

УДК 539.374

© 2003 г. Р.И. Непершин

## КАЧЕНИЕ И СКОЛЬЖЕНИЕ ЦИЛИНДРА ПО ГРАНИЦЕ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Приводится решение задачи о стационарном плоском пластическом течении при качении и скольжении гладкого или шероховатого круглого цилиндра по границе идеально пластического полупространства. Рассматриваются случаи переднего и заднего скольжения материала по поверхности контакта с изменением направления контактного трения. Получены предельные значения дуги контакта и сил, действующих на цилиндр, при которых возможно стационарное пластическое течение.

Ранее были рассмотрены задачи о качении жесткого цилиндра по вязкоупругому полупространству [1, 2] и о качении гладкого цилиндра по жесткопластическому полупространству [3]; в последнем случае решение было получено методом малого параметра для малой дуги контакта по сравнению с радиусом цилиндра. Был также приведен [1–3] обзор основных исследований по проблеме трения качения.

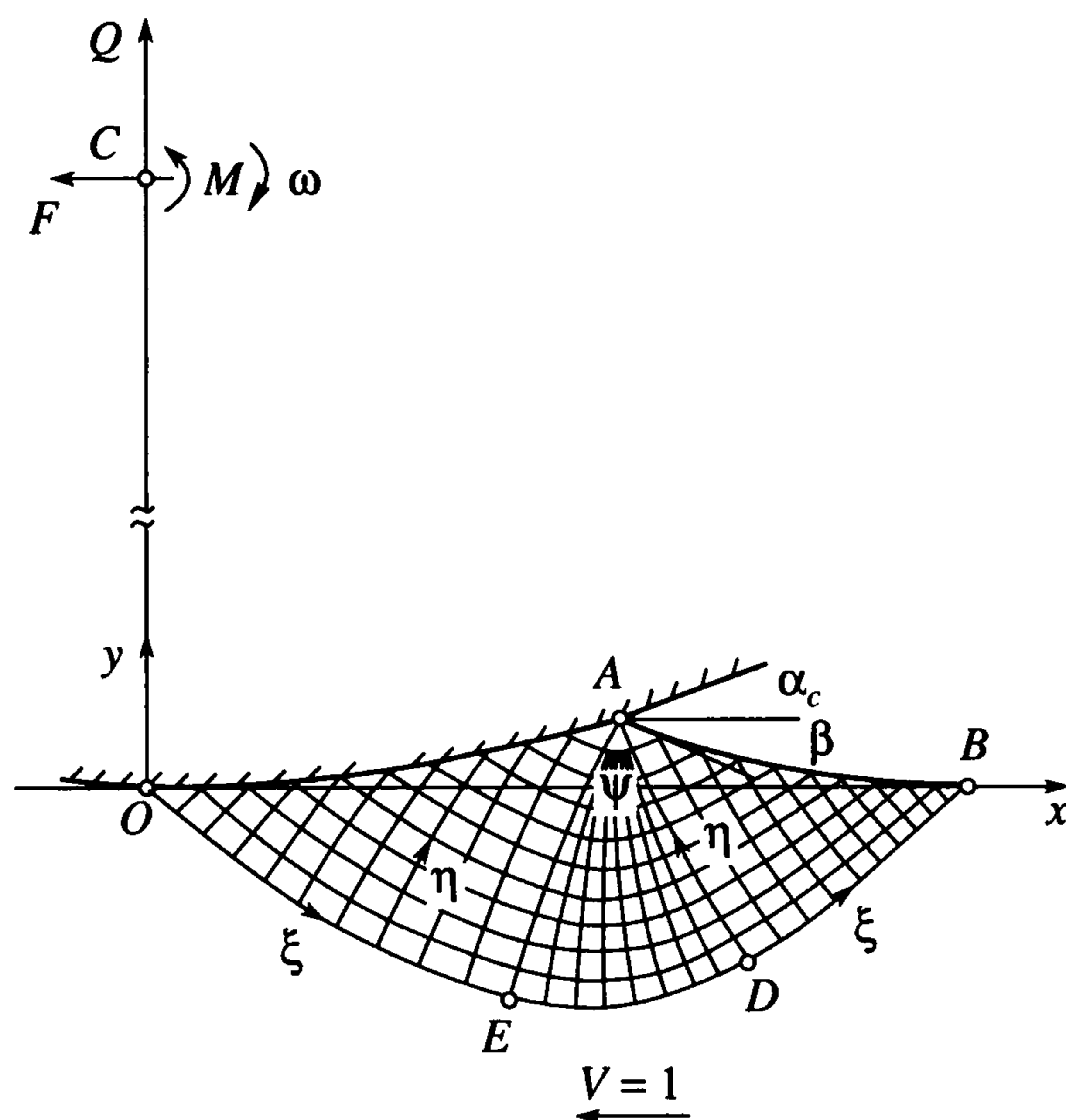
Были выполнены расчеты качения цилиндра без скольжения по границе упругопластического полупространства методом конечных элементов [4, 5]. Однако большие деформации, возникающие в зоне пластического контакта при больших нагрузках на цилиндр, проблема неизвестной стационарной границы пластической области и сингулярность полей напряжений и скоростей перемещений в точке пересечения свободной пластической границы с цилиндром существенно затрудняют упругопластическое моделирование процесса качения и скольжения цилиндра.

Ниже задача о качении и скольжении жесткого, гладкого и шероховатого цилиндра решается для идеально пластической модели полупространства на основе гиперболических уравнений плоской деформации [6]. Рассматривается стационарное пластическое течение с образованием криволинейной свободной границы перед цилиндром.

Показано, что определение этой границы и всей пластической области сводится к решению нелинейного векторного уравнения относительно распределения давления на границе контакта. Получены предельные значения дуги контакта и нагружения цилиндра, при которых возможно стационарное пластическое течение. Для шероховатого цилиндра рассмотрены два варианта задачи с изменением направления контактного трения в зависимости от направления скольжения пластического материала по границе контакта с цилиндром. Обсуждается связь задачи с проблемой трения качения и технологическими процессами прокатки и волочения толстых заготовок с пластическим деформированием поверхностного слоя.

**1. Постановка задачи и основные уравнения.** На фиг. 1 показана форма пластической области при качении и скольжении жесткого круглого цилиндра по границе несжимаемого идеально пластического полупространства [3]. Ось цилиндра считаем неподвижной, а недеформируемое полупространство – движущимся с единичной скоростью  $V = 1$ . Вследствие пластической несжимаемости точки  $O$  и  $B$  находятся на границе  $y = 0$ . Свободная от внешних напряжений граница  $AB$  совпадает с линией тока, так как процесс пластического течения стационарный.

Если цилиндр гладкий, то форма и размеры пластической области зависят только от вертикальной  $Q$  и горизонтальной  $F$  сил, приложенных к оси, и не зависят от вращения цилиндра, так как граничные условия на границе контакта  $OA$  одинаковы для вращающегося и невращающегося цилиндра. Если цилиндр шероховатый, то при



Фиг. 1

скольжении пластического материала от точки  $O$  к точке  $A$  возникают касательные напряжения контактного трения, создающие положительный момент  $M$ . Это случай качения цилиндра без скольжения в точке контакта с жесткой областью и передним скольжением материала на дуге контакта. При скольжении материала по поверхности шероховатого цилиндра в противоположном направлении напряжения контактного трения и момент  $M$  меняют знаки. Это случай скольжения цилиндра без вращения или скольжения и вращения цилиндра с малой угловой скоростью  $\omega$  и задним скольжением на всей дуге контакта.

За единицу напряжения принимаем удвоенное напряжение текучести материала при сдвиге, а за единицу длины – дугу контакта  $OA$ . При плоском пластическом течении дифференциальные уравнения линий скольжения  $\xi$  и  $\eta$  и соотношения Генки для напряжений и Гейрингер для скоростей перемещений вдоль линий скольжения имеют вид:

$$dy/dx = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad dy/dx = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta \quad (1.1)$$

$$d\sigma - d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \eta \quad (1.2)$$

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \xi, \quad dV_\eta + V_\xi d\varphi = 0 \quad \text{вдоль } \eta \quad (1.3)$$

где  $\sigma$  – среднее напряжение,  $\varphi$  – угол наклона касательной к линии скольжения  $\xi$  с осью  $x$ ,  $V_\xi$ ,  $V_\eta$  – проекции вектора скорости на  $\xi$  и  $\eta$ .

Вследствие стационарности пластического течения свободная от внешних напряжений граница  $AB$  совпадает с линией тока, т.е.

$$\operatorname{tg}(\varphi - \pi/4) = V_y/V_x, \quad \sigma = -1/2 \quad \text{на } AB \quad (1.4)$$

где  $V_x$  и  $V_y$  – проекции вектора скорости на оси координат  $x$  и  $y$ , связанные с  $V_\xi$  и  $V_\eta$  соотношениями

$$V_x = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_y = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi \quad (1.5)$$

Вдоль жесткопластической границы  $OEDB$  скорости непрерывны:  $V_x = -1$ ,  $V_y = 0$ .

Из соотношений (1.5) находим

$$V_{\xi} = -\cos\varphi, \quad V_{\eta} = \sin\varphi \quad \text{на } OEDB \quad (1.6)$$

Так как дуга контакта  $OA$  принята за характерный размер, то радиус цилиндра  $R$  и угол контакта  $\alpha_c$  связаны соотношением  $R\alpha_c = 1$ . Скорость поверхности цилиндра может изменяться в пределах  $0 \leq \omega R \leq 1$ . При качении без скольжения в точке  $O$  имеем  $\omega R = 1$ .

Если цилиндр гладкий, то линии скольжения пересекают границу  $OA$  под углом  $\pi/4$ . Отсюда находим

$$\varphi = \alpha - \pi/4, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_c \quad \text{на } OA \quad (1.7)$$

В случае шероховатого цилиндра на границе  $OA$  возникают касательные напряжения контактного трения  $\tau_c$ , и линии скольжения пересекают эту границу под углом

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos 2\tau_c, \quad 0 \leq \tau_c \leq \frac{1}{2} \quad (1.8)$$

Если  $\omega R > V_c$ , где  $V_c$  – скорость материала на границе контакта, то имеет место переднее скольжение, и угол  $\theta$  образуется между линией скольжения  $\eta$  и касательной к  $OA$ . Если  $\omega R < V_c$ , то возникает заднее скольжение с изменением направления  $\tau_c$ , и угол  $\theta$  образуется между линией скольжения  $\xi$  и касательной к  $OA$ . Поэтому угол  $\varphi$  зависит от направления скольжения материала относительно поверхности цилиндра

$$\varphi = \alpha + \theta - \pi/2, \quad \text{если } \omega R > V_c; \quad \varphi = \alpha - \theta, \quad \text{если } \omega R < V_c \quad (1.9)$$

Из равенства нулю нормальной к цилиндру скорости получаем кинематические граничные условия на  $OA$ :

для гладкого цилиндра

$$V_{\xi} = V_{\eta} \quad (1.10)$$

для шероховатого цилиндра

$$V_{\xi} = V_{\eta} \operatorname{tg}\theta, \quad V_{\xi} = V_{\eta} \operatorname{ctg}\theta \quad (1.11)$$

при переднем и заднем скольжении соответственно.

Поле линий скольжения и соответствующее ему поле скоростей перемещений можно построить только для положительных значений угла  $\psi$  центрированного веера в точке  $A$ , который определяется выражениями:

для гладкого цилиндра

$$\psi = \pi/2 - (a_c + \beta) \quad (1.12)$$

и для шероховатого цилиндра

$$\begin{aligned} \psi &= 3\pi/4 - (a_c + \beta + \theta), \quad \text{если } \omega R > V_c \\ \psi &= \pi/4 + \theta - (a_c + \beta), \quad \text{если } \omega R < V_c \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь

$$\beta = -\operatorname{arctg}(V_y/V_x)_A \quad (1.14)$$

– угол наклона касательной к границе  $AB$  в точке  $A$ .

Среднее напряжение в точке  $O$  находим из уравнения Генки для  $\xi$ -линии скольжения  $OEDB$  и граничных условий (1.7) – (1.9) при  $\alpha = 0$ .

Для гладкого цилиндра

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2} (1 + \pi) \quad (1.15)$$

При этом значении  $\sigma_0$  жесткий клин с вершиной в точке  $O$  нагружен до предельного пластического состояния, так как граница полупространства слева от точки  $O$  свободна от напряжений. Для шероховатого цилиндра при переднем скольжении

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2} (1 + 3\pi/2) + \theta \quad (1.16)$$

и при заднем скольжении

$$\sigma_0 = -\frac{1}{2} (1 + \pi/2) - \theta \quad (1.17)$$

Угол  $\theta$  определяется равенством (1.8). Выражение (1.16) показывает, что при переднем скольжении критерий несущей способности жесткого клина в точке  $O$  выполняется при  $\tau_c = 0$  ( $\theta = \pi/4$ ) в этой точке; следовательно, в таком случае пластическую область, показанную на фиг. 1, можно построить только при переменном напряжении контактного трения с нулевым значением в точке  $O$ . При заднем скольжении критерий несущей способности жесткого клина в точке  $O$  выполняется при всех значениях  $\tau_c$ .

Качение цилиндра с передним скольжением соответствует предельному случаю прокатки толстых заготовок, при котором пластическая деформация происходит только в поверхностном слое, и нейтральное сечение проходит через точку  $O$ . В этом случае в теории прокатки [7] на основе экспериментальных данных принимают линейное изменение напряжений контактного трения по дуге контакта с нулевым значением в нейтральном сечении. При качении цилиндра с передним скольжением принимаем линейное изменение  $\tau_c$  от нуля в точке  $O$  до максимального значения в точке  $A$ , где скорость скольжения по поверхности цилиндра максимальна. Это качественно согласуется с моделью вязкого сопротивления сдвигу контактного слоя пропорционально скорости скольжения по Надаи [7].

При качении цилиндра с задним скольжением скольжение по поверхности цилиндра происходит по всей дуге контакта. Предельный случай этой задачи – скольжение цилиндра без вращения, когда скорость скольжения материала по поверхности цилиндра незначительно меняется вдоль малой дуги контакта. При заднем скольжении принимаем постоянное значение  $\tau_c$  на всей дуге контакта. Условие  $\tau_c = \text{const}$  при больших контактных давлениях лучше согласуется с экспериментами по сравнению с законом сухого трения Кулона [7] и в технологических задачах теории пластичности обычно называется законом Прандтля. При этом  $\tau_c$  трактуется как сопротивление сдвигу материала контактного слоя, которое зависит от смазки и состояния поверхности контакта и не превышает напряжения текучести при сдвиге материала основной пластической области.

Среднее напряжение  $\sigma$  снижается по абсолютной величине вдоль дуги контакта  $OA$  и в точке  $A$  принимает значение, зависящее от угла  $\psi$ ,

$$\sigma_A = -\frac{1}{2} (1 + 2\psi) \quad (1.18)$$

Если известно распределение  $\sigma$  по дуге контакта  $OA$ , то можно определить нормальное давление на цилиндр

$$-\sigma_n = -(\sigma - \frac{1}{2} \sin 2\theta) \quad (1.19)$$

и найти силы и момент, которые при учете соотношения  $R\alpha_c = 1$  принимают вид

$$Q = \frac{1}{a_c} \int_0^{\alpha_c} [(-\sigma_n) \cos \alpha \pm \tau_c \sin \alpha] d\alpha, \quad F = \frac{1}{a_c} \int_0^{\alpha_c} [(-\sigma_n) \sin \alpha \mp \tau_c \cos \alpha] d\alpha \quad (1.20)$$

$$M = \pm \frac{1}{2} \int_{\alpha_{c0}}^{\alpha_c} \tau_c d\alpha$$

Верхние знаки относятся к переднему, нижние – к заднему скольжению.

Для гладкого цилиндра

$$-\sigma_n = -(\sigma - 1/2), \quad M = \tau_c = 0$$

Для шероховатого цилиндра при переднем скольжении и линейном изменении  $\tau_c$  из последнего выражения (1.20) находим  $M = 1/2(\tau_c)_A/\alpha_c$  и при заднем скольжении  $M = -\tau_c/\alpha_c$ .

Условия (1.4), (1.12) – (1.14) показывают, что задача о качении и скольжении цилиндра требует совместного рассмотрения полей напряжений и скоростей перемещений. Определяющее уравнение для решения задачи можно найти следующим образом. Зададим на границе  $OA$  непрерывное распределение среднего напряжения  $\sigma$  с учетом известных значений (1.15) – (1.17) в точке  $O$  и начальное приближение для угла  $\beta$ . Тогда значения  $\sigma$  и граничные условия для угла  $\varphi$  (1.7) – (1.9) определяют данные Коши для уравнений (1.1), (1.2) и позволяют найти поле линий скольжения в области  $OAE$ . В области  $AED$  поле линий скольжения находим из решения задачи Гурса с данными  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $AE$  и в особой точке  $A$  с известным углом  $\psi$  (1.12) – (1.14). В области  $ABD$  решаем обратную задачу Коши с данными  $\sigma$  и  $\varphi$  на  $AD$  и условиями  $\sigma = -1/2$ ,  $dy/dx = \text{tg}(\varphi - \pi/4)$  на неизвестной границе  $AB$ . В результате находим свободную границу  $AB$  и жесткопластическую границу  $OEDB$ . Затем определяем поле скоростей перемещений в пластической области из решения смешанной краевой задачи для уравнений (1.3) с граничными условиями (1.6), (1.10), (1.11). Если на границе  $AB$  выполняется условие стационарности течения (1.4), то распределение  $\sigma$  на  $OA$  является решением задачи. Так как последовательность решения краевых задач для уравнений (1.1) – (1.3) определяет поле линий скольжения с границей  $AB$  и поле скоростей перемещений в зависимости от распределения  $\sigma$  на  $OA$ , то условие (1.4) является определяющим уравнением для неизвестного распределения  $\sigma$  на  $OA$ , которое можно записать в операторном виде

$$\Phi(\sigma) \equiv \text{tg}(\varphi - \pi/4) - V_y/V_x = 0 \quad \text{на } AB \quad (1.21)$$

где  $\Phi$  – алгоритм вычисления границы  $AB$  и скоростей перемещений точек этой границы, реализованный в настоящей работе в виде численных процедур. При этом (1.21) – нелинейное конечномерное векторное уравнение, которое решается итерационным методом Бroyдена [8] для определения значений  $\sigma$  в узловых точках на границе  $OA$ .

**2. Численное решение задачи.** Вычисление поля линий скольжения и поля скоростей перемещений при заданном распределении напряжения  $\sigma$  на границе  $OA$  основано на конечноразностной аппроксимации дифференциальных уравнений (1.1) – (1.3). В регулярной области решаем элементарные задачи Коши с известными значениями  $\sigma$ ,  $\varphi$ ,  $V_\xi$  и  $V_\eta$  в точках 1 и 2 на линиях скольжения  $\xi$  и  $\eta$  в малой окрестности неизвестной точки  $P$  (фиг. 2, а). Из уравнений (1.2) находим  $\sigma$  и  $\varphi$  в точке  $P$

$$\sigma = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2 - \varphi_1 + \varphi_2), \quad \varphi = 1/2(\varphi_1 + \varphi_2 - \sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.1)$$

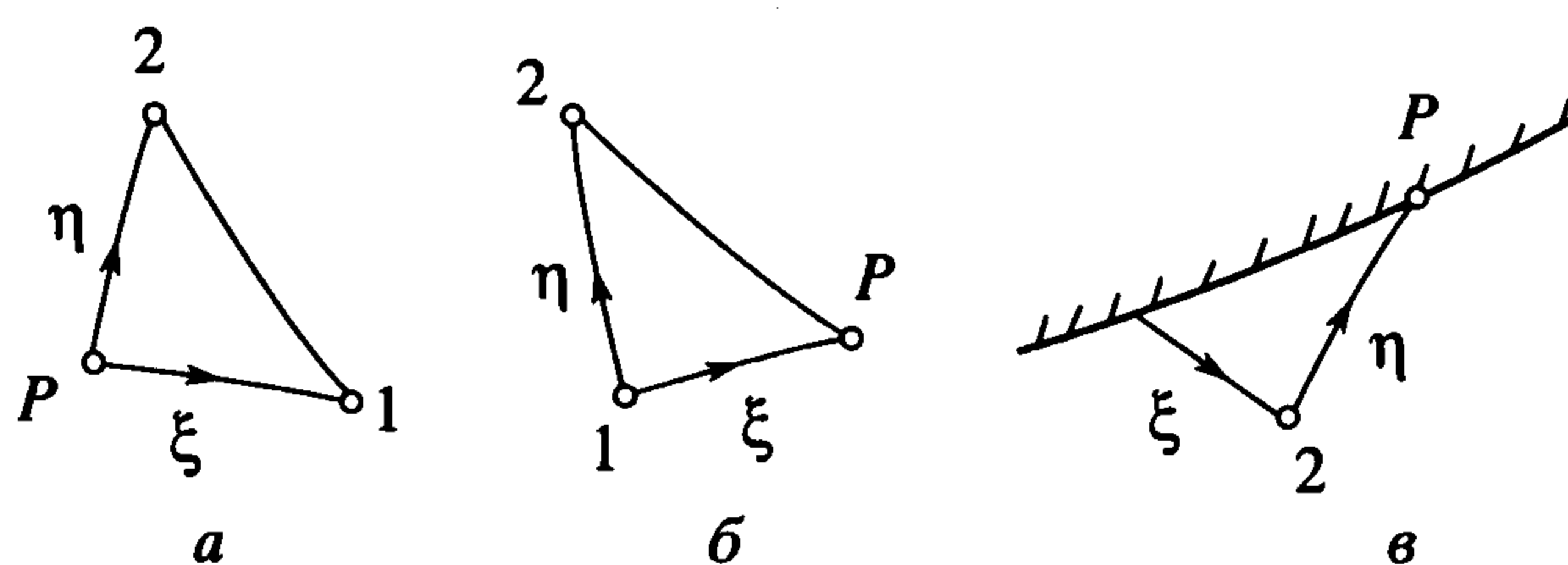
где нижние индексы 1 и 2 относятся к значениям переменных в точках 1 и 2. Затем из уравнений (1.1) находим координаты точки  $P$  по средним значениям углов  $\varphi$  между точками 1 и  $P$   $\langle\varphi_1\rangle = 1/2(\varphi_1 + \varphi)$  и точками 2 и  $P$   $\langle\varphi_2\rangle = 1/2(\varphi_2 + \varphi)$ :

при  $\langle\varphi_1\rangle \neq 0$  и  $\langle\varphi_2\rangle \neq 0$

$$\begin{aligned} x &= [y_2 - y_1 + x_1 \text{tg} \langle\varphi_1\rangle + x_2 \text{ctg} \langle\varphi_2\rangle] / (\text{tg} \langle\varphi_1\rangle + \text{ctg} \langle\varphi_2\rangle) \\ y &= [x_2 - x_1 + y_1 \text{ctg} \langle\varphi_1\rangle + y_2 \text{tg} \langle\varphi_2\rangle] / (\text{tg} \langle\varphi_2\rangle + \text{ctg} \langle\varphi_1\rangle) \end{aligned} \quad (2.2)$$

при  $\langle\varphi_1\rangle = 0$  или  $\langle\varphi_2\rangle = 0$

$$x = x_2, \quad y = y_1$$



Фиг. 2

Скорости  $V_\xi$  и  $V_\eta$  находим из уравнений (1.3) при известном значении угла  $\varphi$  в точке  $P$

$$\begin{aligned} V_\xi &= [V_{\xi 1} + (V_{\eta 1} + V_{\eta 2})a_1 - V_{\xi 2}a_1a_2]/(1 + a_1a_2) \\ V_\eta &= [V_{\eta 2} - (V_{\xi 1} + V_{\xi 2})a_2 - V_{\eta 1}a_1a_2]/(1 + a_1a_2) \\ a_1 &= 1/2 (\varphi - \varphi_1), \quad a_2 = 1/2 (\varphi - \varphi_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где индексы 1 и 2 относятся к значениям скоростей в точках 1 и 2.

Свободную от внешних напряжений границу  $AB$  получаем из решения элементарных обратных задач Коши (фиг. 2,б) от начальной точки  $A$ . В точках 1 и 2 на линии скольжения  $\eta$  значения  $\sigma$  и  $\varphi$  известны, причем точка 2 принадлежит границе  $AB$ , совпадающей со вторым главным напряжением. Поэтому в точках 2 и  $P$  свободного контура  $\sigma = -1/2$ . Из уравнений (1.2) для  $\eta$  – линии 1–2 и для  $\xi$  – линии 1– $P$  находим  $\varphi$  в точке  $P$

$$\varphi = 2\varphi_1 - \varphi_2 \quad (2.4)$$

Из дифференциального уравнения границы  $AB$   $dy/dx = \text{tg}(\varphi - \pi/4)$  и дифференциального уравнения  $\xi$ -линии (1.1), принимая средние углы наклона касательных  $\langle \varphi_1 \rangle = 1/2(\varphi_1 + \varphi)$  и  $\langle \varphi_2 \rangle = 1/2(\varphi_2 + \varphi) - \pi/4$  между точками 1 –  $P$  и 2 –  $P$ , находим координаты точки  $P$

$$x = [y_1 - y_2 - x_1 \text{tg} \langle \varphi_1 \rangle + x_2 \text{tg} \langle \varphi_2 \rangle]/(\text{tg} \langle \varphi_2 \rangle - \text{tg} \langle \varphi_1 \rangle), \quad y = y_2 + (x - x_2) \text{tg} \langle \varphi_2 \rangle \quad (2.5)$$

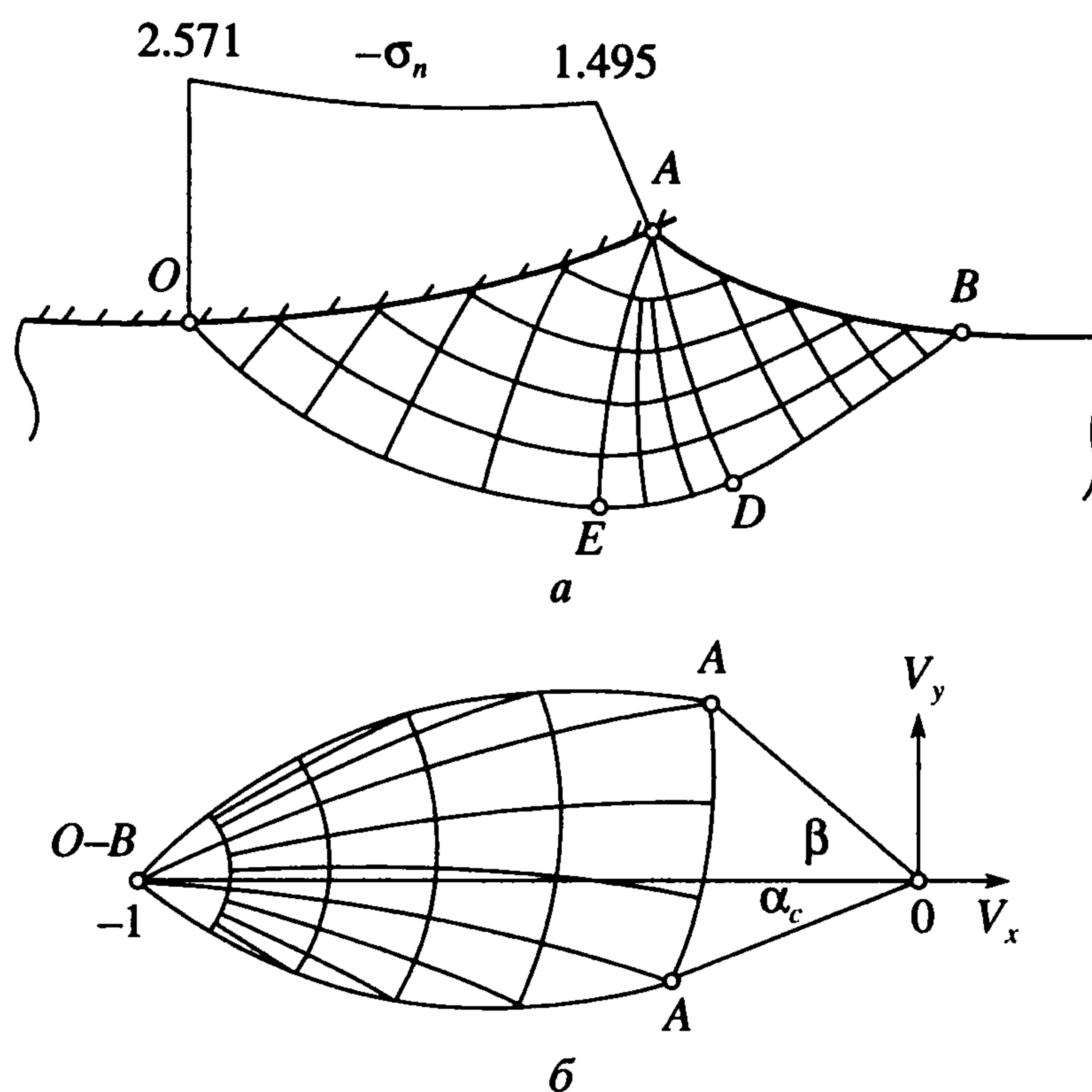
Скорости  $V_\xi$  и  $V_\eta$  на границе  $OA$  находим из решения элементарных смешанных задач (фиг. 2,в) для дифференциального соотношения (1.3) на  $\eta$ -линии 2 –  $P$  и граничных условий (1.10), (1.11)

$$V_\eta = [V_{\eta 2} - 1/2 V_{\xi 2}(\varphi - \varphi_2)]/[1 + 1/2 a(\varphi - \varphi_2)], \quad V_\xi = aV_\eta \quad (2.6)$$

где для гладкого цилиндра  $a = 1$ , для шероховатого цилиндра  $a = \text{tg}\theta$  при переднем скольжении и  $a = \text{ctg}\theta$  при заднем скольжении; индексы 2 в (2.6) обозначают известные скорости и угол  $\varphi$  в точке 2.

Алгоритмы решения основных краевых задач для гиперболических уравнений идеальной пластичности, приведенные ранее [9, 10], использованы в настоящей работе с включением вычислительных процедур решения элементарных краевых задач, содержащих уравнения (2.1) – (2.6). Эти уравнения не требуют итераций вследствие линейности дифференциальных уравнений (1.2) и (1.3), поэтому вычисление весьма детальной сетки линий скольжения и поля скоростей перемещений для заданного распределения  $\sigma$  в двадцати узловых точках на границе  $OA$  выполняется за доли секунды.

Обозначим вектором  $\sigma$  неизвестные значения  $\sigma$  в  $N$  узловых точках на границе  $OA$  и вектором  $f$  – разности углов наклона касательной к границе  $AB$  и вектора ско-



Фиг. 3

рости в  $N$  узловых точках этой границы, представляющие погрешности условия стационарности (1.4) при заданном  $\sigma$ . Алгоритм вычисления поля линий скольжения и поля скоростей перемещений определяет непрерывную зависимость  $f$  от  $\sigma$ , и операторное уравнение (1.21) принимает вид нелинейного векторного уравнения размерности  $N$

$$f(\sigma) = 0 \quad (2.7)$$

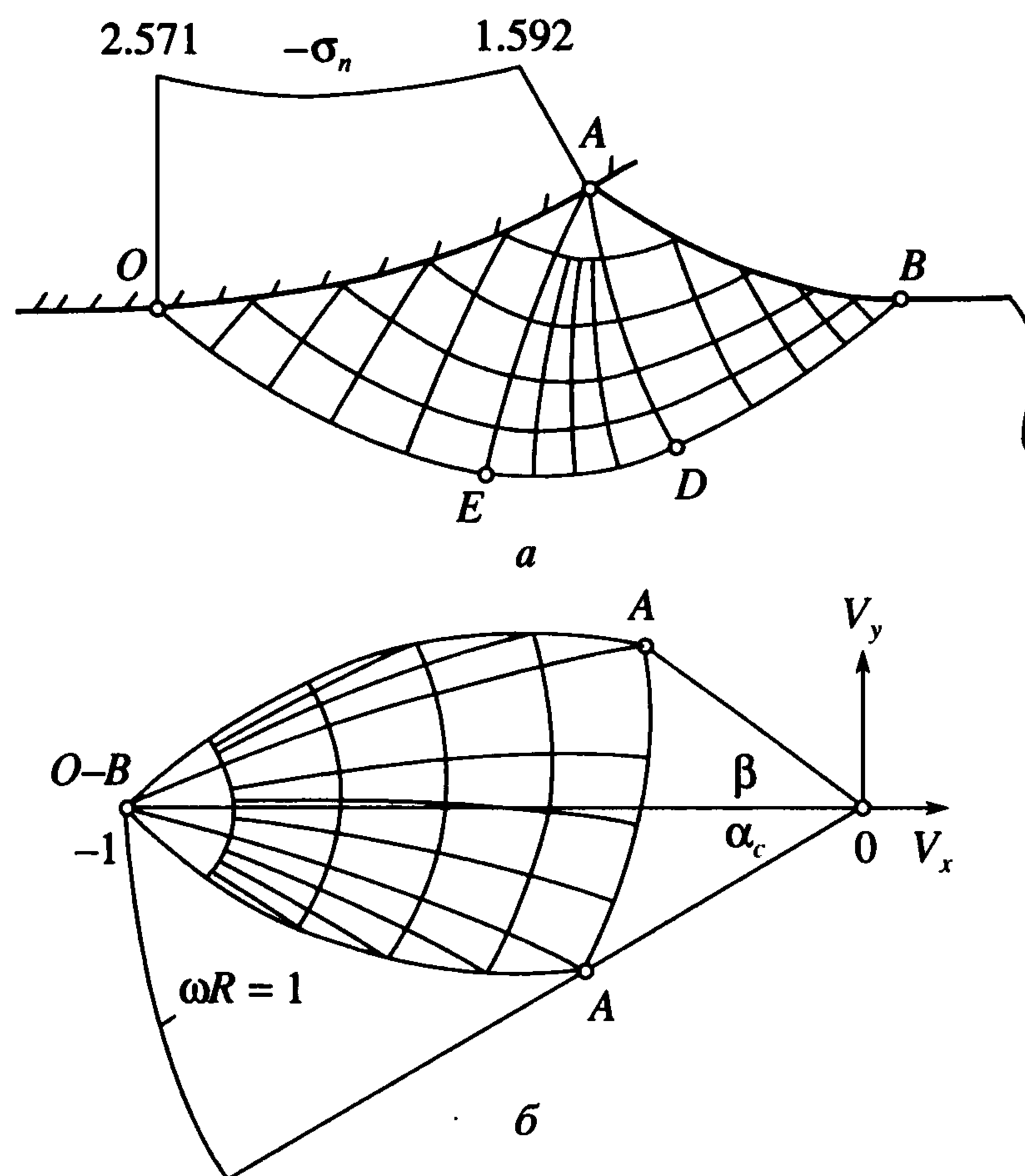
Уравнение (2.7) решаем методом Бройдена [8], который не требует вычисления производных в процессе итераций. Начальное приближение  $\sigma^0$  задавали линейным распределением  $\sigma$  на  $OA$  от известного значения в точке  $O$  (1.15) – (1.17) до значения (1.18) в точке  $A$ , принимая начальное приближение для угла  $\beta = s\alpha_c$ , где  $s > 1$ . Функциональную матрицу  $\partial f_i / \partial \sigma_j$  в начальной точке  $\sigma^0$  находили методом конечных разностей, решая  $N$  задач для вариаций  $\sigma^0$ .

При качении и скольжении гладкого цилиндра с малыми углами контакта  $\alpha_c$  поле линий скольжения (фиг.1) приближается к несимметричному полю Прандтля для гладкого плоского штампа с постоянным распределением  $\sigma$  на  $OA$  и постоянной скоростью  $V_x = -1$  в пластической области. В этом случае уравнение (2.7) решается за 1–2 итерации с точностью  $|f_i|_{\max} \leq 10^{-4}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) при  $s = 1$ . Увеличение параметра  $s$  при увеличении дуги контакта обеспечивало такую же точность решения уравнения (2.7) при малом числе итераций. При этом условие  $y = 0$  в точке  $B$  выполняется с точностью  $10^{-6}$ .

**3. Численные результаты.** Для решения задачи написана программа, вычисляющая поля линий скольжения и годографы скоростей для заданного угла контакта  $\alpha_c$  цилиндра с пластической областью и параметра контактного трения  $\tau_c$  при переднем и заднем скольжении.

На фиг. 3 показано поле линий скольжения с распределением контактного давления (а) и годограф скоростей перемещений (б) при качении и скольжении гладкого цилиндра с углом контакта  $\alpha_c = 0.4$ . Для этого варианта получены значения

$$\beta = 0.676, \quad \psi = 0.495, \quad Q = 2.049, \quad F = 0.380$$



Фиг. 4

Для гладкого цилиндра граничные условия для напряжений и скоростей перемещений не зависят от вращения цилиндра, и полученные решения справедливы при различных значениях  $\omega$  при переднем и заднем скольжении. С увеличением угла контакта  $\alpha_c$  угол центрированного веера  $\psi$  стремится к нулю, область  $AED$  на физической плоскости стягивается в линию, а скорость в особой точке  $A$  становится однозначной, и соответствующая дуга  $A-A$  на годографе скоростей перемещений стремится к неподвижной точке  $O$ . Таким образом, при  $\psi \rightarrow 0$  скорость перемещения материальной частицы вдоль свободной границы  $AB$  уменьшается от единицы в точке  $B$  до нуля в точке  $A$ , а затем она возрастает от нуля до единицы при движении частицы по границе цилиндра от точки  $A$  к точке  $O$ . Для гладкого цилиндра получено предельное значение  $\alpha_c^* = 0.453$ .

При качении гладкого цилиндра с углом контакта  $\alpha_c = 0.2$  получены значения

$$\beta = 0.245, \quad \psi = 1.126, \quad Q = 2.342, \quad F = 0.228$$

с изменением контактного давления от 2.126 в точке  $A$  до 2.571 в точке  $O$ . При углах  $\alpha_c \leq 0.2$  поле линий скольжения приближается к полю Прандтля для плоского штампа, и полученные результаты совпадают с решением задачи методом малого параметра [3]. При качении гладкого цилиндра с малыми углами контакта  $\alpha_c < 0.2$  имеем

$$Q \approx \frac{1}{2} (\pi - \alpha_c), \quad F \approx \frac{1}{2} \alpha_c Q; \quad F/Q \approx \frac{1}{2} \alpha_c$$

На фиг.4 показано поле линий скольжения с распределением контактного давления (а) и годограф скоростей перемещений (б) при качении шероховатого цилиндра без скольжения в точке  $O$  ( $\omega R = 1$ ) для угла контакта  $\alpha_c = 0.5236$  и линейного распределения  $\tau_c$  с максимальным значением 0.25 в точке  $A$ . Это вариант задачи с передним скольжением, для которого получены значения

$$\beta = 0.650, \quad \psi = 0.658, \quad Q = 2.070, \quad F = 0.382, \quad M = 0.239$$

Увеличение трения при переднем скольжении приводит к увеличению угла  $\psi$  и к увеличению предельного угла контакта  $\alpha_c^*$  при  $\psi \rightarrow 0$ .

Отношение  $F/Q$  можно трактовать как коэффициент трения качения, вызванный асимметрией пластической области относительно оси  $y$ , проходящей через ось цилиндра. Ниже приведены значения  $\alpha_c^*$  для качения цилиндра с передним скольжением в зависимости от напряжения контактного трения  $\tau_c$  в точке  $A$  и соответствующие им интегральные характеристики процесса  $Q$  и  $F$  и отношение  $F/Q$

$\tau_c$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$\alpha_c^*$	0.453	0.552	0.650	0.750	0.875
$Q$	1.951	1.885	1.828	1.774	1.692
$F$	0.400	0.416	0.427	0.435	0.440
$F/Q$	0.205	0.220	0.233	0.245	0.260

При переднем скольжении для заданных значений  $\tau_c$  можно найти углы контакта  $\alpha_c$ , для которых сила  $F$  равна нулю. Это предельный случай прокатки толстых заготовок без проникновения пластических деформаций через толщину заготовки с пластическим деформированием только поверхностного слоя.

На фиг. 5 показано поле линий скольжения с распределением контактного давления (а) и годограф скоростей перемещений (б) при качении шероховатого цилиндра с задним скольжением ( $0 \leq \omega R < 0.53$ ) для угла контакта  $\alpha_c = 0.2$  и постоянного напряжения контактного трения  $\tau_c = 0.25$ . Для этого варианта получены значения

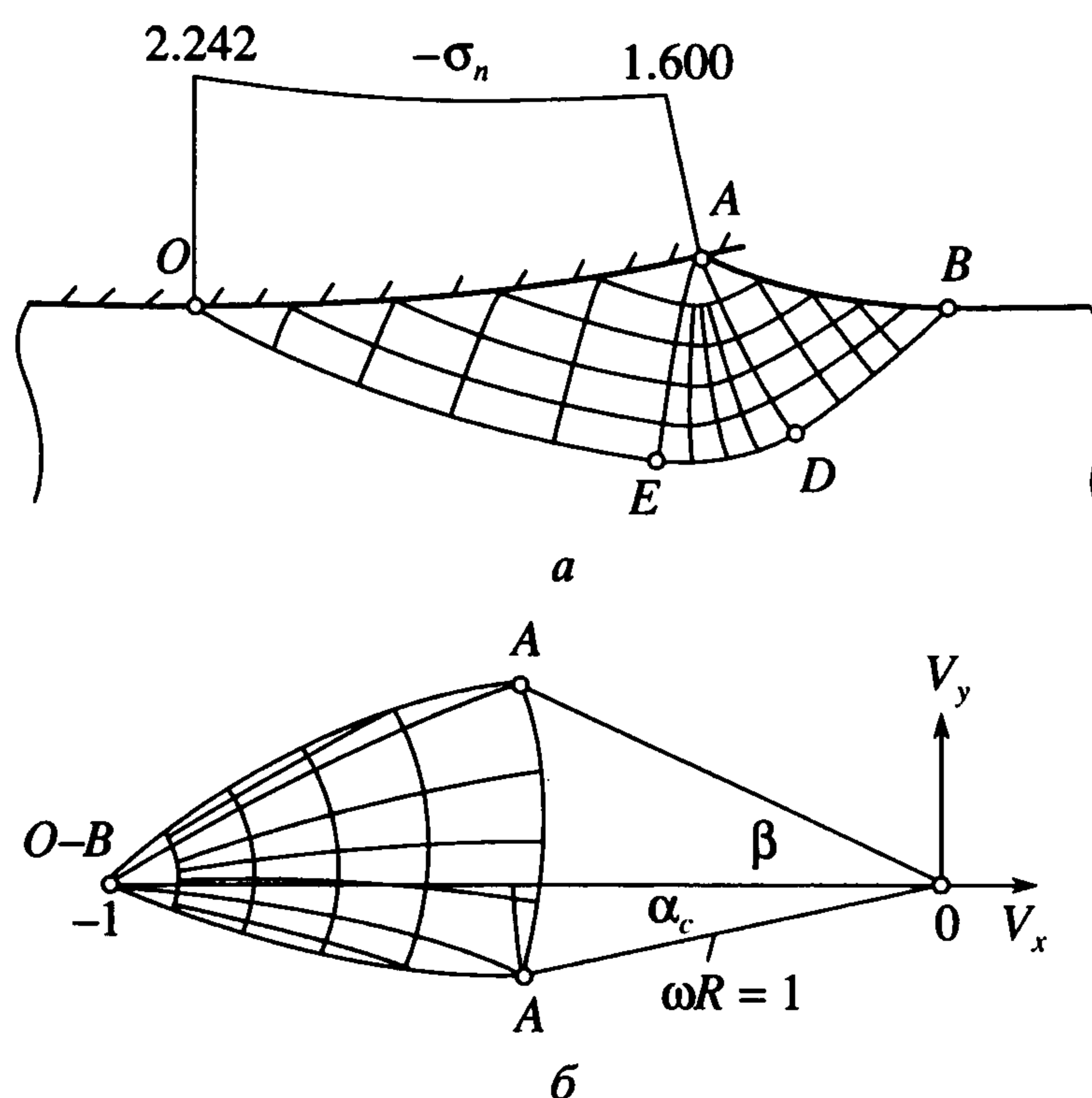
$$\beta = 0.44, \quad \psi = 0.667, \quad Q = 1.922, \quad F = 0.433, \quad M = -1.25$$

Увеличение трения при заднем скольжении приводит к уменьшению  $\psi$ , предельного угла контакта  $\alpha_c^*$  и нормального давления на цилиндр с более равномерным его распределением по сравнению с гладким цилиндром и качением шероховатого цилиндра с передним скольжением.

При  $\omega = 0$  получаем скольжение кругового штампа с образованием перед ним стационарной пластической области, зависящей от вертикальной силы  $Q$  и контактного трения  $\tau_c$ . Эта задача описывает также процесс волочения толстой заготовки через круговые матрицы при пластическом деформировании только поверхностного слоя. При  $\tau_c \rightarrow 1/2$  при заднем скольжении  $\alpha_c \rightarrow 0$  пластическая область  $ABDE$  вырождается в точку  $A$ , а область  $OAE$  – в линию сдвига с равномерным давлением –  $\sigma_n = 1/2 + \pi/4$  на линии контакта  $OA$ . Это случай скольжения абсолютно шероховатого плоского штампа по границе пластического полупространства.

Для практических приложений написан также вариант программы, вычисляющей линии тока и неоднородность распределения накопленной пластической деформации в пластической области и по толщине деформированного слоя за цилиндром.

Расчеты качения и скольжения цилиндра с учетом контактного трения  $\tau_c$  показывают существенное влияние этого параметра на форму пластической области, силы и момент, действующие на цилиндр. При малых углах контакта при переднем скольжении увеличение  $\tau_c$  приводит к снижению горизонтальной силы  $F$  и отношения  $F/Q$ . Расчетная программа позволяет найти значения  $\alpha_c$  и  $\tau_c$ , при которых  $F \approx 0$ . Это предельные режимы прокатки толстых заготовок со свободными концами. При дальнейшем увеличении  $\tau_c$  сила  $F$  возрастает, но в обратном направлении. Применительно к предельным режимам прокатки толстых заготовок изменение направления силы  $F$  означает изменение направления внешнего "натяжения", приложенного к заготовке, которое при соответствующем значении вертикальной силы  $Q$ , приложен-



Фиг. 5

ной к валку, приводит к стационарному пластическому течению поверхностного слоя.

Модель заднего скольжения представляет практический интерес для технологии поверхностного пластического деформирования толстых заготовок скользящим криволинейным, в рассматриваемом случае круговым, инструментом с учетом контактного трения. Увеличение  $\tau_c$  приводит к увеличению силы  $F$  и отношения  $F/Q$ . Расчетная программа в этом случае позволяет анализировать изменение сил  $F$  и  $Q$  и формы пластической области вплоть до ее вырождения в линию сдвига поверхностного слоя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А.Ю. Трение качения // ПММ. 1938. Т. 2. Вып.2. С. 245–260.
2. Ишлинский А.Ю. Прикладные задачи механики. Т.1. Механика вязкопластических и не вполне упругих тел. М.: Наука, 1986. 359 с.
3. Marshall E.A. Rolling contact with plastic deformation // J. Mech.Phys.Solids. 1968. V. 16. № 4. P. 243–254.
4. Howell M., Hahn G.T., Rubin C.A., McDowell D.L. Finite element analysis of rolling contact for non-linear kinematic hardening bearing steel // Trans. ASME. J. Tribol. 1995. V. 117. № 4. P. 729–736.
5. Shiratori M., Ito M., Hashimoto M. Elastic-plastic analysis of rolling contact for surface hardened steel // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.A. 1995. V. 61. № 585. P. 1064–1069.
6. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
7. Целиков А.И. Основы теории прокатки. М.: Металлургия, 1965. 247 с.
8. Dennis J.E., Shnabel R.B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Englewood Cliffs, N.Y.: Prentice-Hall, 1983. 378 p.
9. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
10. Друянов В.А., Napershin R.I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam: Elsevier, 1994. 425 p.