

УДК 62–50

© 2003 г. Ю. К. Зотов

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТРАНСПОРТНОГО РОБОТА ТИПА АВТОМОБИЛЯ

Рассматривается нелинейная математическая модель движения транспортного робота (ТР) типа автомобиля с абсолютно твердыми колесами, с рулевым устройством и с приводами на базе двигателей постоянного тока. Такая модель движения ТР является неголономной электромеханической системой и без учета динамики приводов и рулевого устройства (сил упругости и демпфирования в ее элементах) соответствует математической модели движения автомобиля, разработанной П.С. Линейкиным [1]. Построены нелинейные канонические преобразования координат пространства состояний и управлений, приводящие исходные уравнения движения ТР к более простой канонической форме, удобной для анализа и синтеза систем управления ТР. С использованием этих преобразований найдены условия управляемости ТР, как объекта управления. Даны алгоритмы построения программных управлений и программных движений ТР. Синтезированы стабилизирующие законы управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость программных движений ТР и заданный характер переходов процессов.

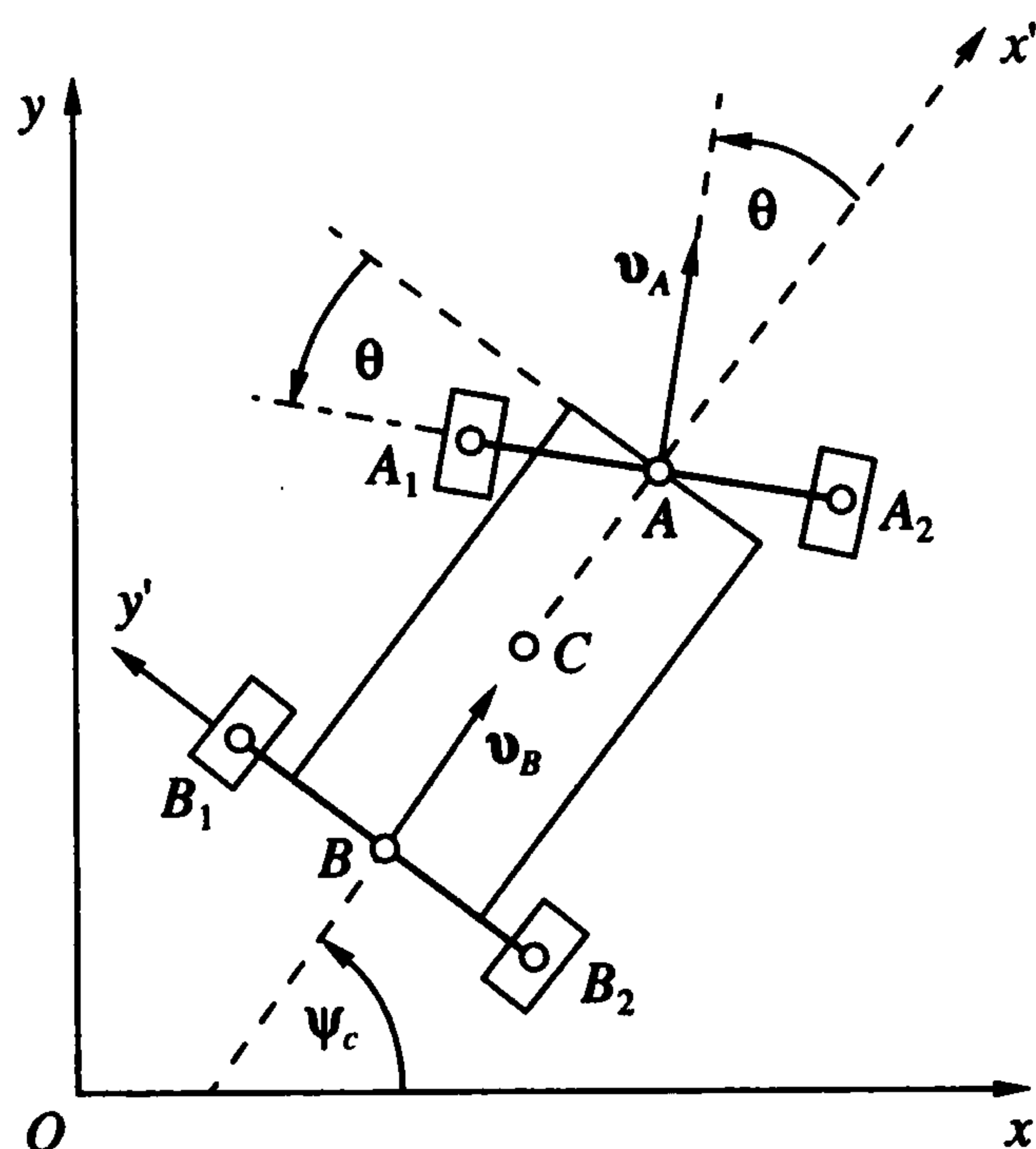
**1. Уравнения математической модели движения транспортного робота. Постановка задачи.** 1°. Рассмотрим математическую модель движения транспортного робота (ТР) типа автомобиля, который, как электромеханическая система, состоит из нескольких сочлененных между собой компонент: четырехколесного шасси, имеющего корпус, передний и задний мосты, абсолютно жесткие колеса, рулевое устройство, элементы которого обладают упругой деформацией, и электроприводов на базе двигателей постоянного тока (ДПТ) с независимым возбуждением с механизмами передачи движения (трансмиссиями) с абсолютно жесткими элементами.

Корпус ТР состоит из корпуса заднего моста и продольной балки, жестко соединяющей корпус заднего моста с неподвижной частью механизма поворота переднего моста.

Примем, что ТР динамически симметричен, т.е. центр масс  $S$  корпуса ТР лежит на продольной оси  $BA$ , проходящей через середины  $A$ ,  $B$  осей  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$  соответственно передних и задних колес (см. фигуру).

Предполагается, что движение каждого колеса можно считать чистым качением, без скольжения, как продольного в плоскости колес, так и поперечного перпендикулярно к плоскости колес. При этом  $v_A$  и  $v_B$  – векторы скоростей средних точек  $A$  и  $B$  передней и задней осей в каждый момент времени параллельны плоскостям соответствующих колес, т.е.  $v_B$  – вектор скорости точки  $B$  всегда направлен по продольной оси  $BA$ , а вектор скорости  $v_A$  точки  $A$  – под углом  $\theta$  к этой оси.

При изучении особенностей плоскопараллельного движения данной модели ТР будем рассматривать упрощенную схему модели движения ТР типа автомобиля, разработанную П.С. Линейкиным [1] (см. также [2], с. 22–32) и затем уточненную Л.Г. Лобасом ([3], с. 98–109).



Уравнения движения такой модели ТР относительно некоторой неподвижной системы декартовых координат (СДК)  $\Sigma = Oxyz$  при указанных упрощающих допущениях с учетом приведенных ранее соотношений ([3], с. 105, уравнения (5.24); с. 107, уравнения (5.34); с. 109, уравнения (5.41)) имеют вид

$$\dot{x}_c = \dot{\psi}_c(l \operatorname{ctg} \theta \cos \psi_c - l_2 \sin \psi_c)$$

$$\dot{y}_c = \dot{\psi}_c(l \operatorname{ctg} \theta \sin \psi_c + l_2 \cos \psi_c)$$

$$A_0(\theta) \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_c \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + b_0(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}) = D_0(\theta) Q_u \quad (1.1)$$

$$J_{ri} \ddot{\alpha}_i + k_{f1i} \dot{\alpha}_i + i_{pi}^{-1} \eta_{pi}^{-1} Q_{ui} = k_{mi} I_{ai}$$

$$L_{ai} \dot{I}_{ai} + R_{ai} I_{ai} + k_{ei} \dot{\alpha}_i = u_{ai}, \quad i = 1, 2$$

Здесь

$$A_0(\theta) = \begin{Bmatrix} J_0 + ml^2 \operatorname{ctg}^2 \theta & \Theta_2 \\ \Theta_2 & \Theta_2 \end{Bmatrix} = \|a_{0ij}(\theta)\|_{i,j=1,2}$$

$$b_0(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}) = \begin{Bmatrix} -\frac{ml^2 \operatorname{ctg} \theta}{\sin^2 \theta} \dot{\psi}_c \dot{\theta} + F_c(\theta, \dot{\psi}_c) l \operatorname{ctg} \theta \\ -k_{y2} \dot{\theta} - k_{f21} \dot{\theta} - k_{f22} \dot{\theta}^3 \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

$$D_0(\theta) = \operatorname{diag}\left(\frac{l \operatorname{ctg} \theta}{r}, 1\right), \quad J_0 = J + ml_2^2 + 2l_1 l_2 m_2$$

$x_c, y_c$  – координаты и  $\dot{x}_c, \dot{y}_c$  – скорости центра  $C$  масс ТР в неподвижной СДК  $Oxy$ ;  $\psi_c$  – курсовой угол – угол наклона (поворота) продольной оси  $BA$  ТР к оси  $Ox$ ;  $\theta$  – угол

поворота передних колес, отсчитываемый от направления продольной оси  $BA$  ТР; считается, что положительному значению углов  $\psi_c, \theta$  соответствует поворот колес влево; точка над символом означает операцию дифференцирования по времени  $t$ ;  $l = l_1 + l_2$  – длина базы корпуса; отрезки  $BA = l_1, BC = l_2$  – расстояния от центра  $C$  масс ТР до его передней и задней оси;  $m = m_1 + m_2$  – масса ТР;  $m_1$  – масса корпуса с учетом массы колес;  $\Theta_1 = J_1 + m_1 l_2^2, J_1$  – моменты инерции корпуса вместе с колесами относительно вертикали, проходящей через точки  $B$  и соответственно  $C$ , т.е.  $J_1$  – центральный момент инерции корпуса;  $m_2, \Theta_2$  – масса и момент инерции передней оси с рулевым устройством вместе с передними колесами относительно вертикали, проходящей через точку  $A$ ;  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 + m_2 l^2$  – момент инерции ТР относительно вертикальной оси, проходящей через точку  $B$ ;  $J = J_1 + \Theta_2 + m_2 l_1^2$  – момент инерции ТР относительно вертикальной оси  $Cz$ , проходящей через точку  $C$ ;  $A_0$  – симметричная, положительно определенная матрица-функция порядка  $2 \times 2$ ;  $b_0$  – двумерная вектор-функция;  $D_0$  – диагональная ( $2 \times 2$ )-матрица-функция;

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \kappa_0(\theta) \begin{pmatrix} \dot{\psi}_c \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad \kappa_0(\theta) = \text{diag}(l \text{ctg} \theta i_{p1} r^{-1}, i_{p2}) \quad (1.3)$$

$\alpha_i$  – угол поворота вала  $i$ -го ДПТ;

$$\begin{aligned} V_B = V_{cx'} = (v_c)_{x'} &= r(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)/2 = i_{p1}^{-1} \dot{\alpha}_1 r = \\ &= l \text{ctg} \theta \dot{\psi}_c = \rho_B \dot{\psi}_c = \kappa_B^{-1} \dot{\psi}_c \quad (\rho_B = \kappa_B^{-1} = l \text{ctg} \theta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

– скорость точки  $B(x_B, y_B, r)_\Sigma$ , равная проекции  $V_{cx'}$  вектора скорости  $v_c$  центра  $C(l_2, 0)_\Sigma$  масс ТР на ось  $Bx'$  (направленную по продольной оси  $BA$  ТР к передней части корпуса ТР) связанной (подвижной) СДК  $\Sigma' = Bx'y'$ ; считается, что при  $V_B > 0$  поступательное движение ТР происходит в направлении, которое совпадает с направлением оси  $Bx'$ , а при  $V_B < 0$  – в направлении противоположном оси  $Bx'$ ;  $r$  и  $\dot{q}_1, \dot{q}_2$  – радиус и угловые скорости колес заднего моста шасси ТР соответственно;  $\rho_B = l \text{ctg} \theta$  – радиус кривизны  $\kappa_B = \rho_B^{-1} = (l \text{ctg} \theta)^{-1}$  траектории движения ТР в точке  $B$ ;  $i_{pi}, \eta_{pi}$  – коэффициенты передачи и к.п.д.  $i$ -го редуктора трансмиссии;

$$\begin{aligned} F_c(\theta, \dot{\psi}_c) &= k_{fv1} l \text{ctg} \theta \dot{\psi}_c + k_{fv2} (l \text{ctg} \theta \dot{\psi}_c)^2 + F_{c0} = \\ &= \bar{F}_c(V_B) = k_{fv1} V_B + k_{fv2} V_B^2 + F_{c0} \end{aligned}$$

– сила сопротивления поступательному движению ТР;  $k_{fv1} \geq 0, k_{fv2} \geq 0$  – коэффициенты демпфирования;  $F_{c0} \geq 0$  – некоторая постоянная;  $Q_\theta = -k_{y2} \theta - k_{f21} \dot{\theta} - k_{f22} \dot{\theta}^3$  – обобщенная сила, учитывающая силы упругости и демпфирования, действующие на элементы рулевого устройства ([3], с. 109);  $k_{y2}, k_{f21}, k_{f22}$  – жесткость рулевого устройства и коэффициенты демпфирования;  $Q_{u1}, Q_{u2}$  – компоненты двумерного вектора

$$Q_u = \text{col}(Q_{u1}, Q_{u2}) \quad (1.5)$$

обобщенных (вращающих) моментов  $Q_{u1}, Q_{u2}$ , передаваемых от валов двигателей через трансмиссии соответственно к колесам задней оси и к рулевому устройству ТР;

$$P_u = Q_{u1}/r \quad (1.6)$$

– сила, действующая вдоль продольной оси ВА ТР в направлении оси  $Vx'$ ;

$$I_a = \text{col}(I_{a1}, I_{a2}) \quad (1.7)$$

– двумерный вектор токов  $I_{a1}, I_{a2}$  в якорных цепях ДПТ;  $J_{ri}$  – момент инерции ротора  $i$ -го двигателя;  $k_{f1i}$  – коэффициент момента сопротивления вязкого трения  $M_{ci} = -k_{f1i} \dot{\alpha}_i$  на валу  $i$ -го двигателя;  $k_{mi}$  – коэффициент электромагнитного (крутящего) момента  $M_i = k_{mi} I_{ai}$   $i$ -го ДПТ;  $L_{ai}, R_{ai}$  – суммарные индуктивность и активное сопротивление якорной цепи  $i$ -го ДПТ;  $k_{ei}$  – коэффициент пропорциональности противо-Э.Д.С.  $u_{ei} = k_{ei} \dot{\alpha}_i$   $i$ -го ДПТ;

$$u_a = \text{col}(u_{a1}, u_{a2}) \quad (1.8)$$

– двумерный вектор напряжений  $i_{a1}, u_{a2}$ , подаваемых на якорные цепи ДПТ.

Отметим, что поскольку в системе уравнений движения ТР (1.1) первые два уравнения описывают неголономные связи ([3], с. 105, уравнения (5.24)) между колесным шасси и опорной горизонтальной поверхностью (осуществляемые колесами шасси), то модель движения ТР (1.1) является неголономной электромеханической системой.

Исключив из уравнений (1.1) переменные  $Q_{u1}, Q_{u2}, \alpha_1, \alpha_2$ , а также, используя соотношения (1.2)–(1.8), получим уравнения движения ТР в виде следующей системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\bar{z}} = \bar{F}(\bar{z}, u_a), \quad \bar{z}_0 = \bar{z}(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.9)$$

Здесь

$$\bar{z} = \text{col}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) \quad (1.10)$$

$$(\bar{z}_1 = \text{col}(x_c, y_c), \bar{z}_2 = \text{col}(\psi_c, \theta), \bar{z}_3 = \dot{\bar{z}}_2 = \text{col}(\dot{\psi}_c, \dot{\theta}), \bar{z}_4 = I_a)$$

– вектор состояния ТР;  $\bar{z}_i = \text{col}(\bar{z}_{i1}, \bar{z}_{i2})$  ( $i = 1, \dots, 4$ );

$$\bar{F}(\bar{z}, u_a) = \text{col}(\bar{F}_1(\bar{z}_2^{31}), \bar{F}_2(\bar{z}_3), \bar{F}_3(\bar{z}_{22}^4), \bar{F}_4(\bar{z}_{22}^4, u_a)) \quad (1.11)$$

$$\bar{F}_1(\bar{z}_2^{31}) = \text{col}(\dot{\psi}_c(l \text{ctg} \theta \cos \psi_c - l_2 \sin \psi_c), \dot{\psi}_c(l \text{ctg} \theta \sin \psi_c + l_2 \cos \psi_c))$$

$$\bar{F}_2(\bar{z}_3) = \bar{z}_3 = \text{col}(\dot{\psi}_c, \dot{\theta}) \quad (1.12)$$

$$\bar{F}_3(\bar{z}_{22}^4) = \bar{C}_3(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}) + \bar{D}_3(\theta) I_a$$

$$\bar{F}_4(\bar{z}_{22}^4, u_a) = \bar{C}_4(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}, I_a) + \bar{D}_4 u_a$$

– вектор-функции, где

$$\bar{z}_2^{31} = \text{col}(\bar{z}_2, \bar{z}_{31}), \quad \bar{z}_{22}^4 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$$

$$\bar{C}_3(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}) = -A^{-1}(\theta) b(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}), \quad \bar{D}_3(\theta) = A^{-1}(\theta) k_m$$

$$A(\theta) = J_r \kappa_0(\theta) + i_p^{-1} \eta_p^{-1} D_0^{-1}(\theta) A_0(\theta) = \|a_{ij}(\theta)\|_{i,j=1,2} \quad (1.13)$$

$$b(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}) = (J_r \dot{\kappa}_0(\theta) + k_{f1} \kappa_0(\theta)) \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_c \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + i_p^{-1} \eta_p^{-1} D_0^{-1}(\theta) b_0(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta})$$

$$\bar{C}_4(\theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}, I_a) = L_a^{-1} \left[ -R_a I_a - k_e \kappa_0(\theta) \begin{Bmatrix} \dot{\psi}_c \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \right], \quad \bar{D}_4 = L_a^{-1}$$

$J_r, i_p, \eta_p, k_{f1}, k_m, L_a, R_a, k_e$  – диагональные  $(2 \times 2)$ -матрицы соответственно с диагональными элементами:  $J_{ri}, i_{pi}, \eta_{pi}, k_{fi}, k_{mi}, L_{ai}, R_{ai}, k_{ei}$  ( $i = 1, 2$ ).

Уравнения движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) нелинейными взаимно однозначными непрерывно дифференцируемыми преобразованиями координат пространства состояний  $\bar{z}$  (1.10) и  $\hat{z}$  (6.18), т.е.

$$\hat{z} = \text{col}(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4) \tag{1.14}$$

$$(\hat{z}_1 = \text{col}(x_B, y_B), \hat{z}_2 = \text{col}(\psi_c, \kappa_B), \hat{z}_3 = \text{col}(V_B, \dot{\kappa}_B), \hat{z}_4 = \hat{I}_a)$$

и управлений  $u_a$  (1.8) и  $\hat{u}_a$  (6.19), т.е.

$$\hat{u}_a = \text{col}(\hat{u}_{a1}, \hat{u}_{a2}) \tag{1.15}$$

по формулам (см. приложение, разд. 6)

$$\hat{z} = \Psi_0(\bar{z}), \quad \bar{z} \in \Omega_{\Psi_0} \tag{1.16}$$

$$\bar{z} = \Psi_0^{-1}(\hat{z}) = \Phi_0(\hat{z}), \quad \hat{z} \in \Omega_{\Phi_0} \tag{1.17}$$

и

$$\hat{u}_a = \Psi_{05}(\bar{z}_2^4, u_a) \quad (\bar{z}_2^4, u_a) \in \Omega_{\Psi_{05}} \tag{1.18}$$

$$u_a = \Psi_{05}^{-1}(\bar{z}_2^4, \hat{u}_a) = \Psi_{05}^{-1}(\Phi_{02}^4(\hat{z}_2^4), \hat{u}_a) = \Phi_{05}(\hat{z}_2^4, \hat{u}_a) \quad (\hat{z}_2^4, \hat{u}_a) \in \Omega_{\Phi_{05}} \tag{1.19}$$

соответственно (где  $\bar{z}_2^4 = \text{col}(\bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ ,  $\hat{z}_2^4 = \text{col}(\hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ ,  $\Phi_{02}^4(\bar{z}_2^4) = \text{col}(\Phi_{02}(\hat{z}_2), \Phi_{03}(\hat{z}_2^3), \Phi_{04}(\hat{z}_2^4))$ ), вектор-функции  $\Psi_0(\bar{z})$ ,  $\Phi_0(\hat{z})$  соответственно вида (6.37), (6.38), заданные соответственно на множествах  $\Omega_{\Psi_0}$  (6.39),  $\Omega_{\Phi_0}$  (6.40), а вектор-функции  $\Psi_{05}(\bar{z}_2^4, u_a)$ ,  $\Phi_{05}(\hat{z}_2^4, \hat{u}_a)$  соответственно вида (6.41), (6.42), заданные соответственно на множествах  $\Omega_{\Psi_{05}}$  (6.43),  $\Omega_{\Phi_{05}}$  (6.44)) приведем к более простой системе нелинейных ОДУ специального вида

$$\dot{\hat{z}} = \hat{F}(\hat{z}, \hat{u}_a), \quad \hat{z}_0 = \hat{z}(t_0), \quad t \geq t_0 \tag{1.20}$$

Здесь  $\hat{z}$  – вектор состояния (1.14) системы

$$\begin{aligned} \hat{F}(\hat{z}, \hat{u}_a) &= J_{\Psi_0}((\Phi_0(\hat{z})) \cdot \bar{F}(\Phi_0(\hat{z}), \Phi_{05}(\hat{z}_2^4, \hat{u}_a))) = \\ &= \text{col}(\hat{F}_1(\hat{z}_{21}, \hat{z}_{31}), \hat{F}_2(\hat{z}_{22}^3), \hat{F}_3(\hat{z}_4), \hat{F}_4(\hat{u}_a)) \end{aligned} \tag{1.21}$$

где  $J_{\Psi_0}(\bar{z}) = \partial\Phi_0(\bar{z})/(\partial\bar{z})$  –  $(8 \times 8)$ -матрица-функция Якоби

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(\hat{z}_{21}, \hat{z}_{31}) &= \text{col}(\hat{z}_{31} \cos \hat{z}_{21}, \hat{z}_{31} \sin \hat{z}_{21}) = \text{col}(V_B \cos \psi_c, V_B \sin \psi_c) \\ \hat{F}_2(\hat{z}_{22}^3) &= \text{col}(\hat{z}_{22} \hat{z}_{31}, \hat{z}_{32}) = \text{col}(\kappa_B V_B, \dot{\kappa}_B) \\ \hat{F}_3(\hat{z}_4) &= \hat{z}_4 = \hat{I}_a, \quad \hat{F}_4(\hat{u}_a) = \hat{u}_a \end{aligned} \tag{1.22}$$

– двумерные вектор-функции,  $\hat{z}_{22}^3 = \text{col}(\hat{z}_{22}, \hat{z}_3)$ ; первые два уравнения описывают неголономные связи [4].

Отметим, что частный вариант такой системы уравнений модели движения ТР – автомобиля (без учета динамики рулевого устройства и приводов, сил упругости и демпфирования, действующих на элементы рулевого устройства) описан ранее ([5], с. 20, уравнения (1)–(5)).

Будем считать вспомогательные управляющие воздействия  $\hat{u}_{a1}$ ,  $\hat{u}_{a2}$  (1.15) такими, что

$$\ddot{\hat{u}}_{a1} = u_1, \quad \ddot{\hat{u}}_{a2} = u_2 \quad (1.23)$$

где  $u_1, u_2$  – компоненты вектора управлений

$$u = \text{col}(u_1, u_2) \quad (1.24)$$

подаваемых на входы системы (1.20)–(1.23), (1.14), (1.15).

Тогда уравнения модели движения ТР специального вида (1.20)–(1.24), (1.14), (1.15) можно записать в виде системы нелинейных ОДУ

$$\dot{z} = F(z, u), \quad z_0 = z(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.25)$$

здесь

$$z = \text{col}(z_1, \dots, z_5) \quad (z_1 = \hat{z}_1 = \text{col}(x_B, y_B), z_2 = \text{col}(V_B, \psi_c) \\ (V_B = \hat{z}_{31}, \psi_c = \hat{z}_{21}), z_3 = \text{col}(\hat{I}_{a1}, \kappa_B) \quad (\hat{I}_{a1} = \hat{z}_{41}, \kappa_B = \hat{z}_{22})) \quad (1.26)$$

$$z_4 = \text{col}(\hat{u}_{a1}, \bar{\kappa}) \quad (\bar{\kappa} = \dot{\kappa}_B = \hat{z}_{32}), \quad z_5 = \text{col}(\tilde{u}_{a1}, \hat{I}_{a2}) \quad (\tilde{u}_{a1} = \dot{\hat{u}}_{a1}, \hat{I}_{a2} = \hat{z}_{42}))$$

– вектор состояния ТР,  $z_i = \text{col}(z_{i1}, z_{i2})$ ,  $z_i^j = \text{col}(z_i, z_{i+1}, \dots, z_j)$ ,  $j \geq i$ ;  $z_i^i = z_i$ ;

$$F(z, u) = \text{col}(F_1(z_2), F_2(z_{21}, z_3), F_3(z_4), F_4(z_5), F_5(u)) \quad (1.27)$$

$$F_1(z_2) = \text{col}(z_{21} \cos z_{22}, z_{21} \sin z_{22}) = \text{col}(V_B \cos \psi_c, V_B \sin \psi_c)$$

$$F_2(z_{21}, z_3) = D_2(z_{21})z_3 = \text{col}(\hat{I}_{a1}, \kappa_B V_B), \quad D_2(z_{21}) = \text{diag}(1, z_{21}) \quad (1.28)$$

$$F_3(z_4) = z_4 = \text{col}(\hat{u}_{a1}, \bar{\kappa}), \quad \bar{F}_4(z_5) = z_5 = \text{col}(\tilde{u}_{a1}, \hat{I}_{a2}), \quad F_5(u) = u$$

– вектор-функции.

Отметим, что вектор состояния  $z$  (1.26) системы (1.25)–(1.28), (1.24) связан с вектором состояния  $\bar{z}$  исходных уравнений движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) нелинейными преобразованиями вида

$$z = H_1 \hat{z} + H_0 \tilde{u}_a = H_1 \Psi_0(\bar{z}) + H_0 \tilde{u}_a \quad (\hat{z} = \Psi_0(\bar{z})) \quad (1.29)$$

$$\bar{z} = \Phi_0(\hat{z}) = \Phi_0(H_2 z) \quad (\hat{z} = H_2 z) \quad (1.30)$$

где

$$\tilde{u}_a = \text{col}(\tilde{u}_{a1}, \tilde{u}_{a2}) = \text{col}(\hat{u}_{a1}, \tilde{u}_{a1}) = \text{col}(z_{41}, z_{51}) \quad (1.31)$$

$$(\tilde{u}_{a1} = \hat{u}_{a1} = z_{41}, \tilde{u}_{a2} = \tilde{u}_{a1} = \dot{\hat{u}}_{a1} = z_{51})$$

$H_1, H_0, H_2$  – постоянные матрицы размера соответственно  $10 \times 8$ ,  $10 \times 2$ ,  $8 \times 10$  имеют соответственно элементы:

$$h_{111} = h_{122} = h_{135} = h_{143} = h_{157} = h_{164} = h_{186} = h_{1,10,8} = 1 \\ h_{071} = h_{092} = 1 \quad (1.32)$$

$$h_{211} = h_{222} = h_{234} = h_{246} = h_{253} = h_{268} = h_{275} = h_{2,8,10} = 1$$

а остальные элементы этих матриц – нулевые.

Отметим также, что для исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13) вектор напряжений  $u_a$  (1.8), подаваемых на якорные цепи ДПТ, в силу равенств (1.19), (1.23) связан с вектором управлений  $u$  (1.24) системы (1.25)–(1.28) нелинейным преобразованием вида (1.19), (6.42):

$$u_a = \Phi_{05}(\hat{z}_2^4, \hat{u}_a) = \Phi_{05}(\Psi_{02}^4(\bar{z}_2^4), \hat{u}_a) = \Phi_{05}(\Psi_{02}^4(\bar{z}_2^4), \hat{U}_a(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u)) \quad (1.33)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_{02}^4(\bar{z}_2^4) &= \text{col}(\Psi_{02}(\bar{z}_2), \Psi_{03}(\bar{z}_2^3), \Psi_{04}(\bar{z}_2^4)) \\ \hat{u}_a &= \text{col}(\hat{u}_{a1}, \hat{u}_{a2}) = \text{col}(\hat{u}_{a1}, u_2) = \text{col}(\tilde{U}_{a1}(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1), u_2) \equiv \\ &\equiv \hat{U}_a(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u) = \text{col}(\tilde{U}_{a1}(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1), \tilde{U}_{a2}(u_2)) \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \left( \begin{aligned} \hat{u}_{a1} &= \hat{u}_{a1}(t) = h_1^* \tilde{u}_a(t) = \|1, t - t_0\| \tilde{u}_a(t_0) + \int_{t_0}^t (t-s) u_1(s) ds = \\ &= \hat{u}_{a1}(t_0) + (t-t_0) \tilde{u}_a(t_0) + \int_{t_0}^t (t-s) u_1(s) ds \equiv \tilde{U}_{a1}(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1) \\ \hat{u}_{a2} &= \hat{U}_{a2}(u_2) = u_2 \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$h_1 = \text{col}(1, 0)$  – двумерный вектор, звездочка означает операцию транспонирования,  $\tilde{u}_a$  – вектор состояния (1.31) линейной системы ОДУ вида

$$\dot{\tilde{u}}_a = P_0 \tilde{u}_a + Q_0 u_1, \quad \tilde{u}_{a0} = \tilde{u}_a(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (1.35)$$

где

$$P_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad Q_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (1.36)$$

такой, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}_a(t) &= \text{col}(\tilde{u}_{a1}(t), \tilde{u}_{a2}(t)) = e^{P_0(t-t_0)} \tilde{u}_a(t_0) + \int_{t_0}^t e^{P_0(t-s)} Q_0 u_1(s) ds = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tilde{u}_a(t_0) + \int_{t_0}^t \begin{vmatrix} t-s & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} u_1(s) ds \equiv \tilde{U}_a(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1) = \\ &= \text{col}(\tilde{U}_{a1}(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1), \tilde{U}_{a2}(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1)), \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (1.37)$$

где  $\tilde{U}_{a1}$  – функция из (1.34),

$$\tilde{U}_{a2}(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, u_1) = \tilde{u}_{a2}(t) = h_2^* \tilde{u}_a(t) = \tilde{u}_{a2}(t_0) + \int_{t_0}^t u_1(s) ds$$

$h_2 = \text{col}(0, 1)$  – двумерный вектор.

2°. Ниже формулировка постановки задачи приводится для уравнений модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24), более удобной для начального исследования. Аналогично может быть рассмотрена постановка задачи и для исходных уравнений модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8).

Система (1.25)–(1.28), (1.24) называется управляемой [6], если для любых двух состояний  $z_{p0} \in R^{10}$  и  $z_{p1} \in R^{10}$ , (где  $R^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство), любых  $t_0 < t_1$ ,  $t_1 - t_0 < \infty$  существует управление  $u = u(t)$  (1.24), такое, что соответствующее ему решение  $z(t)$  (1.26) системы (1.25)–(1.28), (1.24) удовлетворяет граничным условиям

$$z(t_0) = z_{p0}, \quad z(t_1) = z_{p1} \quad (1.38)$$

Решение

$$z = z_p(t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.39)$$

системы (1.25)–(1.28), (1.24), удовлетворяющее граничным условиям (1.38), будем называть программным движением (ПД), а соответствующее ему управление

$$u = u_p(t), \quad t \in [t_0, t_1] \quad (1.40)$$

программным управлением.

Рассмотрим некоторое ПД  $z_p(t)$  (1.39), (1.38) системы (1.25)–(1.28), (1.24). Будем говорить, что оно стабилизируемо, если существует закон управления с обратной связью по вектору состояния  $z$  вида

$$u = u(t, z), \quad t \geq t_0 \quad (1.41)$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость ПД  $z_p(t)$  (1.39), (1.38), так чтобы спустя заданное время  $T_p > 0$  ( $t_0 < t_0 + T_p = t_p < t_1$ ) (время затухания переходного процесса  $e(t) = z(t) - z_p(t)$  в замкнутой системе (1.25)–(1.28), (1.24), (1.41), характеризующее быстродействие системы управления) обеспечивалась требуемая точность –  $\varepsilon_e > 0$  стабилизации ПД  $z_p(t)$  (1.39), (1.38), т.е. чтобы была выполнена оценка

$$|e(t)| \leq \varepsilon_e, \quad \forall t \geq t_p = t_0 + T_p, \quad t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1 \quad (1.42)$$

где всюду  $|a| = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$  – евклидова норма (модуль) вектора  $a = \text{col}(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ .

**2. Уравнения движения ТР в канонической форме.** Предлагаемые ниже методы исследования условий управляемости ТР, алгоритмы построения программных управлений и ПД, синтеза стабилизирующих законов управлений и анализа устойчивости ПД ТР основаны на приведении уравнений модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24) и уравнений исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13) к канонической форме с помощью нелинейных преобразований координат пространства состояний и управлений.

Канонической формой описания уравнений движения ТР будем называть их представление в виде линейного ОДУ

$$\dot{x} = Px + Qw, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0 \quad (2.1)$$

Здесь

$$x = \text{col}(x_1, \dots, x_5) = \text{col}(x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(4)}) \quad (2.2)$$

$$(x_1 = \text{col}(x_B, y_B), x_i = \dot{x}_{i-1}, i = 2, \dots, 5)$$

$x_0$  – десятимерные векторы канонических переменных состояния ТР в текущий и начальный моменты времени;  $x_i$  – двумерный вектор;  $x_1^{(i)} = x_1^{(i)}(t)$  –  $i$ -я производная по  $t$  от  $x_1 = x_1(t)$ ;  $x_1^{(0)} = x_1$ ;  $\dot{x}_i = x_1^{(i)}$ ;

$$w = \text{col}(w_1, w_2) \quad (2.3)$$

– двумерный вектор “канонических” управлений;  $P, Q$  – постоянные блочные матрицы размерностей  $10 \times 10$  и  $10 \times 2$  вида

$$P = \begin{Bmatrix} O & I_8 \\ O & O \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} O \\ I_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

где  $I_m$  – единичная ( $m \times m$ )-матрица,  $O$  – нулевая матрица соответствующей размерности.

**3. Приведение уравнений модели движения ТР специального вида к каноническому виду.** Построим преобразования координат пространства состояний  $z$  и управлений  $u$  уравнений модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24), которые приводят их к более простой канонической форме (2.1)–(2.4). Будем искать преобразования в виде

$$x = \Psi(z) \quad (3.1)$$

$$w = \Psi_6(z_2, u) \quad (3.2)$$

где  $\Psi, \Psi_6$  – десяти- и двумерные вектор-функции

$$\Psi(z) = \text{col}(\Psi_1(z_1), \Psi_2(z_2), \Psi_3(z_2^3), \Psi_4(z_2^4), \Psi_5(z_2^5)) \quad (3.3)$$

$$x_1 = \Psi_1(z_1) = z_1 \quad (3.4)$$

$\Psi_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ ) – двумерные вектор-функции, подлежащие определению.

Опишем алгоритм нахождения неизвестных вектор-функций  $\Psi_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ ). С этой целью рассмотрим тождества

$$\dot{x}_1 = \dot{\Psi}_1(z_1) = \dot{z}_1, \quad x_1^{(i)} = \dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \sum_{k=2}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} \dot{z}_k, \quad i = 2, 3, 4, 5 \quad (3.5)$$

где  $z_2^i = \text{col}(z_2, \dots, z_i)$ ,  $i \geq 2$ ,  $\partial \Psi_i(z_2^i) / (\partial z_k)$  –  $(2 \times 2)$ -матрица-функция Якоби. Заменяя в (3.5) производные по времени  $\dot{x}_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) в силу системы (2.1)–(2.4), а  $\dot{z}_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) в силу системы (1.25)–(1.28), (1.24), получим соотношения

$$x_2 = F_1(z_2) = \text{col}(z_{21} \cos z_{22}, z_{21} \sin z_{22}) \equiv \Psi_2(z_2) \quad (3.6)$$

$$x_3 = \frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) = L_2(z_2) F_2(z_{21}, z_3) = L_3(z_2) z_3 \equiv \Psi_3(z_2^3) \quad (3.7)$$

$$(x_2 = \dot{x}_1, x_3 = \dot{x}_2 = x_1^{(2)})$$

$$L_2(z_2) = \frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} = \frac{\partial F_1(z_2)}{\partial z_2} = \begin{Bmatrix} \cos z_{22} & -z_{21} \sin z_{22} \\ \sin z_{22} & z_{21} \cos z_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

$$L_3(z_2) = L_2(z_2) D_2(z_{21}) = \begin{Bmatrix} \cos z_{22} & -z_{21}^2 \sin z_{22} \\ \sin z_{22} & z_{21}^2 \cos z_{22} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$x_4 = \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) + \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_3} F_3(z_4) = K_4(z_2^3) + L_4(z_2) z_4 \equiv \Psi_4(z_2^4) \quad (3.10)$$

$$(x_4 = \dot{x}_3 = x_1^{(3)})$$

$$K_4(z_2) = \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3), \quad L_4(z_2) = \frac{\partial \Psi_3(z_2^3)}{\partial z_3} = L_3(z_2) \quad (3.11)$$

$$x_5 = \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) + \sum_{k=3}^4 \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_k} F_k(z_{k+1}) = K_5(z_2^4) + L_5(z_2) z_5 \equiv \Psi_5(z_2^5) \quad (3.12)$$

$$(z_5 = \dot{x}_4 = x_1^{(4)})$$

$$K_5(z_2^4) = \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) + \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_3} F_3(z_4) \quad (3.13)$$

$$L_5(z_2) = \frac{\partial \Psi_4(z_2^4)}{\partial z_4} = L_4(z_2) = L_3(z_2)$$

$$w = \frac{\partial \Psi_5(z_2^5)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) + \sum_{k=3}^4 \frac{\partial \Psi_5(z_2^5)}{\partial z_k} F_k(z_{k+1}) + \frac{\partial \Psi_5(z_2^5)}{\partial z_5} F_5(u) = K_6(z_2^5) + L_6(z_2) u \equiv \Psi_6(z_2^5, u) \quad (3.14)$$

$$(w = \dot{x}_5 = x_1^{(5)})$$

$$K_6(z_2^5) = \frac{\partial \Psi_5(z_2^5)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) + \sum_{k=3}^4 \frac{\partial \Psi_5(z_2^5)}{\partial z_k} F_k(z_{k+1}) \quad (3.15)$$

$$L_6(z_2) = \frac{\partial \Psi_5(z_2^5)}{\partial z_5} = L_5(z_2) = L_3(z_2)$$

Таким образом, построены исходные преобразования (3.1) и (3.2) в аналитическом виде (3.1), (3.3), (3.4), (3.6)–(3.13) и (3.14), (3.15) соответственно.

Покажем, что построенные исходные преобразования (3.1), (3.3), (3.4), (3.6)–(3.13) и (3.14), (3.15) однозначно разрешимы относительно  $z$  и  $u$  соответственно. С учетом равенств (3.4) имеем

$$z_1 = \Phi_1(x_1) = x_1 \quad (3.16)$$

Вычислим главные миноры  $\Delta_1, \Delta_2$  матрицы  $L_2$  (3.8)

$$\Delta_1 = \cos z_{22} > 0 \quad \text{при} \quad z_{22} \in \Omega_{z_{22}} = (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\Delta_2 = z_{21} \neq 0 \quad \text{при} \quad z_{21} \in \Omega_{z_{21}} = \begin{cases} \Omega_{z_{21}}^+, & \text{если } z_{21} = V_B > 0 \\ \Omega_{z_{21}}^-, & \text{если } z_{21} = V_B < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

где множества

$$\Omega_{z_{21}}^+ \equiv (\varepsilon_V, k_V) \quad (3.18)$$

$$\Omega_{z_{21}}^- \equiv (-k_V, -\varepsilon_V) \quad (3.19)$$

$\varepsilon_V, k_V$  – некоторые положительные вещественные числа,  $0 < \varepsilon_V < k_V < \infty$ .

Всюду ниже для определенности (чтобы не вводить лишних обозначений и не повторять выкладок) рассмотрим случай, когда в соотношениях (3.17) фигурирует множество  $\Omega_{z_{21}}$  вида (3.18), т.е.

$$\Omega_{z_{21}} = \Omega_{z_{21}}^+ \equiv (\varepsilon_V, k_V) \quad (3.20)$$

и введем в рассмотрение некоторый параметр  $\rho_V = 1$ , соответствующий этому случаю.

Отметим, что случай, когда в (3.17) фигурирует множество  $\Omega_{z_{21}}$  вида (3.19), т.е.

$$\Omega_{z_{21}} = \Omega_{z_{21}}^- \equiv (-k_V, -\varepsilon_V) \quad (3.21)$$

рассматривается вполне аналогично при замене всюду ниже в разд. 3–5 соответственно множества (3.18) на множество (3.19), множества (3.20) на множество (3.21), а  $\rho_V = 1$  на  $\rho_V = -1$ . В результате могут быть получены оценки и утверждения, аналогичные приводимым ниже.

Итак, в случае, когда в (3.17) фигурирует множество  $\Omega_{z_{21}}$  вида (3.20), из теоремы 20.9 ([7], с. 484) вытекает, что преобразование (3.6) однозначно разрешимо относительно  $z_2$  в прямоугольной области

$$\Omega_{\Psi_2} = \{z_2 = \text{col}(z_{21}, z_{22}) \in R^2 : z_{21} \in \Omega_{z_{21}} \equiv \Omega_{z_{21}}^+, z_{22} \in \Omega_{z_{22}}\} \quad (3.22)$$

т.е. существует обратное преобразование

$$z_2 = \Phi_2(x_2) \quad (3.23)$$

$$\Phi_2(x_2) = \text{col}(\Phi_{21}(x_2), \Phi_{22}(x_2)) \quad (3.24)$$

$$\Phi_{21}(x_2) = \rho_V(x_{21}^2 + x_{22}^2)^{1/2} \equiv z_{21} = V_B \in \Omega_{z_{21}} \equiv \Omega_{z_{21}}^+, \quad \rho_V = 1, \quad x_2 \in \Omega_{\Phi_2} \quad (3.25)$$

$$\Phi_{22}(x_2) = \arcsin(x_{22}/[\Phi_{21}(x_2)]) \in \Omega_{z_{22}}, \quad x_2 \in \Omega_{\Phi_2} \quad (3.26)$$

$$\Omega_{\Phi_2} = \{x_2 = \text{col}(x_{21}, x_{22}) \in R^2 : z_2 = \Phi_2(x_2) \in \Omega_{\Psi_2}\} \quad (3.27)$$

Далее, поскольку матрицы  $L_2$  (3.8),  $L_3$  (3.9),  $L_4$  (3.11),  $L_5$  (3.13) такие, что  $|\det L_2(z_2)| = |z_{21}| > \varepsilon_V > 0$ ,  $|\det L_i(z_2)| = z_{21}^2 > \varepsilon_V^2 > 0$  ( $i = 3, 4, 5, 6$ ) при  $z_2 \in \Omega_{\Psi_2}$ , то

$$\text{rank} L_i(z_2) = 2, \quad z_2 \in \Omega_{\Psi_2}, \quad i = 2, \dots, 6 \quad (3.28)$$

и существуют соответственно обратные матрицы  $L_i^{-1}(z_2)$  ( $i = 2, \dots, 6$ ) для значений  $z_2 \in \Omega_{\Psi_2}$  и, следовательно, преобразования (3.7), (3.10), (3.12) и (3.14) однозначно разрешимы относительно  $z_3, z_4, z_5$  и  $u$  соответственно, т.е. имеют обратные преобразования вида

$$z_i = \Phi_i(x_2^i), \quad i = 3, 4, 5 \quad (3.29)$$

где

$$\Phi_3(x_2^3) = N_3(x_2)x_3, \quad \Phi_i(x_2^i) = M_i(x_2^{i-1}) + N_i(x_2)x_i, \quad i = 4, 5 \quad (3.30)$$

$$M_i(x_2^{i-1}) = -N_i(x_2)K_i(\Phi_2^{i-1}(x_2^{i-1})), \quad i = 4, 5 \quad (3.31)$$

$$N_i(x_2) = L_i^{-1}(\Phi_2(x_2)) = L_3^{-1}(\Phi_2(x_2)) = N_3(x_2), \quad i = 4, 5$$

$$L_2^{-1}(\Phi_2(x_2)) = L_{2x}(x_2) = \|l_{2xij}(x_2)\|_{i,j=1,2}, \quad l_{2x1j}(x_2) = x_{2j}/\Phi_{21}(x_2) \quad (3.32)$$

$$l_{2x2j}(x_2) = (-1)^j x_{2,3-j}/[\Phi_{21}(x_2)]^2, \quad j = 1, 2$$

$$\Phi_2^{i-1}(x_2^{i-1}) = \text{col}(\Phi_2(x_2), \Phi_3(x_2^3), \dots, \Phi_{i-1}(x_2^{i-1})) \quad (3.33)$$

$$u = \Phi_6(x_2^5, w)$$

где

$$\Phi_6(x_2^5, w) = M_6(x_2^5) + N_6(x_2)w \quad (3.34)$$

$$M_6(x_2^5) = -N_6(x_2)K_6(\Phi_2^5(x_2^5)), \quad N_6(x_2) = L_6^{-1}(\Phi_2(x_2)) \quad (3.35)$$

Таким образом, при учете соотношений (3.16), (3.23)–(3.32) для исходного преобразования (3.1), (3.3), (3.4), (3.6)–(3.11) построено взаимно однозначное обратное преобразование

$$z = \Phi(x), \quad x \in \Omega_\Phi \quad (3.36)$$

где

$$\Phi(x) = \text{col}(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2), \Phi_3(x_2^3), \Phi_4(x_2^4), \Phi_5(x_2^5)) \quad (3.37)$$

$\Phi_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ) – вектор-функции (3.16), (3.23)–(3.32), множества

$$\Omega_\Phi = \{x = \text{col}(x_1, \dots, x_5) \in R^{10} : z = F(x) \in \Omega_\Psi\} \quad (3.38)$$

$$\Omega_\Psi = \{z = \text{col}(z_1, \dots, z_5) \in R^{10} : z_i \in R^2, i = 1, 3, 4, 5; z_2 \in \Omega_{\Psi_2}\} \quad (3.39)$$

Покажем теперь, что если взять любое решение  $x_1(t)$  ОДУ

$$x_1^{(5)} = \Psi_6(\Phi_2^5(\dot{x}_1, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}), u) \quad (3.40)$$

эквивалентного системе (2.1)–(2.4) при  $w = \Psi_6(\Phi_2^5(\dot{x}_1, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}), u)$ , где  $x_2^5 = \text{col}(x_2, \dots, x_5) = \text{col}(\dot{x}_1, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)})$ , подставить его в систему (3.5):

$$x_1^{(i)} = \dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \Psi_{i+1}(z_2^{i+1}) = x_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.41)$$

где  $z_2^1 = z_2$ , и определить из этой системы вектор-функции  $z_i(t)$  ( $i = 2, 3, 4, 5$ ), то система вектор-функций

$$x_1(t) = z_1(t), z_2(t), z_3(t), z_4(t), z_5(t) \quad (3.42)$$

будет решением системы (1.25)–(1.28), (1.24).

Подставим указанную систему вектор-функций (3.42) в систему (1.25)–(1.28), (1.24) и тем самым обратим все уравнения этой системы в тождества, в частности, получим тождество

$$\dot{x}_1 = \dot{z}_1 \equiv F_1(z_2) \quad (3.43)$$

Дифференцируя это тождество по  $t$ , получим

$$\ddot{x}_1 = \ddot{z}_1 = \dot{x}_2 = \dot{\Psi}_2(z_2) = \frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2} \dot{z}_2 \quad (3.44)$$

В этом тождестве пока нельзя заменить  $\dot{z}_2$  вектор-функцией  $F_2$ , так как еще не показано, что полученные указанным выше путем из уравнения (3.40) и системы (3.41) вектор-функции  $x_1(t), z_2(t), \dots, z_5(t)$  (3.42) удовлетворяют системе ОДУ специального вида (1.25)–(1.28), (1.24), так как именно это утверждение и необходимо доказать.

Вычитая почленно из тождества (3.44) тождество (3.7), получим

$$\frac{\partial \Psi_2(z_2)}{\partial z_2}(\dot{z}_2 - F_2(z_{21}, z_3)) \equiv 0 \quad (3.45)$$

Аналогично, дифференцируя по  $t$  тождества  $x_i = \Psi_i(z_2^i)$  ( $i = 3, 4, 5$ ) (3.41)

$$\dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \sum_{k=2}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} \dot{z}_k, \quad i = 3, 4, 5$$

и вычитая соответственно тождества

$$\dot{x}_i = \dot{\Psi}_i(z_2^i) = \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_2} F_2(z_{21}, z_3) + \sum_{k=3}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} F_k(z_{k+1}), \quad i = 3, 4, 5; z_6 = u$$

из (3.10), (3.12), (3.14) получим

$$\sum_{k=3}^i \frac{\partial \Psi_i(z_2^i)}{\partial z_k} (\dot{z}_k - F_k(z_{k+1})) \equiv 0, \quad i = 3, 4, 5 \quad (3.46)$$

Уравнения (3.45), (3.46) относительно неизвестных

$$\dot{z}_2 - F_2(z_{21}, z_3), \quad \dot{z}_k - F_k(z_{k+1}), \quad k = 3, 4, 5$$

запишем в виде системы

$$J_0(z_2^4)(\dot{z}_2^5 - F_2^5(z_{21}, z_3^6)) = 0 \quad (3.47)$$

где

$$z_3^6 = \text{col}(z_3, \dots, z_6), \quad z_6 = u, \quad F_2^5(z_{21}, z_3^6) = \text{col}(F_2(z_{21}, z_3), F_3(z_4), F_4(z_5), F_5(z_6))$$

Здесь

$$J_0(z_2^4) = \frac{\partial \Psi_0^5(z_2^5)}{\partial z_2^5} \quad (3.48)$$

–  $(8 \times 8)$ -матрица-функция Якоби,  $\Psi_2^5(z_2^5) = \text{col}(\Psi_2(z_2), \Psi_3(z_2^3), \dots, \Psi_5(z_2^5))$ .

При учете соотношений (3.6)–(3.13) заключаем, что матрица-функция  $J_0$  (3.48) блочно-нижне-треугольная с диагональными  $(2 \times 2)$ -блоками  $L_i$  ( $i = 2, \dots, 5$ ) (3.8), (3.9), (3.11), (3.13), которые согласно условию (3.28) невырождены. Поэтому

$$\text{rank} J_0(z_2^4) = 8, \quad \forall z_2^4 \in \Omega_{J_0} \quad (3.49)$$

где множество

$$\Omega_{J_0} = \{z_2^4 = \text{col}(z_2, z_3, z_4) \in R^6 : z_2 \in \Omega_{\Psi_2}, z_3, z_4 \in R^2\} \quad (3.50)$$

Следовательно, учитывая соотношение (3.49), заключаем, что матрица-функция  $J_0$  (3.48) также невырождена. Отсюда вытекает, что система (3.47) в каждой точке множества  $\Omega_{J_0}$  (3.50) имеет только тривиальное решение

$$\dot{z}_2^5 - F_2^5(z_{21}, z_3^6) = 0$$

Принимая во внимание еще тождество (3.43), получим, что вектор-функция  $y = \text{col}(x_1, z_2, \dots, z_5) \equiv z$  – решение системы ОДУ специального вида (1.25)–(1.28), (1.24).

**4. Управляемость и алгоритмы построения программных управлений и ПД ТР.** Сначала покажем, что модель движения ТР в канонической форме (2.1)–(2.4) вполне управляема ([8], с. 269). Поскольку матрица

$$S = \|Q, PQ, \dots, P^9 Q\| \quad (4.1)$$

имеет подматрицу  $S_0 = \|Q, PQ, \dots, P^4 Q\|$ , для которой в силу (2.4)  $|\det S_0| = 1$ , и следовательно,

$$\text{rank} S = \text{rank} S_0 = 10 \quad (4.2)$$

то система (2.1)–(2.4) вполне управляема ([8], с. 269, теорема 3.1), т.е. существует закон управления

$$w = w_p = w_p(t) = Q^* e^{P^*(t_1-t)} K_0^{-1} (x_{p1} - e^{PT} x_{p0}) \quad (4.3)$$

где

$$K_0 = \int_{t_0}^{t_1} e^{P(t_1-t)} Q Q^* e^{P^*(t_1-t)} dt \quad (4.4)$$

– постоянная положительно определенная  $(10 \times 10)$ -матрица в силу вполне управляемости системы (2.1)–(2.4) [8], переводящий систему (2.1)–(2.4) из любого начального состояния  $x_p(t_0) = x_{p0} = \Psi(z_{p0}) \in R^{10}$  (в частности, при  $z_{p0} \in \Omega_\Psi$ , где  $\Omega_\Psi$  – множество (3.39)) в произвольное конечное состояние  $x_p(t_1) = x_{p1} = \Psi(z_{p1}) \in R^{10}$  (в частности, при  $z_{p1} \in \Omega_\Psi$ ) за время  $t_1 - t_0 < \infty$  по траектории

$$x_p = x_p(t) = e^{P(t-t_0)} x_{p0} + \int_{t_0}^t e^{P(t-s)} Q w_p(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.5)$$

Отметим, что для вычисления  $e^{P(t-t_0)}$ ,  $e^{P(t-s)}$ ,  $e^{P(t_1-t)}$ ,  $e^{PT}$ , где  $P$  – матрица (2.4), можно использовать представление  $e^{P\tau}$  в виде

$$e^{P\tau} = \sum_{i=0}^4 \frac{P^i \tau^i}{i!}$$

Отсюда, используя преобразования (3.6)–(3.13), получим, что закон управления

$$\begin{aligned} u = u_p &= \text{col}(u_{p1}, u_{p2}) = \Phi_6(x_{p2}^5, w_p) = \Phi_6(\Psi_2^5(z_{p2}^5), w_p) = \\ &= \text{col}(\Phi_{61}(\Psi_2^5(z_{p2}^5), w_p), \Phi_{62}(\Psi_2^5(z_{p2}^5), w_p)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$(u_{pi} = \Phi_{6i}(\Psi_2^5(z_{p2}^5), w_p), i = 1, 2)$$

где

$$\Psi_2^5(z_{p2}^5) = \text{col}(\Psi_2(z_{p2}), \Psi_3(z_{p2}^3), \dots, \Psi_5(z_{p2}^5))$$

а  $w_p$ ,  $x_p$  определены согласно соотношениям (4.3)–(4.5), переводит модель движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24) из любого начального состояния  $z_p(t_0) = z_{p0} \in \Omega_\Psi$  в произвольное конечное состояние  $z_p(t_1) = z_{p1} \in \Omega_\Psi$ , где  $\Omega_\Psi$  – множество (3.39), за время  $t_1 - t_0 < \infty$  по траектории

$$z = z_p = \Phi(x_p, t) \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.7)$$

Поэтому модель движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24) также управляема.

Теперь покажем, что исходная модель движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) также управляема.

Используя преобразование (1.33), получим, что закон управления

$$u_a = u_{ap} = \Phi_{05}(\hat{z}_{p2}^4, \hat{u}_{ap}) = \Phi_{05}(\Psi_{02}^4(\bar{z}_{p2}^4), \hat{u}_{ap}) \quad (4.8)$$

где согласно (1.34)

$$\begin{aligned} \hat{u}_{ap} &= \text{col}(\hat{u}_{ap1}, \hat{u}_{ap2}) = \hat{U}_a(t_0, \tilde{u}_{ap}(t_0), t, u_p) = \\ &= \text{col}(\tilde{U}_{ap1}(t_0, \tilde{u}_{ap}(t_0), t, u_{p1}), \tilde{U}_{ap2}(u_{p2})) \\ (\hat{u}_{ap1} &= h_1^* \tilde{u}_{ap} = \tilde{u}_{ap1} = \tilde{u}_{ap1}(t) = \hat{u}_{ap1}(t_0) + (t - t_0) \tilde{u}_{ap2}(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^t (t - s) u_{p1}(s) ds \equiv \tilde{U}_{ap1}(t_0, \tilde{u}_{ap}(t_0), t, u_{p1}) \\ \hat{u}_{ap2} &\equiv \tilde{U}_{ap2}(u_{p2}) = u_{p2}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$u_{pi}$  ( $i = 1, 2$ ) – векторы, определяемые согласно соотношениям (4.6), (4.3), (4.4), (4.7), (4.5), переводит исходную модель движения ТР (1.9)–(1.13) из любого начального состояния  $\bar{z}_p(t_0) = \bar{z}_{p0} \in \Omega_{\Psi_0}$  в произвольное конечное состояние  $\bar{z}_p(t_1) = \bar{z}_{p1} \in \Omega_{\Psi_0}$ , где  $\Omega_{\Psi_0}$  – множество (6.39), (6.9), за время  $t_1 - t_0 < \infty$  по траектории

$$\bar{z}_p = \Phi_0(H_2 z_p), \quad z_p \in \Omega_{\Psi}, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (4.10)$$

Поэтому исходная модель движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) также управляема.

**5. Критерии стабилизируемости ПД ТР.** 1°. Рассмотрим сначала задачи синтеза стабилизирующих законов управления  $w$  и анализа устойчивости ПД  $x_p(t)$ , принадлежащего множеству  $\Omega_{\Phi}$  (3.38),  $t \geq t_0$  для канонической модели движения ТР (2.1)–(2.4).

Из вполне управляемости этой модели (выполнения соотношений (4.1), (4.2)) следует ([8], с. 274, теорема 4.1), что существует постоянная  $(2 \times 10)$ -матрица коэффициентов усиления

$$\Gamma_0 = \|\Gamma_{01}, \dots, \Gamma_{05}\| \quad (5.1)$$

где  $\Gamma_{0j}$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) –  $(2 \times 2)$ -блоки, такая, что матрица

$$\Gamma = P + Q\Gamma_0 \quad (5.2)$$

имеет заданные собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ), в частности, например, такие, чтобы матрица  $\Gamma$  была устойчивой (гурвицевой) ([8], с. 597), т.е.  $\text{Re}\lambda_i < 0$  ( $i = 1, \dots, 10$ ). Более того, матрицу  $\Gamma_0$  (5.1) можно выбрать так, что матрица  $\Gamma$  (5.2) будет иметь, например, заданные, различные, вещественные, отрицательные собственные значения, т.е.

$$\lambda_i < 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j; i, j = 1, \dots, 10) \quad (5.3)$$

Синтезируем закон управления с “канонической” обратной связью по  $x$  в виде

$$w = w_p + \Gamma_0(x - x_p) \quad (5.4)$$

Тогда уравнение переходных процессов (ПП)  $e_x = x - x_p$  в замкнутой системе (2.1)–(2.4), (5.4), (5.3) имеет вид

$$\dot{e}_x = \Gamma e_x, \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0 \quad (5.5)$$

Следовательно, ПД  $x_p(t)$  (4.5) системы (2.1)–(2.3), (5.4), (5.1)–(5.3) асимптотически устойчиво в целом с оценкой

$$|e_x(t)| \leq \beta_0 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_0(t-t_0)], \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0 \quad (5.6)$$

причем ПП  $e_x(t)$  имеет заданный апериодический характер затухания (в частности, при  $e_{x0}$ , таких, что  $e_{x0} + x_{p0} = x_0 = x(t_0) \in \Omega_\Phi$ ). Здесь

$$\gamma_0 = \max_i \lambda_i, \quad \lambda_i < 0, \quad i = 1, \dots, 10; \quad \beta_0 = \sum_{i=1}^{10} |\bar{\Gamma}_i| > 0$$

где

$$\bar{\Gamma}_i = \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{10} (\Gamma - \lambda_k I_{10}) \right] \left[ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{10} (\lambda_i - \lambda_k) \right]^{-1}, \quad i = 1, \dots, 10$$

– матрицы – коэффициенты интерполяционного многочлена Лагранжа – Сильвестра

$$e^{\Gamma(t-t_0)} = \sum_{i=1}^{10} \bar{\Gamma}_i \exp[\lambda_i(t-t_0)]$$

([9], с. 49),  $|A| = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$  – евклидова норма (модуль)  $(n \times n)$ -матрицы  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n}$ .

Зададим требуемую точность

$$\varepsilon_{ex} = \mu_0^{-1} \varepsilon_e > 0 \quad (|e_x(t)| \leq \varepsilon_{ex}, \quad \forall t \geq t_p = t_0 + T_p, \quad t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1) \quad (5.7)$$

(где  $0 < \mu_0 < +\infty$  – некоторая постоянная, определенная ниже в соотношениях (5.27), (5.28);  $\varepsilon_e > 0$  – заданная точность стабилизации ПД  $z_p(t)$  (1.39), (1.38) системы (1.25)–(1.28), (1.24), (1.41)) осуществления ПД  $x_p(t)$  (4.5) и заданное время затухания  $T_p = t_p - t_0 > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) ПП  $e_x(t) = x(t) - x_p(t)$ , характеризующее быстродействие системы управления. Тогда из соотношения

$$\varepsilon_{ex} = \beta_0 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_0 T_p] \quad (5.8)$$

можно найти оценку вида

$$T_p = t_p - t_0 = -\frac{1}{\gamma_0} \ln \frac{\beta_0 |e_x(t_0)|}{\varepsilon_{ex}} \quad (5.9)$$

из которой можно получить следующее соотношение:

$$|\gamma_0| \geq \frac{1}{T_p} \ln \frac{\beta_0 |e_x(t_0)|}{\varepsilon_{ex}} \quad (5.10)$$

для обоснованного выбора (за счет матрицы коэффициентов усиления  $\Gamma_0$  (5.1) в законе управления  $w$  (5.4)) собственных чисел  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 10$ ) (5.3) матрицы  $\Gamma$  (5.2).

Таким образом, показано, что ПД  $x_p(t)$  (4.5) канонической модели движения ТР (2.1)–(2.4), замкнутой законом управления  $w$  (5.4), (5.1)–(5.3), (5.10), асимптотически устойчиво в целом с оценкой (5.6) для  $|e_x(t)|$  ПП  $e_x(t) = x(t) - x_p(t)$ , так что обеспечиваются требуемая точность  $\varepsilon_{ex}$  (5.7) и заданное время  $T_p = t_0 - t_p > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) затухания ПП  $e_x(t)$  (т.е. ПД  $x_p(t)$  стабилизируемо в смысле определения, данного в разд. 1).

2°. Ниже при решении задачи синтеза стабилизирующих законов управления  $u$  и  $u_a$  и анализа устойчивости ПД  $z_p(t)$  модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24) и ПД  $\bar{z}_p(t)$  исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) будет использоваться следующая

*Лемма.* Пусть выполнены условия:

1) система ОДУ

$$\dot{e} = \bar{F}_e(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0 \quad (5.11)$$

( $F$  – вектор-функция, заданная на множестве

$$\Omega_{\bar{F}_e} = \{(e, t) : e \in \Omega_e \subset R^n, t \in [t_0, +\infty)\}$$

удовлетворяет условиям существования и единственности решения системы (5.11), причем  $\bar{F}_e(0, t) \equiv 0$ ) непрерывно дифференцируемым преобразованием

$$e = \Delta\Phi(e_x, t) \quad (5.12)$$

(вектор-функция  $\Delta\Phi(e_x, t)$  определена на множестве

$$\Omega_{\Delta\Phi} = \{(e_x, t) : e_x \in \Omega_{e_x} \subset R^n, t \in [t_0, +\infty)\} \quad (5.13)$$

причем

$$|\Delta\Phi(e_x, t)| \leq |\Delta\tilde{\Phi}(e_x)|, \quad (e_x, t) \in \Omega_{\Delta\Phi}, \quad \Delta\Phi(0, t) \equiv 0 \quad (5.14)$$

$\Delta\tilde{\Phi}(e_x)$  – непрерывная вектор-функция,  $\Delta\tilde{\Phi}(0) \equiv 0$ ) приводится к уравнению

$$\dot{e}_x = \bar{F}_{e_x}(e_x, t), \quad e_x(t_0) = e_{x0}, \quad t \geq t_0 \quad (5.15)$$

(вектор-функция  $\bar{F}_{e_x}$  определена на множестве

$$\Omega_{\bar{F}_{e_x}} = \{(e_x, t) : (e_x, t) \in \Omega_{\Delta\Phi}, e = \Delta\Phi(e_x, t) \in \Omega_{\bar{F}_e}\}$$

причем  $\bar{F}_{e_x}(0, t) \equiv 0$ );

2) преобразование (5.12) однозначно разрешимо относительно  $e_x$ , т.е. для него существует единственное обратное преобразование

$$e_x = \Delta\Phi^{-1}(e, t) \equiv \Delta\Psi(e, t) \quad (5.16)$$

где непрерывно дифференцируемая вектор-функция  $\Delta\Psi(e, t)$  определена на множестве

$$\Omega_{\Delta\Psi} = \{(e, t) : e = \Delta\Phi(e_x, t) \in \Omega_{\bar{F}_e}, (e_x, t) \in \Omega_{\Delta\Phi}\} \quad (5.17)$$

причем

$$|\Delta\Psi(e, t)| \leq |\Delta\tilde{\Psi}(e)|, \quad (e, t) \in \Omega_{\Delta\Psi}, \quad \Delta\Psi(0, t) \equiv 0 \quad (5.18)$$

$\Delta\tilde{\Psi}(e)$  – непрерывная вектор-функция,  $\Delta\tilde{\Psi}(0) \equiv 0$ .

При указанных условиях решение  $e = 0$  уравнения (5.11) асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда соответствующее решение  $e_x = 0$  уравнения (5.15) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

*Доказательство.* Покажем, что из асимптотической устойчивости по Ляпунову решения  $e_x = 0$  системы (5.15) вытекает асимптотическая устойчивость по Ляпунову решения  $e = 0$  системы (5.11).

С этой целью покажем сначала, что из устойчивости по Ляпунову решения  $e_x = 0$  системы (5.15) следует устойчивость по Ляпунову решения  $e = 0$  системы (5.11).

Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Поскольку (согласно первому условию леммы) из оценки (5.14) и непрерывности вектор-функции  $\Delta\tilde{\Phi}(e_x)$  следует, что вектор-функция  $\Delta\Phi(e_x, t)$  непрерывна по  $e_x$  при  $e_x = 0$  равномерно относительно  $t \in [t_0, \infty)$ , то по данному  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, чтобы

$$|e_x| < \varepsilon_0 \Rightarrow |e| = |\Delta\Phi(e_x, t)| \leq |\Delta\tilde{\Phi}(e_x)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (5.19)$$

где  $e_x = e_x(e_{x0}, t)$ ,  $e = e(e_0, t)$ .

Далее, поскольку решение  $e_x = 0$  системы (5.15) устойчиво по Ляпунову, то по  $\varepsilon_0 > 0$  можно указать  $\delta_0 > 0$ , такое, что

$$|e_{x0}| < \delta_0 \Rightarrow |e_x(e_{x0}, t)| < \varepsilon_0, \quad t \in [t_0, \infty) \quad (5.20)$$

Рассмотрим вектор-функцию  $\Delta\Psi(e, t)$ . Используя непрерывность по  $e$  при  $e = 0$  вектор-функции  $\Delta\Psi(e, t_0)$ , по  $\delta_0 > 0$  найдем  $\delta > 0$ , такое, чтобы

$$|e_0| < \delta \Rightarrow |e_{x0}| = |\Delta\Psi(e_0, t_0)| < \delta_0 \quad (5.21)$$

Учитывая неравенства (5.19)–(5.21), получим

$$|e_0| < \delta \Rightarrow |e_{x0}| < \delta_0 \Rightarrow |e_x(e_{x0}, t)| < \varepsilon_0 \Rightarrow |e(e_0, t)| < \varepsilon, \quad t \geq t_0$$

Следовательно, из устойчивости по Ляпунову решения  $e_x = 0$  системы (5.15) вытекает устойчивость по Ляпунову решения  $e = 0$  системы (5.11).

Далее, из асимптотической устойчивости по Ляпунову решения  $e_x = 0$  системы (5.15) и из непрерывности вектор-функции  $\Delta\tilde{\Phi}(e_x)$  и соотношения (5.14) следует, что

$$|e_x(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow |\Delta\tilde{\Phi}(e_x(t))| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow |\Delta\Phi(e_x(t), t)| = |e(t)| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

Следовательно, решение  $e = 0$  системы (5.11) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Аналогично (с использованием второго условия леммы и из непрерывности вектор-функции  $\Delta\tilde{\Psi}(e_x)$  и соотношения (5.18)) доказываем, что из асимптотической устойчивости по Ляпунову решения  $e = 0$  системы (5.11) вытекает асимптотическая устойчивость по Ляпунову решения  $e_x = 0$  системы (5.15). Лемма доказана.

3°. Перейдем к синтезу стабилизирующего закона управления  $u$  с обратной связью по  $z$  для модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24).

Будем считать, что ПД

$$z_p(t) \in \Omega_{z_p}, \quad t \geq t_0 \quad (5.22)$$

где множество

$$\begin{aligned} \Omega_{z_p} = \{z_p = \text{col}(z_{p1}, \dots, z_{p5}) \in R^{10} : z_{p1} \in R^2, z_{p2} \in \Omega_{\Psi_2}; \\ \sup_{t \geq t_0} |z_{pik}(t)| = k_{z_{pik}} < \infty \quad (i = 3, 4, 5; k = 1, 2)\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$\Omega_{\Psi_2}$  – множество (3.22),  $k_{z_{pik}} \geq 0$  ( $i = 3, 4, 5; k = 1, 2$ ) – некоторые постоянные.

Подставляя соотношения (5.4), (5.1)–(5.3), (5.10) в (3.33) и используя преобразования координат пространства состояний (3.3) – (3.4), (3.6)–(3.11), получим искомым стабилизирующий закон управления с обратной связью по  $z$  вида

$$\begin{aligned} u = \text{col}(u_1, u_2) &= \Phi_6(x_2^5, w_p + \Gamma_0(x - x_p)) = \\ &= \Phi_6(\Psi_2^5(z_2^5), w_p + \Gamma_0(\Psi(z) - \Psi(z_p))) \equiv \bar{\Phi}_6(\Gamma_0, t, z) = \\ &= \text{col}(\bar{\Phi}_{61}(\Gamma_0, t, z), \bar{\Phi}_{62}(\Gamma_0, t, z)) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$(u_i = \bar{\Phi}_{6i}(\Gamma_0, t, z) = h_i^* \Phi_6(\Psi_2^5(z_2^5), w_p + \Gamma_0(\Psi(z) - \Psi(z_p))), \quad i = 1, 2)$$

где  $h_1 = \text{col}(1, 0)$ ,  $h_2 = \text{col}(0, 1)$  – двумерные векторы, для модели движения ГР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24).

Уравнение ПП  $e = z - z_p$  в замкнутой модели движения ГР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24), (5.24), (5.1)–(5.3), (5.10) имеет вид

$$\dot{e} = F_e(e, t), \quad e(t_0) = e_0, \quad t \geq t_0 \quad (5.25)$$

где

$$F_e(e, t) = F(e + z_p, \Phi_6(\Psi_2^5(e_2^5 + z_{p2}^5), w_p + \Gamma_0(\Psi(e + z_p) - \Psi(z_p)))) - F(z_p, u_p) \quad (5.26)$$

$e_0 + z_{p0} = z_0 \in \Omega_\Psi$ ,  $\Omega_\Psi$  – множество (3.39),  $F_e(0, t) \equiv 0$ .

Оценим ПП  $e$  в соотношениях (5.25), (5.26). Используя формулу для конечных приращений вектор-функции ([10], с. 122, лемма 3.1)  $\Delta\Phi(e_x, t) = \Phi(e_x + x_p) - \Phi(x_p)$ , соотношения (5.22), (5.23), (3.38), (3.39), (3.22), (3.27), оценку (5.6) для  $|e_x(t)|$  вектора  $e_x(t)$ , оценку

$$|A| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

для модуля  $|A|$  ( $n \times m$ )-матрицы  $A$ , оценим модуль  $|e|$  вектора  $e = z - z_p$ . Получим

$$\begin{aligned} |e(t)| &= |z(t) - z_p(t)| = |\Phi(e_x + x_p) - \Phi(x_p)| = |\Delta\Phi(e_x, t)| = \\ &= \left| \int_0^1 J_{\Delta\Phi}(se_x(t), t) ds \right| e_x(t) \leq \left| \int_0^1 J_{\Delta\Phi}(se_x(t), t) ds \right| |e_x(t)| \leq \\ &\leq \mu_0 |e_x(t)| \equiv \Delta\tilde{\Phi}_0(e_x(t)) \leq \mu_0 \beta_0 |e_x(t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)] = \\ &= \mu |\Delta\Psi(e_0, t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)], \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned} e(t_0) + z_p(t_0) &= z(t_0) = z_0 \in \Omega_\Psi \\ J_{\Delta\Phi}(e_x, t) &= \partial\Delta\Phi(e_x, t)/(\partial e_x) \\ \sup_{\sigma_x \in [0, e_x], t \geq t_0} |J_{\Delta\Phi}(\sigma_x, t)| &= \mu_0 < +\infty \\ [0, e_x] &= \{\eta_{e_x} : \eta_{e_x} = se_x, e_x + x_p = x \in \Omega_\Phi, 0 \leq s \leq 1\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$0 < \mu_0 < +\infty$  – некоторая постоянная,  $\mu = \mu_0 \beta_0$ ,  $\Delta\tilde{\Phi}_0(0) \equiv 0$ .

Из соотношений (5.27), (5.28) вытекает, что имеет место оценка

$$\begin{aligned} |\Delta\Phi(e_x(t), t)| &\leq \Delta\tilde{\Phi}_0(e_x(t)) \equiv \mu_0 |e_x(t)| \\ e_x(t_0) + x_p(t_0) &= x(t_0) = x_0 \in \Omega_\Phi, \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

из которой следует, что вектор-функция  $\Delta\Phi(e_x, t)$  непрерывна по  $e_x$  при  $e_x = 0$  равномерно относительно  $t \in [t_0, \infty)$ , причем  $\Delta\Phi(0, t) \equiv 0$  и, следовательно, выполнено первое условие леммы.

Отсюда и из непрерывности вектор-функции  $\Delta\Psi(e, t) = \Psi(e + z_p) - \Psi(z_p)$ , где  $\Psi$  – вектор-функция (3.3), (3.4), (3.6)–(3.13), и поскольку решение  $e_x = 0$  системы (5.5), (5.2), (5.3) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то согласно приведенной выше лемме решение  $e = 0$  системы (5.25), (5.26), (5.2), (5.3) также асимптотически устой-

чиво по Ляпунову и с учетом (5.6)–(5.10), (5.2), (5.3), (5.1) следует, что для модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24), замкнутой законом управления  $u$  (5.24), (5.1)–(5.3), (5.10), обеспечиваются заданные точность  $\varepsilon_e > 0$  осуществления ПД  $z_p(t)$  (5.22), (5.23) и время затухания  $T_p = t_p - t_0 > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) ПП  $e = z - z_p$ , так, что выполнена оценка (1.42).

Таким образом, показано, что имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть для модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (1.24) задано (построено) ПД  $z_p(t)$  (5.22), (5.23).

Тогда стабилизирующий закон управления  $u$  (5.24), (5.1)–(5.3), (5.10) с обратной связью по  $z$  обеспечивает асимптотическую устойчивость ПД  $z_p(t)$  (5.22), (5.23) и для ПП  $e(t) = z(t) - z_p(t)$  в замкнутой модели движения ТР специального вида (1.25)–(1.28), (5.24), (5.1)–(5.3), (5.10) имеет место оценка (5.27), (5.28) и обеспечиваются заданные точность  $\varepsilon_e > 0$  осуществления ПД  $z_p(t)$  (5.22), (5.23) и время затухания  $T_p = t_p - t_0 > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) ПП  $e = z - z_p$ , так что выполнена оценка (1.42).

4°. Рассмотрим теперь задачу синтеза стабилизирующего закона управления  $u_a$  и анализа устойчивости ПД

$$\bar{z}_p = \bar{z}_p(t) \in \Omega_{\bar{z}_p}, \quad t \geq t_0 \quad (5.29)$$

где множество

$$\Omega_{\bar{z}_p} = \{ \bar{z}_p \in R^8 : \bar{z}_p = \Phi_0(H_2 z_p), z_p \in \Omega_{z_p} \} \quad (5.30)$$

для исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8).

Подставляя закон управления  $u$  (5.24), (5.1)–(5.3), (5.10) в (1.33), (1.34), с учетом оценки (5.27), (5.28) для  $|e(t)|$  решения  $e(t) = z(t) - z_p(t)$  системы (5.25), (5.26), вытекающей из доказанной выше теоремы 1, получим стабилизирующий закон изменения вектора управляющих напряжений

$$u_a = \Phi_{05}(\Psi_{02}^4(\bar{z}_2^4), \hat{U}_a(t_0, \tilde{u}_a(t_0), t, \bar{\Phi}_6(\Gamma_0, t, z))) \quad (5.31)$$

подаваемых на якорные цепи ДПТ, обеспечивающих асимптотическую устойчивость ПД  $\bar{z}_p$  (5.29), (5.30) с оценкой  $|\bar{e}(t)|$  ПП

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \bar{z} - \bar{z}_p = \Phi_0(\hat{e} + \hat{z}_p) - \Phi_0(\hat{z}_p) \equiv \Delta\Phi_0(\hat{e}, t) = \\ &= \Phi_0(H_2(e + z_p)) - \Phi_0(H_2 z_p) \equiv \Delta\Phi_0(e, t) \end{aligned} \quad (5.32)$$

(указанной ниже в (5.39), (5.40)), где вектор

$$\hat{z}_p = \hat{z}_p(t) = H_2 z_p(t), \quad z_p(t) \in \Omega_{z_p}, \quad t \geq t_0 \quad (5.33)$$

в замкнутой исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (5.31), (5.1)–(5.3), (5.10).

Сначала отметим, что поскольку решение  $e = 0$  системы (5.25), (5.26), (5.2), (5.3), (5.10) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то и решение  $\hat{e} = 0$  ( $\hat{e} = H_2 e$  и  $\dot{\hat{e}} = H_2 \dot{e} = 0$  при  $e = 0$ ) системы

$$\dot{\hat{e}} = \hat{F}_e(\hat{e}, t), \quad \hat{e}(t_0) = \hat{e}_0, \quad \hat{e}_0(t_0) + \hat{z}_p(t_0) = \hat{z}(t_0) = \hat{z}_0 \in \Omega_{\hat{z}}, \quad t \geq t_0 \quad (5.34)$$

при учете соотношений (5.2), (5.3), где

$$\hat{F}_e(\hat{e}, t) = H_2 F_e(e, t) = H_2 F_e(H_1 \hat{e} + H_0 \Delta \tilde{u}_a, t), \quad \Delta \tilde{u}_a = \tilde{u}_a - \tilde{u}_{ap} \quad (5.35)$$

также асимптотически устойчиво по Ляпунову с оценкой  $|\hat{e}(t)|$  ПП  $\hat{e}(t) = \hat{z}(t) - \hat{z}_p(t)$  вида

$$\begin{aligned} |\hat{e}(t)| &= |H_2 e(t)| \leq |H_2| |e(t)| \leq |H_2| \mu |\Delta\Psi(e_0, t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)] = \\ &= \hat{\mu} |\Delta\Psi(H_1 \hat{e}_0 + H_0 \Delta\tilde{u}_{a0}, t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)], \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

где

$$\hat{\mu} = |H_2| \mu, \quad \hat{e}(t_0) + \hat{z}_p(t_0) = \hat{z}(t_0) = \hat{z}_0 \in \Omega_\Psi$$

$$\Delta\tilde{u}_{a0} = \Delta\tilde{u}_a(t_0) = \tilde{u}_a(t_0) - \tilde{u}_{ap}(t_0)$$

и (при учете неравенства (5.10)) обеспечиваются требуемая точность

$$\hat{\varepsilon}_e = |H_2| \varepsilon_e > 0 \quad (5.37)$$

(где  $\varepsilon_e > 0$  – заданная точность стабилизации ПД  $z_p(t)$  (1.39), (1.38) системы (1.25)–(1.28), (1.24), (1.41)) осуществления ПД  $\hat{z}_p(t)$  (5.33) и заданное время затухания  $T_p = t_p - t_0 > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) ПП  $\hat{e} = \hat{z} - \hat{z}_p = H_2 e$ , так, что выполнена оценка

$$|\hat{e}(t)| \leq \hat{\varepsilon}_e, \quad \forall t \geq t_p = t_0 + T_p, \quad t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1 \quad (5.38)$$

Далее (аналогично, доказательству теоремы 1), используя формулу для конечных приращений вектор-функции  $\Delta\Phi_0(\hat{e}, t) = \Phi_0(\hat{e} + \hat{z}_p) - \Phi_0(\hat{z}_p)$  и соотношения (5.27), (5.28), (5.36), оценим модуль  $|\bar{e}|$  вектора  $\bar{e} = \bar{z} - \bar{z}_p$  (5.32). Получим

$$\begin{aligned} |\bar{e}| &= |\bar{z} - \bar{z}_p| = |\Phi_0(\hat{e} + \hat{z}_p) - \Phi_0(\hat{z}_p)| = |\Delta\Phi_0(\hat{e}, t)| = \\ &= \left| \int_0^1 J_{\Delta\Phi_0}(s\hat{e}(t), t) ds \right| |\hat{e}(t)| \leq \left| \int_0^1 J_{\Delta\Phi_0}(s\hat{e}(t), t) ds \right| |\hat{e}(t)| \leq \hat{\mu}_0 |\hat{e}(t)| \equiv \\ &\equiv \Delta\hat{\Phi}_0(\hat{e}(t)) \leq \hat{\mu}_0 \hat{\mu} |\Delta\Psi(H_1 \hat{e}_0, t_0) + H_0 \Delta\tilde{u}_{a0}, t_0| \exp[\gamma_0(t - t_0)] = \\ &= \beta |\Delta\Psi(H_1 \Delta\Psi_0(\bar{e}_0, t_0) + H_0 \Delta\tilde{u}_{a0}, t_0)| \exp[\gamma_0(t - t_0)], \quad t \geq t_0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

где

$$\bar{e}_0(t_0) + \bar{z}_p(t_0) = \bar{z}(t_0) = \bar{z}_0 \in \Omega_{\bar{\Psi}}, \quad J_{\Delta\Phi_0}(\hat{e}, t) = \partial\Delta\Phi_0(\hat{e}, t)/(\partial\hat{e})$$

$$\sup_{\hat{e}_e \in [0, \hat{e}], t \geq t_0} |J_{\Delta\Phi_0}(\hat{e}_e, t)| = \hat{\mu}_0 < +\infty \quad (5.40)$$

$$[0, e] = \{\hat{\eta}_e : \hat{\eta}_e = s\hat{e}, \hat{e} + \hat{z}_p = \hat{z} \in \Omega_{\bar{\Psi}}, 0 \leq s \leq 1\}$$

$$\beta = \hat{\mu}_0 \hat{\mu}, \quad \Delta\hat{\Phi}_0(0) \equiv 0, \quad \Delta\tilde{u}_{a0} = \Delta\tilde{u}_a(t_0) = \tilde{u}_a(t_0) - \tilde{u}_{ap}(t_0)$$

$0 < \hat{\mu}_0 < +\infty$  – некоторая постоянная.

Из соотношений (5.39), (5.40) вытекает оценка

$$|\bar{e}(t)| = |\Delta\Phi_0(\hat{e}(t), t)| \leq \Delta\hat{\Phi}_0(\hat{e}(t)) \equiv \hat{\mu}_0 |\hat{e}(t)|, \quad t \geq t_0$$

из которой следует, что вектор-функция  $\Delta\Phi_0(\hat{e}, t)$  непрерывна по  $\hat{e}$  при  $\hat{e} = 0$  равномерно относительно  $t \in [t_0, \infty)$ , причем  $\Delta\Phi_0(0, t) \equiv 0$ , и следовательно, выполнено первое условие указанной выше леммы.

Отсюда и из непрерывности вектор-функции  $\Delta\Psi_0(\bar{e}, t) = \Psi_0(\bar{e} + \bar{z}_p) - \Psi_0(\bar{z}_p)$ , где вектор-функция  $\Psi_0(\bar{z})$  вида (1.16), (6.37), и поскольку решение  $\hat{e} = 0$  системы (5.34), (5.35), (5.2), (5.3), (5.10) асимптотически устойчиво по Ляпунову, то согласно той же лемме решение  $\bar{e} = 0$  ( $\bar{e} = \Delta\Phi_0(\hat{e}, t)$  и  $\bar{e} = \Delta\Phi_0(0, t) = 0$ ) системы

$$\dot{\bar{e}} = \bar{F}_e(\bar{e}, t), \quad \bar{e}(t_0) = \bar{e}_0, \quad \bar{e}_0(t_0) + \bar{z}_p(t_0) = \bar{z}(t_0) = \bar{z}_0 \in \Omega_{\bar{\Psi}}, \quad t \geq t_0 \quad (5.41)$$

при учете соотношений (5.2), (5.3), где

$$\begin{aligned} \bar{F}_e(\bar{e}, t) &= (\Delta\Phi_0(\hat{e}, t))'|_{\hat{e} = \Delta\Psi_0(\bar{e}, t)} = J_{\Delta\Phi_0 t}(\Delta\Psi_0(\bar{e}, t), t) + \\ &+ J_{\Delta\Phi_0 \hat{e}}(\Delta\Psi_0(\bar{e}, t), t) \cdot \hat{F}_e(\Delta\Psi_0(\bar{e}, t), t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$J_{\Delta\Phi_0 t}(\hat{e}, t) = \frac{\partial \Delta\Phi_0(\hat{e}, t)}{\partial t}, \quad J_{\Delta\Phi_0 \hat{e}}(\hat{e}, t) = \frac{\partial \Delta\Phi_0(\hat{e}, t)}{\partial \hat{e}}$$

также асимптотически устойчиво по Ляпунову и (при учете неравенства (5.10)) обеспечиваются заданные точность

$$\bar{\epsilon}_e = \hat{\mu}_0 \hat{\epsilon}_e > 0 \quad (5.43)$$

(где  $\hat{\epsilon}_e$  (5.37) – требуемая точность стабилизации ПД  $\hat{z}_p(t)$  (5.33) модели динамики ТР специального вида (1.20)–(1.24), (1.15), (6.32), замкнутой законом управления  $\hat{u}_a$  (6.35), (5.31), (5.1)–(5.3), (5.10)) осуществления ПД  $\bar{z}(t)$  (5.29), (5.30) и время затухания  $T_p = t_p - t_0 > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) ПП  $\bar{e} = \bar{z} - \bar{z}_p$ , так что выполнена оценка

$$|\bar{e}(t)| \leq \bar{\epsilon}_e, \quad \forall t \geq t_p = t_0 + T_p, \quad t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1 \quad (5.44)$$

Таким образом, показано, что имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть для исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) задано (построено) ПД  $\bar{z}_p(t)$  (5.29), (5.30).

Тогда стабилизирующий закон управления  $u_a$  (5.31), (5.1)–(5.3), (5.10) обеспечивает асимптотическую устойчивость ПД  $\bar{z}_p(t)$  (5.29), (5.30) и для  $|\bar{e}(t)|$  ПП  $\bar{e}(t) = \bar{z}(t) - \bar{z}_p(t)$  в замкнутой исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (5.31), (5.1)–(5.3), (5.10) имеет место оценка (5.39), (5.40) и обеспечиваются заданные точность  $\bar{\epsilon}_e$  (5.43) осуществления ПД  $\bar{z}_p(t)$  (5.29), (5.30) и время затухания  $T_p = t_p - t_0 > 0$  ( $t_0 < t_p = t_0 + T_p < t_1$ ) ПП  $\bar{e}(t) = \bar{z}(t) - \bar{z}_p(t)$ , так что выполнена оценка (5.44).

Отметим, что для нахождения указанных выше оценок для  $|e(t)|$  (5.27), (5.28) и  $|\bar{e}(t)|$  (5.39), (5.40) соответственно решений  $e(t)$  и  $\bar{e}(t)$  систем (5.25), (5.26) и (5.41), (5.42) можно также использовать методику, описанную ранее ([11] с. 921–928).

**6. Приложение.** Сначала сделаем в уравнениях исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) нелинейные взаимно однозначные непрерывно дифференцируемые преобразования координат пространства состояний  $\bar{z}$  (1.10) и

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \text{col}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4) \\ (\tilde{z}_1 &= \text{col}(x_B, y_B), \quad \tilde{z}_2 = \bar{z}_2 = \text{col}(\psi_c, \theta), \quad \tilde{z}_3 = \tilde{z}_2 = \bar{z}_3 = \text{col}(\psi_c, \dot{\theta}), \quad \tilde{z}_4 = \tilde{I}_a) \end{aligned} \quad (6.1)$$

и управлений  $u_a$  (1.8) и

$$\bar{u}_a = \text{col}(\bar{u}_{a1}, \bar{u}_{a2}) \quad (6.2)$$

по формулам

$$\bar{z} = \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad \bar{z} \in \Omega_{\bar{\Psi}} \quad (6.3)$$

$$\bar{z} = \bar{\Psi}^{-1}(\bar{z}) \equiv \bar{\Phi}(\bar{z}), \quad \bar{z} \in \Omega_{\bar{\Phi}} \quad (6.4)$$

и

$$\bar{u}_a = \bar{\Psi}_5(\bar{z}_{22}^4, u_a) \quad (6.5)$$

$$u_a = \bar{\Psi}_5^{-1}(\bar{z}_{22}^4, \bar{u}_a) = \bar{\Psi}_5^{-1}(\bar{\Phi}_{22}^4(\bar{z}_{22}^4), \bar{u}_a) \equiv \bar{\Phi}_5(\bar{z}_{22}^4, \bar{u}_a) \quad (6.6)$$

соответственно, где

$$\bar{z}_{22}^4 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3, \bar{z}_4), \quad \bar{z}_{22}^4 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$$

Здесь

$$\bar{\Phi}_{22}^4(\bar{z}_{22}^4) = \text{col}(\bar{\Phi}_{22}(\bar{z}_{22}), \bar{\Phi}_3(\bar{z}_3), \bar{\Phi}_4(\bar{z}_{22}^4)), \quad \bar{\Phi}_2(\bar{z}_2) = \text{col}(\bar{\Phi}_{21}(\bar{z}_{21}), \bar{\Phi}_{22}(\bar{z}_{22})) \quad (6.7)$$

$$\bar{\Psi}(\bar{z}) = \text{col}(\bar{\Psi}_1(\bar{z}_1, \bar{z}_{21}), \bar{\Psi}_2(\bar{z}_2), \bar{\Psi}_3(\bar{z}_3), \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4))$$

$$(\bar{\Psi}_1(\bar{z}_1, \bar{z}_{21}) = \text{col}(\bar{z}_{11} - l_2 \cos \bar{z}_{21}, \bar{z}_{12} - l_2 \sin \bar{z}_{21}))$$

$$\bar{\Psi}_2(\bar{z}_2) = \bar{z}_2, \quad \bar{\Psi}_3(\bar{z}_3) = \dot{\bar{\Psi}}_2(\bar{z}_2) = \dot{\bar{z}}_2 = \bar{z}_3$$

$$\bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4) = \dot{\bar{\Psi}}_3(\bar{z}_3) = \dot{\bar{z}}_3 = \bar{F}_3(\bar{z}_{22}^4) =$$

$$= \bar{C}_3(\bar{z}_{22}^3) + \bar{D}_3(\bar{z}_{22})\bar{z}_4 = \bar{K}_4(\bar{z}_{22}^3) + \bar{L}_4(\bar{z}_{22})\bar{z}_4$$

$$\bar{K}_4(\bar{z}_{22}^3) = \bar{C}_3(\bar{z}_{22}^3), \quad \bar{L}_4(\bar{z}_{22}) = \bar{D}_3(\bar{z}_{22}), \quad \bar{z}_{22}^3 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3) \quad (6.8)$$

$$\bar{\Phi}(\bar{z}) = \text{col}(\bar{\Phi}_1(\bar{z}_1, \bar{z}_{21}), \bar{\Phi}_2(\bar{z}_2), \bar{\Phi}_3(\bar{z}_3), \bar{\Phi}_4(\bar{z}_{22}^4))$$

$$(\bar{\Phi}_1(\bar{z}_1, \bar{z}_{21}) = \text{col}(\bar{z}_{11} + l_2 \cos \bar{z}_{21}, \bar{z}_{12} + l_2 \sin \bar{z}_{21}))$$

$$\bar{\Phi}_2(\bar{z}_2) = \bar{z}_2, \quad \bar{\Phi}_3(\bar{z}_3) = \bar{z}_3, \quad \bar{\Phi}_4(\bar{z}_{22}^4) = \bar{M}_4(\bar{z}_{22}^3) + \bar{N}_4(\bar{z}_{22})\bar{z}_4$$

$$\bar{M}_4(\bar{z}_{22}^3) = -\bar{N}_4(\bar{z}_{22})\bar{K}_4(\bar{z}_{22}^3), \quad \bar{N}_4(\bar{z}_{22}) = \bar{L}_4^{-1}(\bar{z}_{22})$$

$$\bar{z}_{22}^3 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3) = \bar{z}_{22}^3, \quad \bar{z}_{22} = \bar{z}_{22}, \quad \bar{z}_3 = \bar{z}_3$$

– вектор-функции, заданные соответственно на множествах

$$\Omega_{\bar{\Psi}} = \begin{cases} \Omega_{\bar{\Psi}}^+, & \text{если } \theta \in \Omega_{\theta}^+ = \{\theta \in R^1 : 0 < \varepsilon_{\theta} < \theta < \pi/2 - \varepsilon_{\theta}\} \\ \Omega_{\bar{\Psi}}^-, & \text{если } \theta \in \Omega_{\theta}^- = \{\theta \in R^1 : -\pi/2 + \varepsilon_{\theta} < \theta < -\varepsilon_{\theta} < 0\} \end{cases} \quad (6.9)$$

где  $\varepsilon_{\theta} > 0$  – некоторое вещественное число; множества

$$\Omega_{\bar{\Psi}}^{\pm} = \{\bar{z} = \text{col}(x_c, y_c, \psi_c, \theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}, I_a) \in R^8 : \theta \in \Omega_{\theta}^{\pm}\} \quad (6.10)$$

$$\Omega_{\bar{\Phi}} = \{\bar{z} = \text{col}(x_B, y_B, \psi_c, \theta, \dot{\psi}_c, \dot{\theta}, \tilde{I}_a) = \bar{\Psi}(\bar{z}) \in R^8 : \bar{z} \in \Omega_{\bar{\Psi}}\}$$

а вектор-функции

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_5(\bar{z}_{22}^4, u_a) = \dot{\bar{\Psi}}_4(\bar{z}_{22}^4) &= \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_{22}} \bar{z}_{32} + \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_3} \bar{F}_3(\bar{z}_{22}^4) + \\ &+ \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_4} \bar{F}_4(\bar{z}_{22}^4, u_a) = \bar{K}_5(\bar{z}_{22}^4) + \bar{L}_5(\bar{z}_{22}^4) u_a \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} (\bar{K}_5(\bar{z}_{22}^4) &= \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_{22}} \bar{z}_{32} + \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_3} \bar{F}_3(\bar{z}_{22}^4) + \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_4} \bar{C}_4(\bar{z}_{22}^4) \\ \bar{L}_5(\bar{z}_{22}^4) &= \frac{\partial \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)}{\partial \bar{z}_4} \bar{D}_4 = \bar{L}_4(\bar{z}_{22}^4) \bar{D}_4) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\bar{\Phi}_5(\bar{z}_{22}^4, \bar{u}_a) = \bar{M}_5(\bar{z}_{22}^4) + \bar{N}_5(\bar{z}_{22}^4) \bar{u}_a$$

$$(\bar{M}_5(\bar{z}_{22}^4) = -\bar{N}_5(\bar{z}_{22}^4) \bar{K}_5(\bar{\Phi}_{22}^4(\bar{z}_{22}^4)), \bar{N}_5(\bar{z}_{22}^4) = \bar{L}_5^{-1}(\bar{z}_{22}^4))$$

заданы соответственно на множествах

$$\Omega_{\bar{\Psi}_5} = \{(\bar{z}_{22}^4, u_a) : \bar{z}_{22}^4 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3, \bar{z}_4) = \text{col}(\theta, \psi_c, \dot{\theta}, I_a) \in \Omega_{\bar{\Psi}}, u_a \in R^2\} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\bar{\Phi}_5} &= \{(\bar{z}_{22}^4, \bar{u}_a) : \bar{z}_{22}^4 = \text{col}(\bar{z}_{22}, \bar{z}_3, \bar{z}_4) = \\ &= \text{col}(\theta, \psi_c, \dot{\theta}, \tilde{I}_a) \in \Omega_{\bar{\Phi}}, \bar{u}_a = \bar{\Psi}_5(\bar{z}_{22}^4, u_a) \in R^2, (\bar{z}_{22}^4, u_a) \in \Omega_{\bar{\Psi}_5}\} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Тогда уравнения исходной модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) (после указанных выше преобразований (6.3)–(6.14)) можно записать в виде системы нелинейных ОДУ

$$\dot{\bar{z}} = \bar{F}(\bar{z}, \bar{u}_a), \quad \bar{z}_0 = \bar{z}(t_0), \quad t \geq t_0 \quad (6.15)$$

где  $\bar{z}$  – вектор состояния (1.14) системы,

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{z}, \bar{u}_a) &= J_{\bar{\Psi}}(\bar{\Phi}(\bar{z})) \cdot \bar{F}(\bar{\Phi}(\bar{z}), \bar{\Phi}_5(\bar{z}_{22}^4, \bar{u}_a)) = \\ &= \text{col}(\tilde{F}_1(\bar{z}_2, \bar{z}_{31}), \tilde{F}_2(\bar{z}_3), \tilde{F}_3(\bar{z}_4), \tilde{F}_4(\bar{u}_a)), \quad J_{\bar{\Psi}}(\bar{z}) = \partial \bar{\Psi}(\bar{z}) / (\partial \bar{z}) \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\bar{z}_2, \bar{z}_{31}) &= \text{col}(\bar{z}_{31} l \text{ctg} \bar{z}_{22} \cos \bar{z}_{21}, \bar{z}_{31} l \text{ctg} \bar{z}_{22} \sin \bar{z}_{21}) \\ \tilde{F}_2(\bar{z}_3) &= \bar{z}_3, \quad \tilde{F}_3(\bar{z}_4) = \bar{z}_4, \quad \tilde{F}_4(\bar{u}_a) = \bar{u}_a \end{aligned} \quad (6.17)$$

– вектор-функции.

Затем сделаем в системе (6.15), (6.16), (6.17), (6.1), (6.2) нелинейные взаимно однозначные непрерывно дифференцируемые преобразования координат пространства состояний  $\bar{z}$  (6.1) и

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \text{col}(\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4) \quad (\hat{z}_1 = \text{col}(x_B, y_B)) \\ \hat{z}_2 &= \text{col}(\psi_c, \kappa_B), \quad \hat{z}_3 = \text{col}(V_B, \dot{\kappa}_B), \quad \hat{z}_4 = \hat{I}_a \end{aligned} \quad (6.18)$$

и управлений  $\bar{u}_a$  (6.2) и

$$\hat{u}_a = \text{col}(\hat{u}_{a1}, \hat{u}_{a2}) \quad (6.19)$$

по формулам

$$\hat{z} = \hat{\Psi}(\tilde{z}), \quad \tilde{z} \in \Omega_{\Psi} \quad (6.20)$$

$$\tilde{z} = \hat{\Psi}^{-1}(\hat{z}) \equiv \hat{\Phi}(\hat{z}), \quad \hat{z} \in \Omega_{\Phi} \quad (6.21)$$

и

$$\hat{u}_a = \hat{\Psi}_5(\tilde{z}_{22}^4, \bar{u}_a) \quad (6.22)$$

$$\bar{u}_a = \hat{\Psi}_5^{-1}(\tilde{z}_2^4, \hat{u}_a) = \hat{\Psi}_5^{-1}(\hat{\Phi}_{22}^4(\hat{z}_{22}^4), \hat{u}_a) = \hat{\Phi}_5(\hat{z}_{22}^4, \hat{u}_a) \quad (6.23)$$

соответственно, где  $\hat{z}_{22}^4 = \text{col}(\hat{z}_{22}, \hat{z}_3, \hat{z}_4)$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\tilde{z}) &= \text{col}(\hat{\Psi}_1(\tilde{z}_1), \hat{\Psi}_2(\tilde{z}_2), \hat{\Psi}_3(\tilde{z}_{22}, \tilde{z}_3), \hat{\Psi}_4(\tilde{z}_{22}^4)) \\ (\hat{\Psi}_1(\tilde{z}_1) &= \tilde{z}_1, \quad \hat{\Psi}_2(\tilde{z}_2) = \text{col}(\tilde{z}_{21}, l^{-1} \text{ctg} \tilde{z}_{22}) \\ \hat{\Psi}_3(\tilde{z}_{22}^4) &= \text{col}(\hat{\Psi}_{31}(\tilde{z}_{22}^{31}), \hat{\Psi}_{32}(\tilde{z}_{22}, \tilde{z}_{32})) \\ \hat{\Psi}_{31}(\tilde{z}_{22}^{31}) &= \tilde{z}_{31} l \text{ctg} \tilde{z}_{22} \\ \hat{\Psi}_{32}(\tilde{z}_{22}, \tilde{z}_{32}) &= l^{-1} (1 + \text{ctg}^2 \tilde{z}_{22}) \tilde{z}_{32} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\hat{\Psi}_4(\tilde{z}_{22}^4) = \hat{\Psi}_3(\tilde{z}_{22}, \tilde{z}_3) = \hat{K}_4(\tilde{z}_{22}^3) + \hat{L}_4(\tilde{z}_{22}) \tilde{z}_4$$

$$\hat{K}_4(\tilde{z}_{22}^3) = \frac{\partial \hat{\Psi}_3(\tilde{z}_{22}^3)}{\partial \tilde{z}_{22}} \tilde{z}_{32} = \left\| \begin{array}{l} \frac{l}{\sin^2 \tilde{z}_{22}} \tilde{z}_{31} \\ 2 \text{tg} \tilde{z}_{22} \\ l \cos^2 \tilde{z}_{22} \end{array} \right\| \tilde{z}_{32}$$

$$\hat{L}_4(\tilde{z}_{22}) = \frac{\partial \hat{\Psi}_3(\tilde{z}_{22}^3)}{\partial \tilde{z}_3} = \text{diag}(l \text{ctg} \tilde{z}_{22}, l^{-1} (1 + \text{tg}^2 \tilde{z}_{22}))$$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\hat{z}) &= \text{col}(\hat{\Phi}_1(\hat{z}_1), \hat{\Phi}_2(\hat{z}_2), \hat{\Phi}_3(\hat{z}_{22}, \hat{z}_3), \hat{\Phi}_4(\hat{z}_{22}^4)) \\ (\hat{\Phi}_1(\hat{z}_1) &= \hat{z}_1 = \text{col}(x_B, y_B), \quad \hat{\Phi}_2(\hat{z}_2) = \text{col}(\hat{\Phi}_{21}(\hat{z}_{21}), \hat{\Phi}_{22}(\hat{z}_{22})) \\ \hat{\Phi}_{21}(\hat{z}_{21}) &= \hat{z}_{21}, \quad \hat{\Phi}_{22}(\hat{z}_{22}) = \text{arctg}(l \hat{z}_{22}) \\ \hat{\Phi}_3(\hat{z}_{22}^3) &= \text{col}(\hat{\Phi}_{31}(\hat{z}_{22}^{31}), \hat{\Phi}_{32}(\hat{z}_{22}, \hat{z}_{32})) \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\hat{\Phi}_{31}(\hat{z}_{22}^{31}) = \hat{z}_{22} \hat{z}_{31}, \quad \hat{\Phi}_{32}(\hat{z}_{22}, \hat{z}_{32}) = \hat{z}_{32} l / (1 + \hat{z}_{22}^2 l^2)$$

$$\hat{\Phi}_4(\hat{z}_{22}^4) = \hat{M}_4(\hat{z}_{22}^3) + \hat{N}_4(\hat{z}_{22}) \hat{z}_4, \quad \hat{M}_4(\hat{z}_{22}^3) = -\hat{N}_4(\hat{z}_{22}) \hat{K}_4(\hat{\Phi}_{22}^3(\hat{z}_{22}^3))$$

$$\hat{N}_4(\hat{z}_{22}) = \hat{L}_4^{-1}(\hat{\Phi}_{22}(\hat{z}_{22})), \quad \hat{\Phi}_{22}^3(\hat{z}_{22}^3) = \text{col}(\hat{\Phi}_{22}(\hat{z}_{22}), \hat{\Phi}_3(\hat{z}_{22}^3))$$

$$\hat{z}_{22}^3 = \text{col}(\hat{z}_{22}, \hat{z}_3), \quad \hat{z}_{22}^{31} = \text{col}(\hat{z}_{22}, \hat{z}_{31})$$

– вектор-функции, заданные соответственно на множествах

$$\Omega_{\Psi} = \Omega_{\Phi} \quad (6.26)$$

$$\Omega_{\Phi} = \{\hat{z} = \hat{\Psi}(\tilde{z}) \in R^8 : \tilde{z} \in \Omega_{\Psi}\} \quad (6.27)$$

а вектор-функции

$$\hat{\Psi}_5(\tilde{z}_{22}^4, \bar{u}_a) = \dot{\hat{\Psi}}_4(\tilde{z}_{22}^4) = \hat{K}_5(\tilde{z}_{22}^4) + \hat{L}_5(\tilde{z}_{22}^4)\bar{u}_a \quad (6.28)$$

$$\left( \hat{K}_5(\tilde{z}_{22}^4) = \frac{\partial \hat{\Psi}_4(\tilde{z}_{22}^4)}{\partial \tilde{z}_{22}} \tilde{z}_{32} + \frac{\partial \hat{\Psi}_4(\tilde{z}_{22}^4)}{\partial \tilde{z}_3} \tilde{z}_4, \quad \hat{L}_5(\tilde{z}_{22}^4) = \frac{\partial \hat{\Psi}_4(\tilde{z}_{22}^4)}{\partial \tilde{z}_4} = \hat{L}_4(\tilde{z}_{22}^4) \right)$$

$$\hat{\Phi}_5(\hat{z}_{22}^4, \hat{u}_a) = \hat{M}_5(\hat{z}_{22}^4) + \hat{N}_5(\hat{z}_{22}^4)\hat{u}_a \quad (6.29)$$

$$(\hat{M}_5(\hat{z}_{22}^4) = -\hat{N}_5(\hat{z}_{22}^4)\hat{K}_5(\hat{\Phi}_{22}^4(\hat{z}_{22}^4)), \quad \hat{N}_5(\hat{z}_{22}^4) = \hat{L}_5^{-1}(\hat{\Phi}_{22}^4(\hat{z}_{22}^4)))$$

$$\hat{\Phi}_{22}^4(\hat{z}_{22}^4) = \text{col}(\hat{\Phi}_{22}^4(\hat{z}_{22}^4), \hat{\Phi}_3(\hat{z}_{22}^3), \hat{\Phi}_4(\hat{z}_{22}^4))$$

заданы соответственно на множествах

$$\Omega_{\hat{\Psi}_5} = \Omega_{\bar{\Phi}_5} \quad (6.30)$$

$$\Omega_{\hat{\Phi}_5} = \left\{ (\hat{z}_{22}^4, \hat{u}_a) : \hat{z}_{22}^4 = \hat{\Psi}_{22}^4(\tilde{z}_{22}^4), \hat{u}_a = \hat{\Psi}_5(\tilde{z}_{22}^4, \bar{u}_a), (\tilde{z}_{22}^4, \bar{u}_a) \in \Omega_{\bar{\Phi}_5} \right\} \quad (6.31)$$

Тогда уравнения движения ТР (6.15), (6.16), (6.1), (6.2) (после указанных выше преобразований (6.20)–(6.31) приводятся к системе нелинейных ОДУ специального вида (1.20), (1.14), (1.15), где вектор-функция

$$\hat{F}(\hat{z}, \hat{u}_a) = J_{\hat{\Psi}}(\hat{\Phi}(\hat{z})) \cdot \tilde{F}(\hat{\Phi}(\hat{z}), \hat{\Phi}_5(\hat{z}_{22}^4, \hat{u}_a)) \quad (6.32)$$

причем функция  $J_{\hat{\Psi}}(\tilde{z}) = \partial \hat{\Psi}(\tilde{z}) / (\partial \tilde{z})$  представима в виде (1.21), (1.22).

Таким образом, исходные уравнения модели движения ТР (1.9)–(1.13), (1.8) нелинейными взаимно однозначными непрерывно дифференцируемыми преобразованиями координат пространства состояний  $\tilde{z}$  (1.10) и  $\hat{z}$  (6.18) и управлений  $u_a$  (1.8) и  $\hat{u}_a$  (6.19) по формулам (1.16), (1.17) вида

$$\hat{z} = \Psi_0(\tilde{z}), \quad \tilde{z} \in \Omega_{\Psi_0} \quad (6.33)$$

$$\tilde{z} = \Psi_0^{-1}(\hat{z}) \equiv \Phi_0(\hat{z}), \quad \hat{z} \in \Omega_{\Phi_0} \quad (6.34)$$

и (1.18), (1.19) вида

$$\hat{u}_a = \Psi_{05}(\tilde{z}_2^4, u_a) \quad (6.35)$$

$$u_a = \Phi_{05}(\tilde{z}_2^4, \hat{u}_a) \quad (6.36)$$

соответственно, где

$$\begin{aligned} \tilde{z}_2^4 &= \text{col}(\tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4) = \text{col}(\psi_c, \theta, \psi_c, \dot{\theta}, I_a), \quad \hat{z}_2^4 = \text{col}(\hat{z}_2, \hat{z}_3, \hat{z}_4) = \\ &= \text{col}(\psi_c, \kappa_B, V_B, \dot{\kappa}_B, \hat{I}_a), \quad \Phi_{02}^4(\hat{z}_2^4) = \text{col}(\Phi_{02}(\hat{z}_2), \Phi_{03}(\hat{z}_2^3), \Phi_{04}(\hat{z}_2^4)) \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\Psi_0(\tilde{z}) = \hat{\Psi}(\bar{\Psi}(\tilde{z}))$$

$$\Phi_0(\hat{z}) \equiv \Psi_0^{-1}(\hat{z}) = \bar{\Phi}(\hat{\Phi}(\hat{z})) \quad (6.38)$$

– вектор-функции, заданные соответственно на множествах

$$\Omega_{\Psi_0} = \Omega_{\bar{\Psi}} \quad (6.39)$$

$$\Omega_{\Phi_0} = \Omega_{\bar{\Phi}} \quad (6.40)$$

а вектор-функции

$$\Psi_{05}(\bar{z}_{22}^4, u_a) = \hat{u}_a = \hat{\Psi}_5(\bar{z}_{22}^4, \bar{u}_a) = \hat{\Psi}_5(\bar{\Psi}_{22}^4(\bar{z}_{22}^4), \bar{\Psi}_5(\bar{z}_{22}^4, u_a)) \quad (6.41)$$

где

$$\bar{\Psi}_{22}^4(\bar{z}_{22}^4) = \text{col}(\bar{\Psi}_{22}(\bar{z}_{22}^4), \bar{\Psi}_3(\bar{z}_{22}^4), \bar{\Psi}_4(\bar{z}_{22}^4)) \quad (6.42)$$

$$\Phi_{05}(\hat{z}_{22}^4, \hat{u}_a) = u_a \equiv \Psi_{05}^{-1}(\bar{z}_{22}^4, \hat{u}_a) = \Psi_{05}^{-1}(\Phi_{022}^4(\hat{z}_{22}^4), \hat{u}_a)$$

заданы соответственно на множествах

$$\Omega_{\Psi_{05}} = \{(\bar{z}_{22}^4, u_a) : \bar{z}_{22}^4 \in \Omega_{\bar{\Psi}}, u_a \in R^2\} \quad (6.43)$$

$$\Omega_{\Phi_{05}} = \{(\hat{z}_{22}^4, \hat{u}_a) : \hat{u}_a = \Psi_{05}(\bar{z}_{22}^4, u_a) = \Psi_{05}(\Phi_{022}^4(\hat{z}_{22}^4), u_a), \hat{z}_{22}^4 \in \Omega_{\Phi}, u_a \in R^2\} \quad (6.44)$$

приводятся к системе нелинейных ОДУ специального вида (1.20)–(1.22), (1.14), (1.15).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00317) и программы “Университеты России”.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Линейкин П.С.* О качении автомобиля // Тр. Саратов. автомоб.-дор. ин-та, 1937. № 5. С. 3–22.
2. *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк., 1970. 270 с.
3. *Лобас Л.Г.* Неголономные модели колесных экипажей. Киев: Наукова думка, 1986. 23 с.
4. *Неймарк Ю.И., Фуфаев И.А.* Динамика неголономных систем. М: Наука, 1967. 520 с.
5. *Isaacs R.* Differential Games. N.Y., etc.: Wiley, 1965 = *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
6. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. *А.А. Красовского*. М.: Наука, 1987. 711 с.
7. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М: Мир, 1972. 520 с.
8. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 616 с.
9. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
10. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. N.Y., etc.: Wiley, 1964 = *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. *Зотов Ю.К.* Управляемость и стабилизация программных движений транспортного робота // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 909–928.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
22.IV.2002