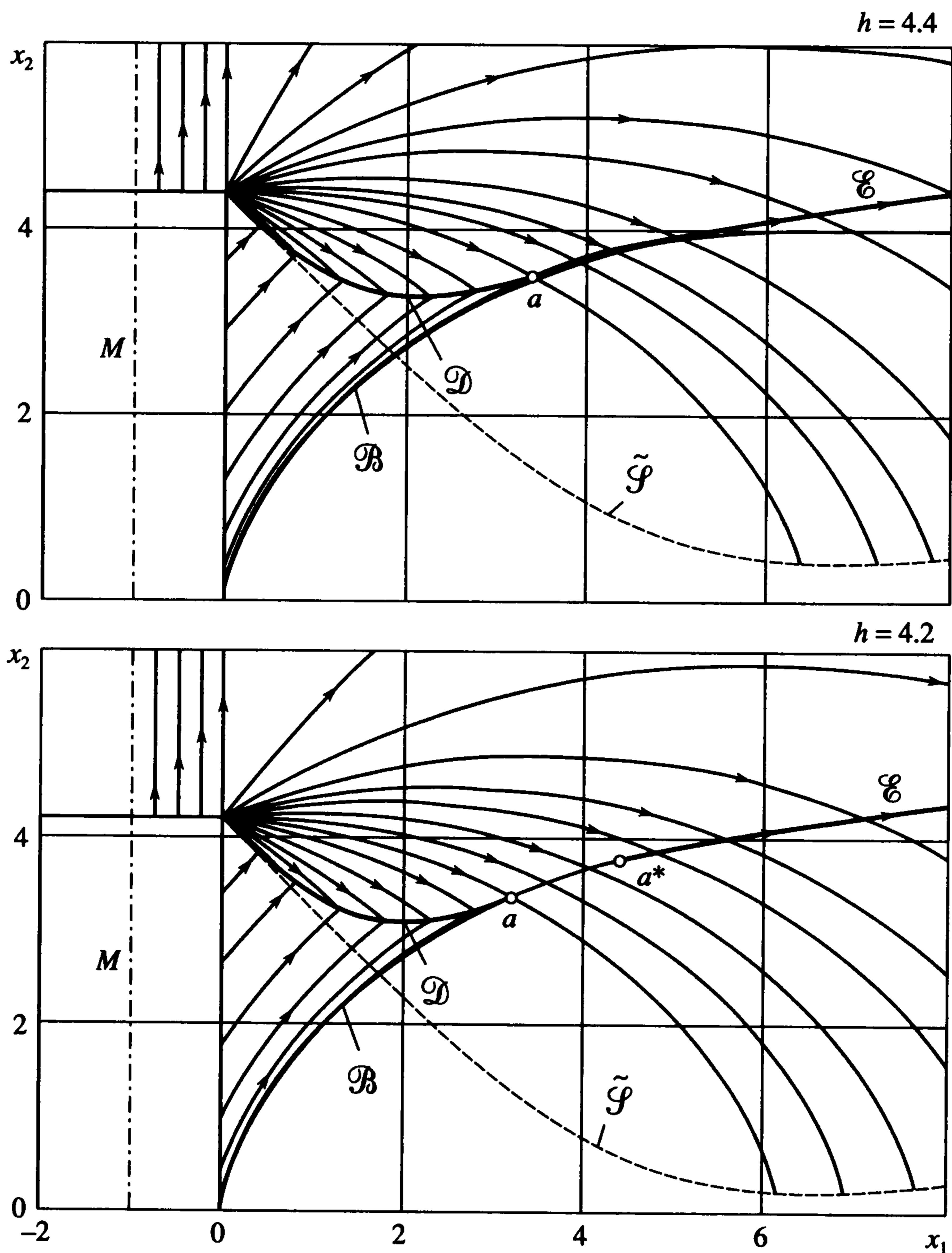
На линиях  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{S}$  задаем начальные условия для системы характеристик (5.4) при  $\mu_2 = -1$ , исходя из условий непрерывности, свойств экивокальности на  $\mathcal{E}$  и дифференцируемости на  $\mathcal{S}$ . Выпускаем вторичное семейство характеристик, которое не продолжимо ниже прямой  $x_2 = w^2$  и полностью покрывает область между барьером  $\mathcal{B}$  и линией  $\mathcal{E}\mathcal{S}$ .

В нижней части фиг. 3 показаны численные построения всех семейств характеристик в прямом времени при  $h = 9$ ,  $w = 2$  и линия  $\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{S}$  (случай  $h > w^2 + \Delta_w$ ). Участки  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{S}$  изображены штриховой линией.

На фиг. 4 более детально показан случай близкого расположения линий  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$  и линии  $\mathcal{B}$  для значений параметров  $h = 4.4$ ,  $w = 2$  (верхняя часть фиг. 4), а также случай пересечения (по касательной) линии  $\mathcal{D}$  с барьером  $\mathcal{B}$  и построения линии  $\mathcal{E}$  из точки  $a^* \in \mathcal{B}$  для  $h = 4.2$ ,  $w = 2$  (нижняя часть фиг. 4).

Функция цены игры при  $h > w^2$ . Правая часть системы (5.1) не удовлетворяет условию Липшица по переменной  $x$ . Однако в рамках рассматриваемой задачи определение функции цены с помощью пучков конструктивных движений и соотношения (1.3) остается прежним.

Определим функцию  $T(x)$  следующим образом: в точках вертикальной полосы  $\{(x_1, x_2): -d/2 \leq x_1 \leq 0, x_2 \geq h\}$  функция  $T(x)$  задана формулой (5.10);  $T(x) = T_2(x)$  выше линий  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{S}$ ; ниже линии  $\mathcal{D}$  и ниже критической характеристики (если она есть) положим  $T(x) = T_1(x)$ ; в оставшейся области функция  $T(x)$  определена вторичным се-



Фиг. 4

мейством характеристик. На барьере  $\mathcal{B}$  определим функцию  $T(x)$  по непрерывности. В области ниже барьерной линии положим  $T(x) = \infty$ .

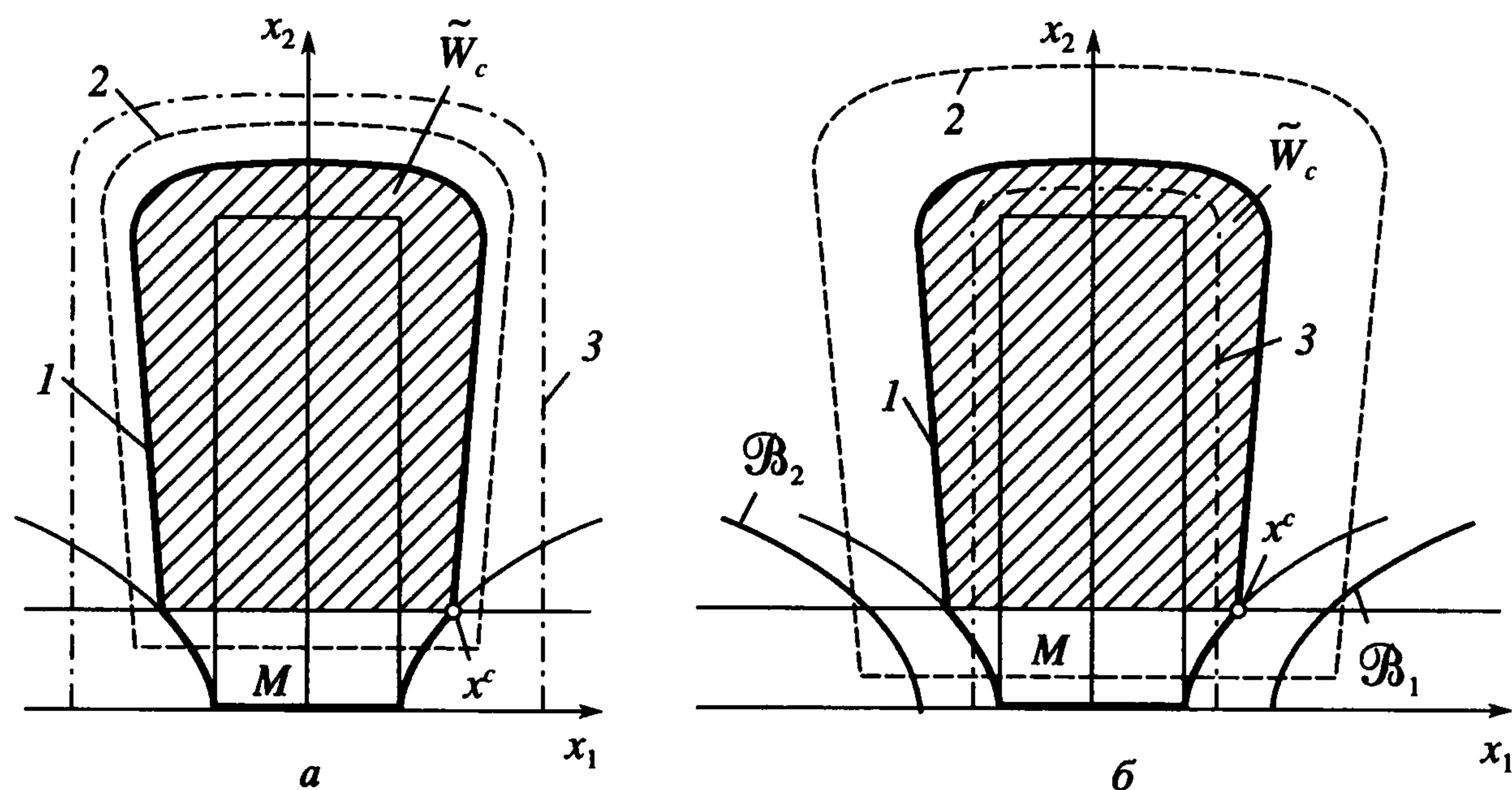
По построению линия  $\mathcal{D}$  является рассеивающей линией для функции  $T(x)$ , линия  $\mathcal{E}$  – экивокальной линией. Линия  $\mathcal{S}$  называется линией переключения. Она состоит из простейших сингулярных точек, для которых выполнено равенство  $p^+(x) = p^-(x)$ .

На множестве  $x_1 < -d/2$ ,  $x_2 \geq 0$  функция  $T(x)$  задается симметрично относительно прямой  $x_1 = -d/2$ .

Гладкие ветви функции  $T(x)$  являются решениями уравнения (5.3), а рассеивающий и экивокальный характер склейки обеспечивает, согласно доказанной теореме, выполнение условий стабильности (1.4) в точках негладкости.

Введем обозначение

$$\Omega := \{x \in R_+^2: T(x) < \infty\}$$



Фиг. 5

Используя свойства стабильности функции  $T(x)$  во внутренних точках множества  $\Omega$ , покажем, что при  $h > w^2$  построенная функция  $T(x)$  будет функцией цены в игровой задаче о брахистохроне.

В классе позиционных стратегий всегда выполнено [1] неравенство

$$\infsup_U J(X_1(x, U)) \geq \supinf_V J(X_2(x, V)), \quad x \in R_+^2$$

На множестве  $R_+^2 \setminus \Omega$  второй игрок имеет уклоняющую стратегию  $V(x) = -1$ . Стало быть,

$$\supinf_V J(X_2(x, V)) = \infty$$

и поэтому равенство (1.3) выполнено для точек  $x \in R_+^2 \setminus \Omega$ .

На множестве  $\Omega \setminus M$  достаточно доказать, что

$$\infsup_U J(X_1(x, U)) \leq T(x) \leq \supinf_V J(X_2(x, V)) \tag{5.11}$$

1°. Для произвольного  $c > 0$  найдем точку  $x^c = (x_1^c, x_2^c) \in \mathcal{B}$ , задаваемую условием  $T(x^c) = c$ . Пусть

$$W_c := \{x \in R_+^2: T(x) \leq c\}, \quad \tilde{W}_c := \{x \in W_c: x_2 \geq x_2^c\}$$

На множестве  $R_+^2$  определим функцию

$$T_c(x) = \begin{cases} T(x) - c, & \text{если } x \in \Omega \setminus W_c \\ 0, & \text{если } x \in \tilde{W}_c \\ \infty, & \text{если } x \in (R_+^2 \setminus \Omega) \cup (W_c \setminus \tilde{W}_c) \end{cases}$$

На фиг. 5 цифрой 1 обозначена граница множества  $W_c$ , множество  $\tilde{W}_c$  заштриховано.

Пусть

$$\tilde{\Omega} := \{x \in R_+^2: T_c(x) < \infty\}$$

Из любой точки множества  $\tilde{\Omega}$  первый игрок гарантирует попадание на множество  $\tilde{W}_c$  за конечное время. Функция  $T_c(x)$  является  $u$ - и  $v$ -стабильной в любой внутренней точке множества  $\tilde{\Omega} \setminus \tilde{W}_c$ , поскольку такой является функция  $T(x)$ . Кроме того, правая часть системы (5.1) удовлетворяет условию Липшица по  $x$  выше прямой  $x_2 = x_2^c/2$ . Используя перечисленные факты, устанавливаем, что  $T_c(x)$  – функция цены в игровой задаче быстрогодействия с целевым множеством  $\tilde{W}_c$  и пространством игры, расположенным выше прямой  $x_2 = x_2^c/2$ .

2°. Рассмотрим задачу сближения с множеством  $M$  из точки  $x_* \in \Omega \setminus M$ .

Для произвольных  $\varepsilon > 0$  и  $\delta_1 > 0$  положим  $\delta = \delta_1/2$  и найдем число  $c > 0$ , такое, что открытая  $\delta$ -окрестность  $\tilde{W}_c^\delta$  множества  $\tilde{W}_c$  содержится в открытой  $\delta_1$ -окрестности  $M_{\delta_1}$  множества  $M$ . На фиг. 5, а цифрой 2 обозначена граница множества  $\tilde{W}_c^\delta$ , цифрой 3 – граница множества  $M_{\delta_1}$ .

Поскольку  $T_c(x)$  – функция цены для задачи быстрогодействия с целевым множеством  $\tilde{W}_c$ , то существует [6] стратегия  $\tilde{U}_\varepsilon$  первого игрока, которая гарантирует сближение с множеством  $\tilde{W}_c^\delta$  за время  $T_c(x_*) + \varepsilon$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta \leq \tilde{\Delta}(\delta)$ . Здесь  $\tilde{\Delta}(\delta)$  – положительное число, такое, что  $\tilde{\Delta}(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Так как  $\tilde{W}_c^\delta \subset M_{\delta_1}$  и  $T_c(x_*) < T(x_*)$ , то стратегия  $\tilde{U}_\varepsilon$  гарантирует также сближение с множеством  $M_{\delta_1}$  за время  $T(x_*) + \varepsilon$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta \leq \tilde{\Delta}(\delta)$ .

Пусть  $\delta_1 \rightarrow 0$ . Используя компактность пучка  $X_1(x_*, \tilde{U}_\varepsilon)$  конструктивных движений [1], получаем

$$\sup J(X_1(x_*, \tilde{U}_\varepsilon)) \leq T(x_*) + \varepsilon$$

Отсюда следует левое неравенство в (5.11).

3°. Рассмотрим задачу уклонения от множества  $M$  из точки  $x_* \in \Omega \setminus M$ .

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  положим  $c = \varepsilon/2$ . Введем обозначение

$$t_* := T_c(x_*) - \varepsilon/2$$

Поскольку  $T_c(x)$  – функция цены для задачи быстрогодействия с целевым множеством  $\tilde{W}_c$ , то существуют [6] стратегия  $\tilde{V}_\varepsilon$  и числа  $\delta > 0$ ,  $\tilde{\Delta} > 0$ , такие, что стратегия  $\tilde{V}_\varepsilon$  гарантирует уклонение от замкнутой  $\delta$ -окрестности  $\tilde{W}_c^\delta$  множества  $\tilde{W}_c$  до момента  $t_*$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta \leq \tilde{\Delta}$ . На фиг. 5, б цифрой 2 обозначена граница множества  $\tilde{W}_c^\delta$ .

Заметим, что при формировании экстремальных управлений [6] второго игрока, определяющего стратегию  $\tilde{V}_\varepsilon$ , можно ограничиться значениями  $\pm 1$ .

Пусть  $\mathfrak{B}_1$  – линия, полученная сдвигом барьера  $\mathfrak{B}$  вправо параллельно горизонтальной оси так, что точка пересечения прямой  $x_2 = x_2^c$  и линии  $\mathfrak{B}_1$  принадлежит

множеству  $\tilde{W}_c^\delta$ . Символом  $\mathfrak{B}_2$  обозначим линию, симметричную линии  $\mathfrak{B}_1$  относительно вертикальной прямой  $x_1 = -d/2$ . Линии  $\mathfrak{B}_1$  и  $\mathfrak{B}_2$  показаны на фиг. 5, б. При помощи управления  $v = -1$  второй игрок оставляет движение в области ниже линии  $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_2)$ .

На основе стратегии  $\tilde{V}_\varepsilon$  определим стратегию  $V_\varepsilon$  следующим образом. Положим  $V_\varepsilon(x) = -1$  в точках строго ниже линии  $\mathfrak{B}_1$  и  $V_\varepsilon(x) = \tilde{V}_\varepsilon(x)$  в остальных точках полуплоскости  $x_1 \geq -d/2$ . Симметрично зададим стратегию  $V_\varepsilon$  на полуплоскости  $x_1 \leq -d/2$ .

Выберем число  $\delta_1 > 0$  так, чтобы  $\delta_1$ -окрестность  $M_{\delta_1}$  множества  $M$  не пересекалась с линией  $\mathfrak{B}_1$ . Граница множества  $M_{\delta_1}$  обозначена цифрой 3 на фиг. 5, б. Покажем, что стратегия  $V_\varepsilon$  обеспечивает уклонение от множества  $M_{\delta_1}$  до момента  $t_*$  в дискретной схеме управления с шагом  $\Delta \leq \tilde{\Delta}$ .

Зададим разбиение полуоси  $t \geq 0$  интервалами  $[t_i, t_{i+1})$  и найдем число  $N$  такое, что  $t_* \in [t_N, t_{N+1})$ . Рассмотрим произвольное движение  $x(t)$ , порождаемое стратегией  $V_\varepsilon$  в дискретной схеме управления.

Пусть существует момент времени  $t_j$ ,  $0 \leq j \leq N$ , для которого точка  $x(t_j)$  лежит строго ниже линии  $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_2)$  и  $x(t) \notin M_{\delta_1}$  при  $t \leq t_j$ . Тогда в силу определения стратегии  $V_\varepsilon$  точка  $x(t)$  останется ниже линии  $\mathfrak{B}_1(\mathfrak{B}_2)$  для любого  $t > t_j$  и не попадет на  $M_{\delta_1}$  в течение бесконечного промежутка времени.

Пусть теперь для всех моментов  $t_i$ ,  $0 \leq i \leq N$ , точка  $x(t_i)$  находится не ниже линий  $\mathfrak{B}_1$  и  $\mathfrak{B}_2$ . Следовательно, в каждый момент  $t_i$  управление второго игрока выбирается согласно стратегии  $\tilde{V}_\varepsilon$ . В этом случае траектория  $x(t)$  не может пересекать прямую  $x_2 = x_2^c$  до момента  $t_*$ .

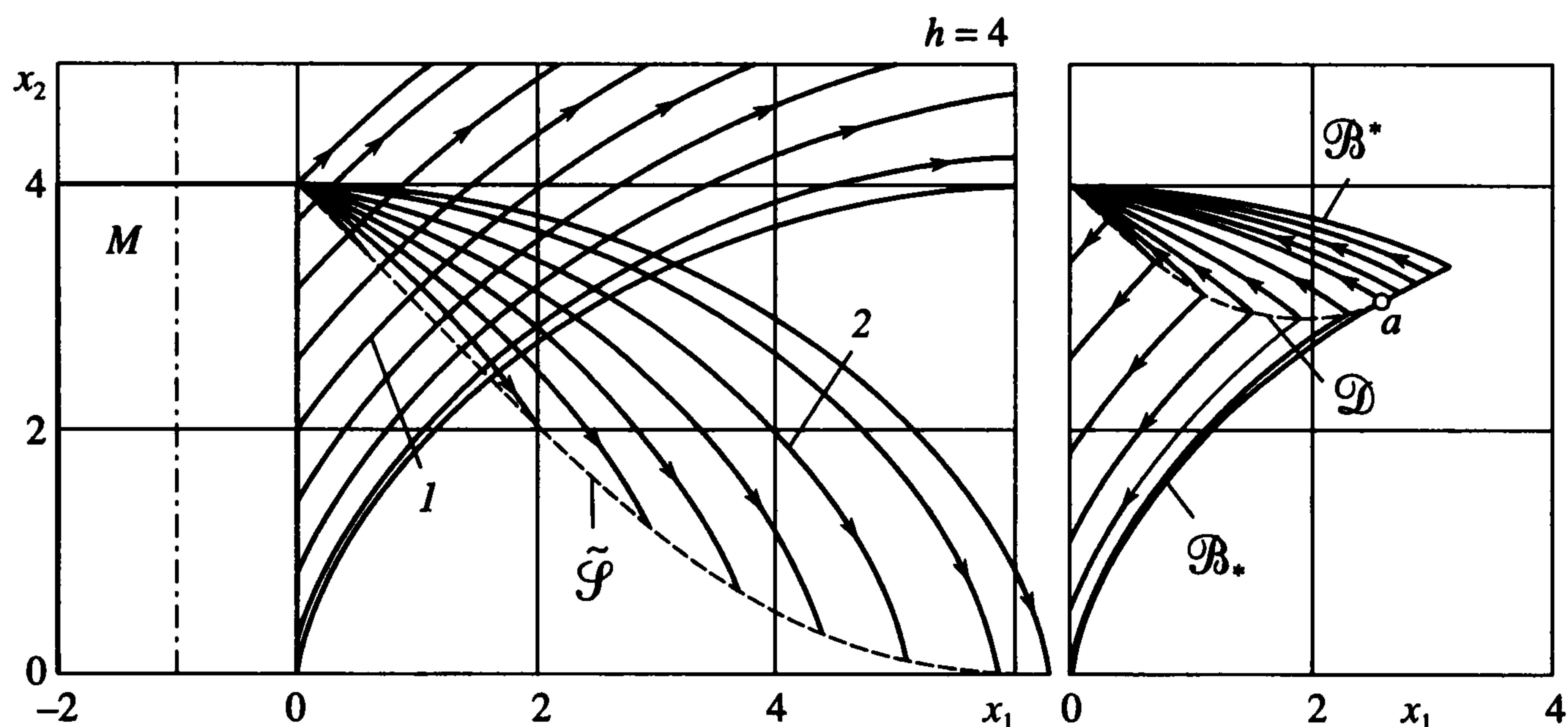
Предположим противное. Выберем первый момент  $\bar{t} \leq t_*$ , для которого точка  $x(\bar{t})$  принадлежит прямой  $x_2 = x_2^c$ . Пусть число  $j$  таково, что  $\bar{t} \in (t_j, t_{j+1})$ ,  $0 \leq j \leq N$ . Поскольку стратегия  $\tilde{V}_\varepsilon$  уклоняет от замкнутого множества  $\tilde{W}_c^\delta$  до момента  $t_*$ , то точка  $x(\bar{t})$  лежит либо строго ниже линии  $\mathfrak{B}_1$ , либо строго ниже линии  $\mathfrak{B}_2$ . На интервале  $[t_j, t_{j+1})$  имеем  $V_\varepsilon(x(t)) = 1$ , ибо в противном случае, т.е. при  $V_\varepsilon(x(t)) = -1$ , точка  $x(t_{j+1})$  лежала бы ниже линии  $\mathfrak{B}_1$  или ниже линии  $\mathfrak{B}_2$ .

Так как  $\sqrt{x_2(\bar{t})} < w$ , то

$$\dot{x}_2(\bar{t}) = \sqrt{x_2(\bar{t})} \sin u + w > 0$$

Поэтому на интервале  $[t_j, \bar{t})$  движение идет ниже прямой  $x_2 = x_2^c$ . Поскольку точка  $x(t_j)$  находится не ниже линий  $\mathfrak{B}_1$  и  $\mathfrak{B}_2$ , то найдется момент  $\tilde{t} \leq t_j$ , такой, что  $x(\tilde{t}) \in \tilde{W}_c^\delta$ . Получили противоречие с определением стратегии  $\tilde{V}_\varepsilon$ . Следовательно, движение  $x(t)$  не может пересекать прямую  $x_2 = x_2^c$  до момента  $t_*$ .

Таким образом, движение  $x(t)$  проходит выше прямой  $x_2 = x_2^c$  до момента  $t_*$ . Так как в каждый момент  $t_i$ ,  $0 \leq i \leq N$ , управление второго игрока выбирается в силу



Фиг. 6

стратегии  $\tilde{V}_\varepsilon$ , то  $x(t) \notin \tilde{W}_c^\delta$  при  $t \leq t_*$ . Следовательно, движение  $x(t)$  не попадает на множество  $M_{\delta_1}$  до момента  $t_*$ .

Так как  $c = \varepsilon/2$ , то  $t_* = T(x_*) - \varepsilon$ . Получаем, что стратегия  $V_\varepsilon$  уклоняет от множества  $M_{\delta_1}$  до момента  $T(x_*) - \varepsilon$ . Поэтому для пучка  $X_2(x_*, V_\varepsilon)$  конструктивных движений выполнено неравенство

$$\inf J(X_2(x_*, V_\varepsilon)) \geq T(x_*) - \varepsilon$$

Отсюда следует правое неравенство в (5.11).

Функция цены игры при  $h \leq w^2$ . В случае  $h \leq w^2$  положим  $T(x) = T_2(x)$  выше линии  $\mathcal{D}$  и  $T(x) = T_1(x)$  ниже линии  $\mathcal{D}$ . Функции  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$  и линия  $\mathcal{D}$  строятся аналогично случаю  $h > w^2$ .

Поля характеристик для значений параметров  $h = 4$ ,  $w = 2$  показаны в левой части фиг. 6. Сингулярная линия  $\mathcal{D}$  целиком является рассеивающей (правая часть фиг. 6).

Барьерная линия состоит из части  $\mathcal{B}_*$  полупроницаемой кривой  $x_1 = B_*(x_2)$ , лежащей в полосе  $0 \leq x_2 \leq x_2^h$ , и части  $\mathcal{B}^*$  полупроницаемой кривой  $x_1 = B^*(x_2, h) := -B_*(x_2) + B_*(h)$ , лежащей в полосе  $x_2^h \leq x_2 \leq w^2$ . Здесь величина  $x_2^h$  определяется уравнением  $B_*(x_2) = B^*(x_2, h)$ . На линиях  $\mathcal{B}_*$  и  $\mathcal{B}^*$  функция  $T(x)$  определяется по непрерывности. В остальных точках положим  $T(x) = \infty$ .

На множестве  $x_1 < -d/2$ ,  $x_2 \geq 0$  функция  $T(x)$  задается симметрично относительно прямой  $x_1 = -d/2$ .

Рассеивающий характер склейки гладких ветвей функции  $T(x)$  обеспечивает выполнение условий стабильности (1.4) в точках негладкости.

Аналогично случаю  $h > w^2$  можно показать, что  $T(x)$  – функция цены игры при  $h \leq w^2$ .

Автор благодарит В.С. Пацко за постановку задачи и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS YSF 00-183).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. Isaacs R. Differential Games. N.Y.: Wiley, 1965 = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
4. Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer, 1931 = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1945. 620 с.
5. Subbotin A.I. Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
6. Гарнышева Г.Г., Субботин А.И. Субоптимальные универсальные стратегии в игровой задаче быстрогодействия // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 5. С. 707–713.
7. Melikyan A.A. Generalized Characteristics of the First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998. 310 p.
8. Чигирь С.А. Об игровой задаче о долинхобрахистохроне // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1003–1013.
9. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостехиздат, 1938. 192 с.

Екатеринбург  
e-mail:kamneva@imm.uran.ru

Поступила в редакцию  
6. VI.2002