

УДК 539.214 + 539.374

© 2003 г. А.А. Буренин, Л.В. Ковтанюк, М.В. Полоник

ФОРМИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПОЛЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА СПЛОШНОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Изучаются одномерные конечные деформации упругопластического материала толстостенной трубы при нагружениях ее внешней цилиндрической поверхности. Замечено, что при условиях общей разгрузки, когда внешнее давление снимается, возможно возникновение повторного пластического течения, существенно меняющего характер распределения остаточных напряжений. Отмечается эффект приспособляемости упругопластического тела с цилиндрической полостью к его повторным нагружениям.

При изучении необратимого деформирования материала толстостенной трубы давлением на ее внешней поверхности использовалась теория конечных упругопластических деформаций, построенная ранее [1-3]. Отличие такой математической модели от предшествующих [4-7] заключено в том, что при разделении полных деформаций на обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие последние определяются не алгебраическими зависимостями, а дифференциальными, т.е. указываются уравнения переноса [8] для тензоров упругих и пластических деформаций. Таким способом достигается, в частности, независимость результата разгрузки от пути процесса в пространстве напряжений [1, 2]. Данное обстоятельство использовалось [9] при расчетах остаточных напряжений в результате решения задачи о равновесии тела при отсутствии внешних воздействий, но с накопленными обратимыми деформациями.

Ниже отмечается, что независимость результата процесса разгрузки от его пути в пространстве напряжений, являющееся свойством используемой модели, еще не гарантирует того, что результат произведенной разгрузки можно будет рассчитать в качестве итогового равновесного состояния. Когда уровень накопленных необратимых деформаций превышает некоторое критическое значение, их взаимозависимость с обратимыми деформациями приводит к возникновению повторного пластического течения при продолжающейся общей разгрузке тела. Этот эффект заставляет изменить постановочную часть соответствующей краевой задачи так, что последующее разгрузочное деформирование, с развивающейся пластической областью, необходимо рассматривать в качестве процесса во времени. Такое изменение в постановке задачи является предметом настоящей статьи. Рассмотрено также влияние остаточных напряжений на процесс упругопластического деформирования при повторном нагружении.

1. Исходные модельные соотношения. Используемая модель конечных упругопластических деформаций подробно описана [2, 3], поэтому остановимся только на основных ее соотношениях, необходимых для дальнейшего. Непосредственно могут быть измерены только полные деформации, их разделение на обратимые (упругие) и необратимые (пластические) составляющие, сколь бы разумными ни выглядели здесь основания для такого разделения, по существу связаны с произволом исследователя, конструирующего модель. Основанием для разделения полных деформаций Альманси d_{ij} на обратимую e_{ij} и необратимую p_{ij} составляющие в известных теориях [3-5] служат следующие соображения: в процессе разгрузки скорость пластических деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ обращается в нуль, и изменение компонент тензора пластических

деформаций p_{ij} связано только с жесткими вращениями $p_{ij}(t) = z_{ki}p_{km}(t_0)z_{mj}$, где z_{ik} – компоненты ортогонального тензора, а момент времени $t = t_0$ может быть связан с моментом начала процесса разгрузки. Известно [1], что такое изменение компонент p_{ij} эквивалентно дифференциальной зависимости

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = r_{ik}p_{kj} - p_{ik}r_{kj}, \quad r_{ik} = -r_{ki} = -z_{mi}\frac{dz_{mk}}{dt} \quad (1.1)$$

При учете этого обратимые и необратимые деформации определяются уравнениями переноса

$$\begin{aligned} dp_{ij}/dt &= \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj} - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p + r_{ik} p_{kj} - p_{ik} r_{kj} \\ de_{ij}/dt &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}(e_{ik}v_{k,j} + v_{k,i}e_{kj} - r_{ik}e_{kj} + e_{ik}r_{kj} - \varepsilon_{ik}^p e_{kj} - \varepsilon_{ik} \varepsilon_{kj}^p) \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.2) принят способ задания движения среды по Эйлеру $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t)$ и использованы соотношения

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j u_{i,j}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \\ u_i(x_1, x_2, x_3, t) &= x_i - a_i(x_1, x_2, x_3, t) \\ r_{ij} &= w_{ij} + A^{-1} \{ B^2 (\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) + B (\varepsilon_{ik} e_{km} e_{mj} - e_{ik} e_{km} \varepsilon_{mj}) + \\ &+ e_{ik} \varepsilon_{km} e_{ms} e_{sj} - e_{ik} e_{km} \varepsilon_{ms} e_{sj} \} \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^3 - L_2 - \frac{1}{3}L_1^3 + \frac{1}{3}L_3, \quad B = 2 - L_1 \\ L_1 &= e_{ii}, \quad L_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad L_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}) \end{aligned}$$

Согласно уравнениям (1.2), разделение тензора деформаций Альманси d_{ij} на обратимую e_{ij} и необратимую p_{ij} составляющие подчиняется зависимости

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - 1/2 e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{ks} e_{sj} \quad (1.3)$$

Дифференциальные зависимости (1.2) обосновываются [3, 8] последовательным использованием формализма неравновесной термодинамики.

Примем также, как и ранее [3], упрощающую гипотезу о независимости свободной энергии F от необратимых деформаций; тогда следствием закона сохранения энергии будет формула Мурнагана

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{im}} (\delta_{mj} - e_{mj}) \quad (1.4)$$

Когда в среде отсутствуют необратимые деформации, формула Мурнагана записывается в виде

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{im}} (\delta_{mj} - 2d_{mj}) \quad (1.5)$$

В соотношениях (1.4) и (1.5) P – добавочное гидростатическое давление, возникающее вследствие принимаемого условия несжимаемости среды. Упругопластическую среду считаем изотропной и для $W = W(L_1, L_2)$ принимаем зависимость

$$\begin{aligned} F(d_{ij}) &= \rho_0^{-1} W(L_1, L_2) \\ W &= (a - \mu)L_1 + aL_2 + bL_1^2 - \chi L_1 L_2 - \theta L_1^3, \quad L_1 = d_{ii}, \quad L_2 = d_{ij}d_{ji} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Величины μ , a , b , χ , θ считаем постоянными среды, ρ_0 – плотность среды в недеформированном состоянии. При $b = \chi = \theta = 0$ из соотношений (1.6) следует известный потенциал Муни, а если еще и $a = 0$, то получим упругий потенциал Трелоара. Когда в среде присутствуют необратимые деформации, инварианты L_1 и L_2 следует заменить инвариантами тензора e_{ij} обратимых деформаций

$$I_1 = e_{ii} - \frac{1}{2}e_{ij}e_{ji}, \quad I_2 = e_{ij}e_{ji} - e_{is}e_{sj}e_{ji} + \frac{1}{4}e_{is}e_{sk}e_{kj}e_{jt}$$

Такой выбор инвариантов обеспечивает предельный переход в вычислениях напряжений по формулам (1.4) и (1.5) при стремлении к нулю необратимых деформаций p_{ij} .

Процесс пластического течения полагаем идеальным, накопление необратимых деформаций происходит, когда [10]

$$f(\sigma_{ij}) = k(df/d\sigma_{ij})\epsilon_{ij} > 0 \quad (1.7)$$

Принимаются также условия принципа максимума Мизеса

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\epsilon_{ij}^p > 0 \quad (1.8)$$

где σ_{ij}^* – любое напряженное состояние, допускаемое данной функцией нагружения $f(\sigma_{ij}^*) \leq k$. В этом случае следует ассоциированный закон пластического течения

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda \partial f / \partial \sigma_{ij}, \quad \lambda = \lambda(\epsilon_{ij}^p) > 0 \quad (1.9)$$

В расчетах в качестве поверхности нагружения $f(\sigma_{ij}) = k$ использовалось условие пластичности максимального касательного напряжения Треска.

2. Постановка задачи. Начальное упругое равновесие. Рассматривается изготовленный из упругопластического материала бесконечно длинный цилиндр внешнего радиуса R_0 , в котором имеется цилиндрическая полость радиуса r_0 . Цилиндрические поверхности $r = R_0$ и $r = r_0$ ($r_0 \ll R_0$) соответствуют свободному состоянию такой толстостенной трубы. Нагружается внешняя цилиндрическая поверхность $r = R$, в то время как внутренняя поверхность $r = s$ остается свободной от нагрузки. До тех пор пока компонента σ_{rr} тензора напряжений в используемой далее цилиндрической системе координат (r, θ, z) не превышает на границе $r = R$ своего порогового значения P_0 , осуществляется упругое равновесие. При

$$\sigma_{rr}(R) = -P_0 \quad (2.1)$$

напряженное состояние на внутренней поверхности трубы $r = s_0$ впервые выходит на поверхность нагружения

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k \quad (2.2)$$

т.е. выполнится условие

$$\sigma_{\theta\theta}(s_0) = -2k \quad (2.3)$$

Пластическое течение материала начинается с этого состояния упругого равновесия, поэтому для дальнейшего необходимо рассчитать параметры данного состояния.

Условие несжимаемости материала приводит в рассматриваемом случае к уравнению относительно единственной отличной от нуля компоненты вектора перемещений $u_r = u(r)$

$$(1 - u')(1 - r^{-1}u) = 1$$

(штрих означает частную производную по r).

Решением этого уравнения является функция

$$u = r - (r^2 + \varphi(t))^{1/2}, \quad \varphi(t) = R_0^2 - R^2(t) = r_0^2 - s^2(t) \quad (2.4)$$

Здесь $R(t)$ и $s(t)$ – текущие значения радиусов внешней и внутренней цилиндрических поверхностей соответственно. В условиях равновесия $\varphi(t) = \text{const}$, но при последующем пластическом течении зависимость от времени существенна.

Для компонент тензора конечных деформаций Альманси найдем

$$d_{rr} = u' - \frac{1}{2}u'^2 = \frac{1}{2}(1 - \eta^{-1}), \quad d_{\theta\theta} = r^{-1}u - \frac{1}{2}r^{-2}u^2 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (2.5)$$

$$\eta = 1 + (R_0^2 - R^2)r^{-2}$$

Подстановка выражений (2.3) в соотношения (1.4) и (1.6) позволяет вычислить напряжения в среде с точностью до неизвестной функции $p(r)$

$$\sigma_{rr} = -p(r) + \xi(\eta), \quad \sigma_{\theta\theta} = -p(r) + \xi(\eta^{-1}) \quad (2.6)$$

$$p(r) = -P + \partial W / \partial L_1, \quad \xi(\eta) = a_1(1 - \eta^{-3}) + a_2(1 - \eta^{-2}) + a_3(1 - \eta^{-1}) + a_4(\eta - 1) + a_5(\eta^2 - 1)$$

$$a_1 = \frac{3}{4}(\chi + \theta), \quad a_2 = a + b - \frac{3}{4}(3\chi + 5\theta)$$

$$a_3 = \mu - 2a - 3b + \frac{5}{2}(\chi + 3\theta), \quad a_4 = b - \frac{3}{4}(\chi + 5\theta), \quad a_5 = \frac{1}{4}(\chi + 3\theta)$$

Функция $p(r)$ находится интегрированием уравнения равновесия

$$\sigma'_{rr} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})r^{-1} = 0 \quad (2.7)$$

при граничном условии $\sigma_{rr}(s_0) = 0$. Получаем

$$p(r) = \xi(\eta) + \zeta(x, \eta) \quad (2.8)$$

$$\zeta(x, \eta) = a_6 \ln(x\eta^{-1}) + a_7(x - \eta) + a_8((x - 1)^2 - (\eta - 1)^2) + a_9((x - 1)^3 - (\eta - 1)^3) + a_{10}(\eta^{-1} - x^{-1}) + a_{11}((1 - \eta^{-1})^2 - (1 - x^{-1})^2)$$

$$a_6 = \frac{1}{2}\left(\mu - a - b + \frac{1}{2}(\chi + 3\theta)\right), \quad a_7 = \frac{1}{2}\mu, \quad a_8 = \frac{1}{4}\left(a + b + \frac{1}{4}(\chi - 3\theta)\right)$$

$$a_9 = \frac{1}{6}a_1, \quad a_{10} = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{1}{2}(\chi + 3\theta)\right), \quad a_{11} = \frac{1}{4}a_1, \quad x = \eta(s_0) = r_0^2 s_0^{-2}$$

Зависимости (2.5), (2.6) и (2.8) решают задачу с точностью до одной неизвестной величины s_0 . Граничное условие (2.1) позволяет связать этот параметр со значением нагружающего давления P_0 , а условие (2.3) дает возможность вычислить значения P_0 или s_0 , при которых выполняется условие необратимого деформирования. Последнее условие принимает форму алгебраического уравнения относительно x

$$c_1(x - x^{-1}) + c_2(x^2 - x^{-2}) + a_1(x^3 - x^{-3}) = 2k \quad (2.9)$$

$$c_1 = \mu - 2a - 2b + \frac{1}{4}(7\chi + 15\theta), \quad c_2 = a + b - 2\chi - 3\theta$$

Решая уравнение (2.9), находим значение x , и, следовательно, P_0 и s_0 , такие, что на внутренней цилиндрической поверхности $r = s_0$ выполняется условие пластичности

Треска. На этом решение вспомогательной упругой задачи можно считать законченным.

3. Пластическое течение. Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу, в рамках которой удобно записать большинство необходимых для дальнейшего изложения соотношений. Считаем, что в момент времени $t = 0$ граница цилиндрической полости занимает положение $r = s_0$, вычисленное согласно уравнению (2.9). Это означает, что напряжение σ_{rr} на внешней границе тела соответствует значению P_0 внешнего давления. Пусть в дальнейшем внешнее давление увеличивается

$$\sigma_{rr}|_{r=R(t)} = -P_0 - g(t), \quad g(t) > 0, \quad g(0) = 0 \quad (3.1)$$

В любой последующий момент времени в области $s(t) \leq r \leq r_1(t)$ происходит пластическое деформирование среды и всюду в этой области $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$. Функция $r_1(t)$ задает движение границы зоны пластического течения. Уравнение равновесия теперь следует заменить уравнением движения среды

$$\sigma'_{rr} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})r^{-1} = -\frac{1}{2}\rho_0\left(\ddot{\phi}r^{-1} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2r^{-3}\right) \quad (3.2)$$

(точка означает производную по t).

Здесь для вычисления компоненты ускорения использовались соотношения (2.2).

Уравнение (3.2) следует проинтегрировать отдельно в упругой и пластической областях с учетом граничного условия (3.1) и условия равенства нулю σ_{rr} при $r = s(t)$. Таким способом найдем, что в области $s(t) \leq r \leq r_1(t)$

$$\sigma_{rr} = 2k \ln(s(t)r^{-1}) + S(\phi, s(t), r) \quad (3.3)$$

$$S(\phi, s(t), r) = \frac{1}{2}\rho_0\left[\dot{\phi} \ln(s(t)r^{-1}) + \frac{1}{4}\dot{\phi}^2(r^{-2} - s^{-2}(t))\right]$$

В области упругого деформирования $r_1(t) \leq r \leq R(t)$ получим

$$\sigma_{rr} = \zeta(\eta, 1 + \phi(t)R^{-2}(t)) - P_0 - g(t) + S(\phi, R(t), r) \quad (3.4)$$

На границе пластической области $r = r_1(t)$ значения σ_{rr} , определяемые выражениями (3.3) и (3.4), обязаны совпадать. Кроме того, напряжение σ_{rr} , вычисленное по формуле (3.4), и $\sigma_{\theta\theta}$, определяемое аналогичной зависимостью, связаны условием пластичности (2.2). Таким способом $r_1(t)$ выражается через функцию $\phi(t)$, и для последней функции получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\zeta(y, 1 + \phi(t)R^{-2}(t)) - k \ln[(r_0^2 - \phi(t))(y - 1)\phi^{-1}(t)] - P_0 - g(t) + S\left(\phi, (R_0^2 - \phi(t))^{1/2}, (r_0^2 - \phi(t))^{1/2}\right) = 0 \quad (3.5)$$

$$y = \eta|_{r=r_1(t)} = r_1^{-2}(t)\phi(t) + 1$$

Для дифференциального уравнения (3.5) примем следующие начальные условия:

$$\phi(0) = r_0^2 - s_0^2 = r_0^2(x - 1)x^{-1}, \quad \dot{\phi}(0) = 0 \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) с начальными условиями (3.6) может быть решено численно, тогда напряжения в среде вычисляются по формулам (3.3), (3.4) и согласно аналогичным, здесь не выписанным, соотношениям для $\sigma_{\theta\theta}$. Вычисление обратимых и нео-

братимых деформаций в области $s(t) \leq r \leq r_1(t)$, необходимых для дальнейшего, оказывается при этом самостоятельной проблемой. При их вычислении следует учитывать, что обратимые деформации в каждой материальной точке изменяются до момента времени, когда этой точки достигает граница пластической области, а в дальнейшем, из-за идеального характера пластического течения, они остаются неизменными до конца нагружения. Граница пластической области изменяется в процессе деформирования так, что $r = s_0$ при $p = P_0$ и $r = r_1$ при $p = P_1$ (конечное состояние). Если r – координата точки в конечный момент деформирования, r_{i0} – ее координата в свободном состоянии и r_t – координата той же материальной точки в момент начала пластического течения в ее окрестности, то

$$r = (\gamma_t + r_t^2 - \gamma_1^2)^{1/2}, \quad r_{i0}^2 = \gamma_t + r_t^2 \quad (3.7)$$

$$\gamma_t = r_{i0}^2 - r_t^2 = r_0^2 - s_t^2 = R_0^2 - R_t^2$$

$$\gamma_1 = r_{i0}^2 - r^2 = r_0^2 - s_1^2 = R_0^2 - R_1^2$$

Здесь γ_1 и γ_t – значения функции $\varphi(t)$ в момент окончания процесса деформирования и в текущий момент времени (когда $r = r_t$) соответственно. Функции γ_1 и γ_t определяются из решения уравнения (3.5) с условиями (3.6). Зависимости (3.7) связывают начальную (материальную или лагранжеву) координату точки r_{i0} с ее пространственной (эйлеровой) координатой r через пространственную координату этой же частицы r_t в момент подхода к ней упругопластической границы. Если в условиях (3.1) принять $g(t) = \lambda t$, то

$$\gamma_1 = \varphi(P_1 - P_0)\lambda^{-1}, \quad \gamma_t = \varphi(P_t - P_0)\lambda^{-1}; \quad P_0 < P_t \leq P_1$$

Используя условие идеальности процесса пластического течения, найдем обратимые деформации при $s_1(t) \leq r \leq r_1(t)$

$$e_{rr} = 1 - x^{-1/2}, \quad e_{\theta\theta} = 1 - x^{1/2}; \quad x = 1 + \gamma_t(r^2 + \gamma_1 - \gamma_t)^{-1} \quad (3.8)$$

По известным обратимым и полным деформациям необратимые деформации вычисляются согласно зависимости (1.3)

$$p_{rr} = \frac{1}{2}x(\gamma_1(r^2 + \gamma_1)^{-1} + x^{-1} - 1), \quad p_{\theta\theta} = \frac{1}{2}x^{-1}(x - 1 - \gamma_1 r^{-2}) \quad (3.9)$$

Если итоговое значение задаваемого внешнего давления P_1 далее не изменять, тело с накопленными пластическими деформациями (3.9) придет в равновесие.

4. Разгрузка среды. Остаточные напряжения. Разгрузим тело, изменив внешнее давление до некоторого значения $P_* < P_1$. Существует такое пороговое значение для нагружающего давления $P_1 = P_1^*$, что если $P_1 \leq P_1^*$, то значение P_* можно принять равным нулю и рассматривать итоговое состояние разгрузки в качестве состояния равновесия при нулевых значениях σ_{rr} при $r = R_p$ (нижний индекс p соответствует состоянию разгрузки). Связано это с тем, что в используемой модели конечных упругопластических деформаций данное состояние не зависит от пути процесса разгрузки в пространстве напряжений.

При $P_1 > P_1^*$ условием независимости итогового состояния от процесса разгрузки воспользоваться нельзя из-за того, что как только $\sigma_{rr}(R(t))$ становится равным P_* ,

напряженное состояние определяется равенством $\sigma_{\theta\theta}(s_p) = 2k$. Заметим, что теперь $\sigma_{\theta\theta}$ – растягивающее напряжение. Данное состояние оказывается начальным для последующего процесса пластического течения, связанного с дальнейшим уменьшением внешней нагрузки. Полные деформации в среде в этом состоянии вычисляются по известному полю перемещений (2.2), где функцию $\varphi(t)$ следует заменить ее значением $\gamma_p = r_0^2 - s_p^2$. Если материальная граница пластической области при разгрузке не изменяется, то пространственная координата границы при $p = P_2$ вычисляется по формуле $r_{1p}^2 = r_1^2 + \gamma_p - \gamma_1$. В области $r_{1p}(t) \leq r \leq R_p$, где отсутствуют необратимые деформации, напряжения вычисляются по известным полным деформациям согласно соотношениям (1.5) и (1.6). Неизвестная функция добавочного гидростатического давления, присутствующая в (1.5), находится интегрированием уравнения равновесия при условии $\sigma_{rr}(R_p) = -P_2$. В результате найдем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P_2 + \zeta(\eta, \eta_1) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - a_1(\eta^3 - \eta^{-3}) - c_2(\eta^2 - \eta^{-2}) - c_1(\eta - \eta^{-1}) \\ \eta &= 1 + \gamma_p r^{-2}, \quad \eta_1 = 1 + \gamma_p R_0^{-2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

В области с накопленными необратимыми деформациями напряжения вычисляются по найденным упругим деформациям. Последние вычисляются через известные полные и не изменяющиеся в процессе разгрузки пластические деформации. Интегрированием уравнения равновесия с условием $\sigma_{rr}(s_p) = 0$ находится неизвестная функция P в выражении (1.4). Таким образом, для напряжений в области $s_p(t) \leq r \leq r_{1p}$ можно получить окончательные зависимости

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \tau(y_1, y_2) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - a_1(y_2^3 - y_2^{-3}) - c_2(y_2^2 - y_2^{-2}) - c_1(y_2 - y_2^{-1}) \\ \tau(y_1, y_2) &= c_3 \ln((y_2 - 1)(y_1 - 1)^{-1}) + c_4(y_1 - y_2) + \\ &+ c_5 \ln((y_2 - 1)(y_1 - 1)^{-1} y_1 y_2^{-1}) + c_6(y_2^{-1} - y_1^{-1}) + \\ &+ c_7((y_1 - 1)^2 - (y_2 - 1)^2) + c_8((y_1 - 1)^3 - (y_2 - 1)^3) + c_9((1 - y_2^{-1})^2 - (1 - y_1^{-1})^2) \\ y_1 &= 1 + (\gamma_p - \gamma_1) s_p^{-2}, \quad y_2 = 1 + (\gamma_p - \gamma_1) r^{-2} \\ c_3 &= \frac{1}{2}(c_1 x + c_2 x^2 + a_1 x^3), \quad c_4 = -\frac{1}{2}(c_1 x + 2c_2 x^2 + 3a_1 x^3) \\ c_5 &= -\frac{1}{2}(c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + a_1 x^{-3}), \quad c_6 = -\frac{1}{2}(c_2 x^{-2} + a_1 x^{-3}) \\ c_7 &= -\frac{1}{4}(c_2 x^2 + 3a_1 x^3), \quad c_8 = -\frac{1}{6} a_1 x^3, \quad c_9 = \frac{1}{4} a_1 c^{-3} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Согласно принятому условию, напряженное состояние среды, задаваемое соотношениями (4.2), обязательно удовлетворяет условию $\sigma_{\theta\theta}(s_p) = 2k$. Отсюда следует алгебраическое уравнение

$$a_1(z^3 - z^{-3}) + c_2(z^2 - z^{-2}) + c_1(z - z^{-1}) = -2k, \quad z = xy_1^{1/2} \quad (4.3)$$

Решение этого уравнения дает величину z и, следовательно, такое значение s_p , которое соответствует началу повторного пластического течения. Данное значение однозначно связано со значением P_2 для нагружающего давления; последнее вычисляется из условия равенства напряжений (4.1) и (4.2) на границе пластической области $r = r_{1p}$.

Уже отмечалось, что рассчитанное состояние равновесия является начальным для последующего процесса необратимости деформирования, в котором

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_{r=R(t)} &= -P_2 + h(t), \quad h(0) = 0, \quad h(t) > 0 \\ (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})|_{s(t) \leq r \leq r_2(t)} &= -2k, \quad \sigma_{rr}|_{r=s(t)} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнение равновесия теперь следует заменить уравнением движения (3.2) с новой произвольной функцией $\psi(t)$. Движение границы новой пластической области $r = r_2(t)$ определяется зависимостью

$$r_2 = (x(\psi(t) - \gamma_1))^{1/2} (z - x)^{-1/2} \quad (4.5)$$

Интегрированием уравнений движения в каждой из трех областей

$$s(t) \leq r \leq r_2(t), \quad r_2(t) \leq r \leq r_1(t), \quad r_1(t) \leq r \leq R(t)$$

при условиях, что в первой из этих областей не изменяются упругие деформации, а во второй – пластические, с использованием граничных условий (4.4) определяются напряжения в каждой из области деформирования. Выпишем здесь только зависимость $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, t)$, зависимости для $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ вполне аналогичны им.

В области $s(t) \leq r \leq r_2(t)$ имеем

$$\sigma_{rr} = 2k \ln(rs^{-1}(t)) + S(\psi, s(t), r) \quad (4.6)$$

В области $r_1(t) \leq r \leq R(t)$, не необратимые деформации отсутствуют, напряжения σ_{rr} вычисляются согласно первому выражению (4.1), в которое следует добавить слагаемое

$$S(\psi, (R_0^2 - \psi)^{1/2}, r) - h(t)$$

При интегрировании уравнения движения в области $r_2(t) \leq r \leq r_1(t)$, где необратимые деформации не меняются, следует использовать условие равенства напряжений при $r = r_1(t)$ (изменение r_1 со временем связано только с движением деформирующейся среды). В результате найдем, что в данной области

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \tau(y_3, y_2) + h(t) - P_2 + \zeta(z_1, \eta_1) + S(\psi, (R_0^2 - \psi)^{1/2}, r) \\ y_3 &= 1 + (\psi(t) - \gamma_1)r_1^{-2}(t), \quad z_1 = 1 + \psi(t)r_1^{-2}(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Условие равенства напряжений на границе области повторного пластического течения $r = r_2(t)$ приводит к дифференциальному уравнению для функции $\psi(t)$

$$\begin{aligned} \tau(y_3, zx^{-1}) + \zeta(z_1, \eta_1) - k \ln(r_2^2(r_0^2 - \psi(t))^{-1}) + h(t) - P_2 + \\ + S(\psi, (R_0^2 - \psi)^{1/2} (r_0^2 - \psi)^{1/2}) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Начальными условиями для данного уравнения являются

$$\psi(0) = r_0^2 - s_p^2, \quad \dot{\psi}(0) = 0 \quad (4.9)$$

Таким образом, решение задачи разгрузки среды свелось к последовательному численному решению дифференциальных уравнений (3.5) и (4.8) с условиями (3.6) и (4.9) соответственно. Напряжения и деформации в теле определяются по найденным таким способом функциям $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ согласно выписанным зависимостям. Эти же функции определяют и законы движения границ пластических областей $r_1(t)$ и $r_2(t)$. Следует отметить, что необратимые деформации в области $r_2(t) \leq r \leq r_1(t)$, входящие параметрически в эти уравнения, для последующих расчетов могут быть заданы только в форме численных дискретных массивов. Неизменность их в каждой материальной точке гарантируется, но требуется их перерасчет вследствие изменения пространственной координаты той же частицы в процессе деформирования.

Приведем некоторые характерные результаты расчетов, полученные при следующих значениях постоянных:

$$\frac{a}{\mu} = 0.9, \quad \frac{b}{\mu} = 4, \quad \frac{\chi}{\mu} = 20, \quad \frac{\theta}{\mu} = 80, \quad \frac{k}{\mu} = 0.003, \quad \frac{\lambda}{\mu} = 0.0004$$

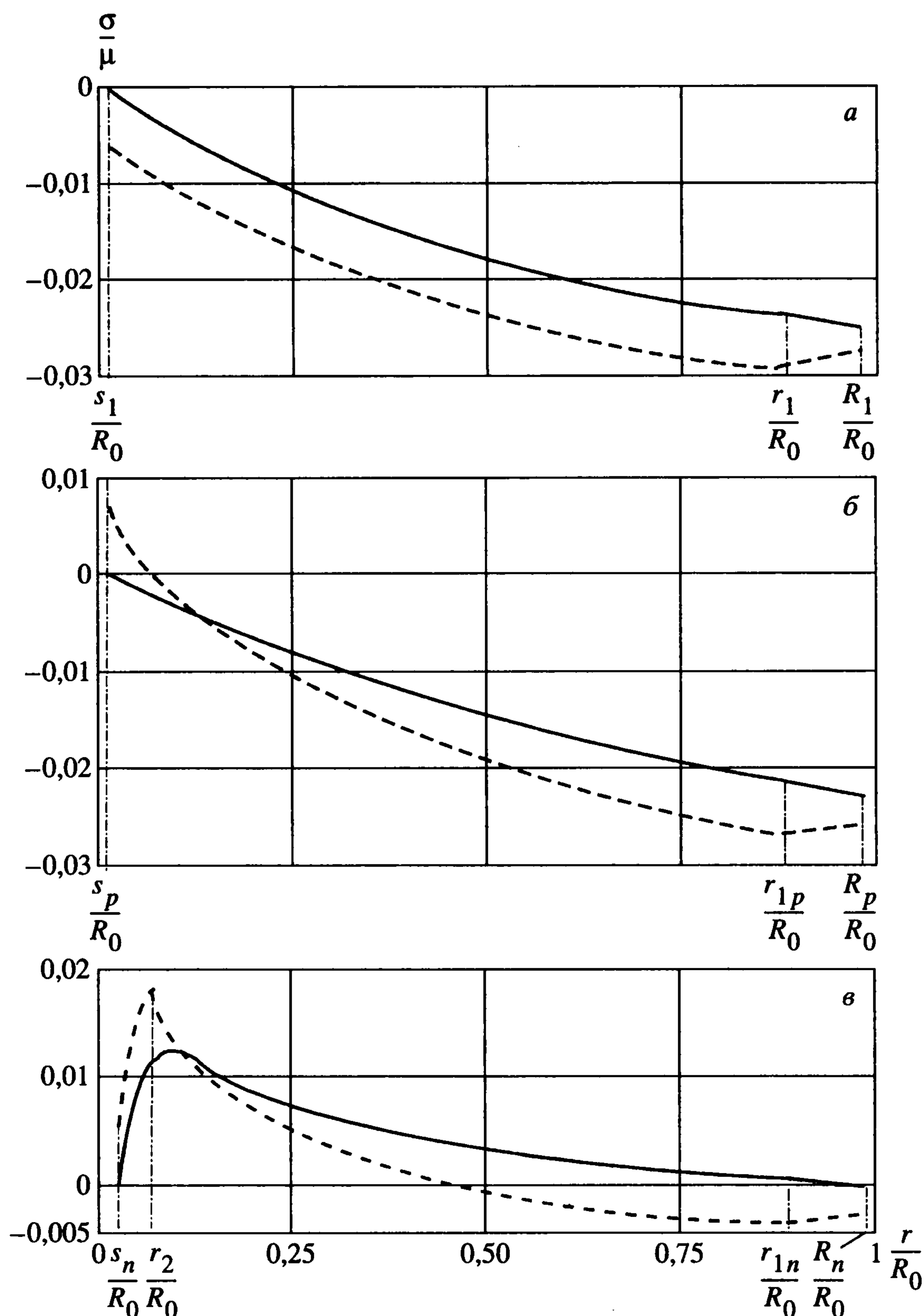
где модуль сдвига $\mu = 25 \cdot 10^9$ Па. На всех фигурах представлены напряжения σ/μ (напряжения σ_{rr}/μ показаны сплошными, $\sigma_{\theta\theta}/\mu$ – штриховыми линиями) в зависимости от значения r/R_0 в различные моменты деформирования. На фиг. 1, а представлено распределение напряжений в конечный момент активного деформирования, когда $\sigma_{rr}(R) = -P_1$. Всюду в области $s_1 < r < r_1$ разность напряжений $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$ одинакова и равна $2k$. Распределение напряжений в момент начала повторного пластического течения иллюстрируется фиг. 1, б. Напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ в этом состоянии стало растягивающим и на границе $r = s_p$ равно $2k$. Окончательные остаточные напряжения соответствуют зависимостям, представленным графически на фиг. 1, в; $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$ всюду в области $s_n \leq r \leq r_2$. В расчетах функции $g(t)$ и $h(t)$ полагались линейными.

5. Повторное нагружение. Начальным состоянием для повторного нагружения является состояние полной разгрузки, когда $\sigma_{rr}(s_n) = 0$ и $\sigma_{rr}(R_n) = 0$, распределение остаточных напряжений в этом случае представлено на фиг. 1, в. При последующем увеличении внешней нагрузки до некоторого значения $P_3 > P_0$ происходит обратимое деформирование, а при $\sigma_{rr}(R) = -P_3$ напряженное состояние на поверхности $r = s_k$ (внутренняя поверхность трубы) снова выходит на поверхность текучести: $\sigma_{\theta\theta}(s_k) = -2k$. Данное состояние является начальным для последующего процесса необратимого деформирования и рассчитывается аналогично предыдущему, а именно: уравнение равновесия интегрируется в трех областях

$$s_k \leq r \leq r_{2k}, \quad r_{2k} \leq r \leq r_{1k}, \quad r_{1k} \leq r \leq R_k$$

где по-разному вычисляются неизменные в процессе деформирования необратимые деформации. Характерное распределение напряжений в этом состоянии тела представлено на фиг. 2, а. При $p > P_3$ происходит накопление необратимых деформаций, поэтому данный процесс следует снова рассматривать во времени. Это приводит, как и ранее, к системе уравнений, состоящей из нескольких алгебраических и одного дифференциального; все они получаются приемами, вполне аналогичными ранее продемонстрированным, и поэтому ограничимся здесь только качественными результатами расчетов.

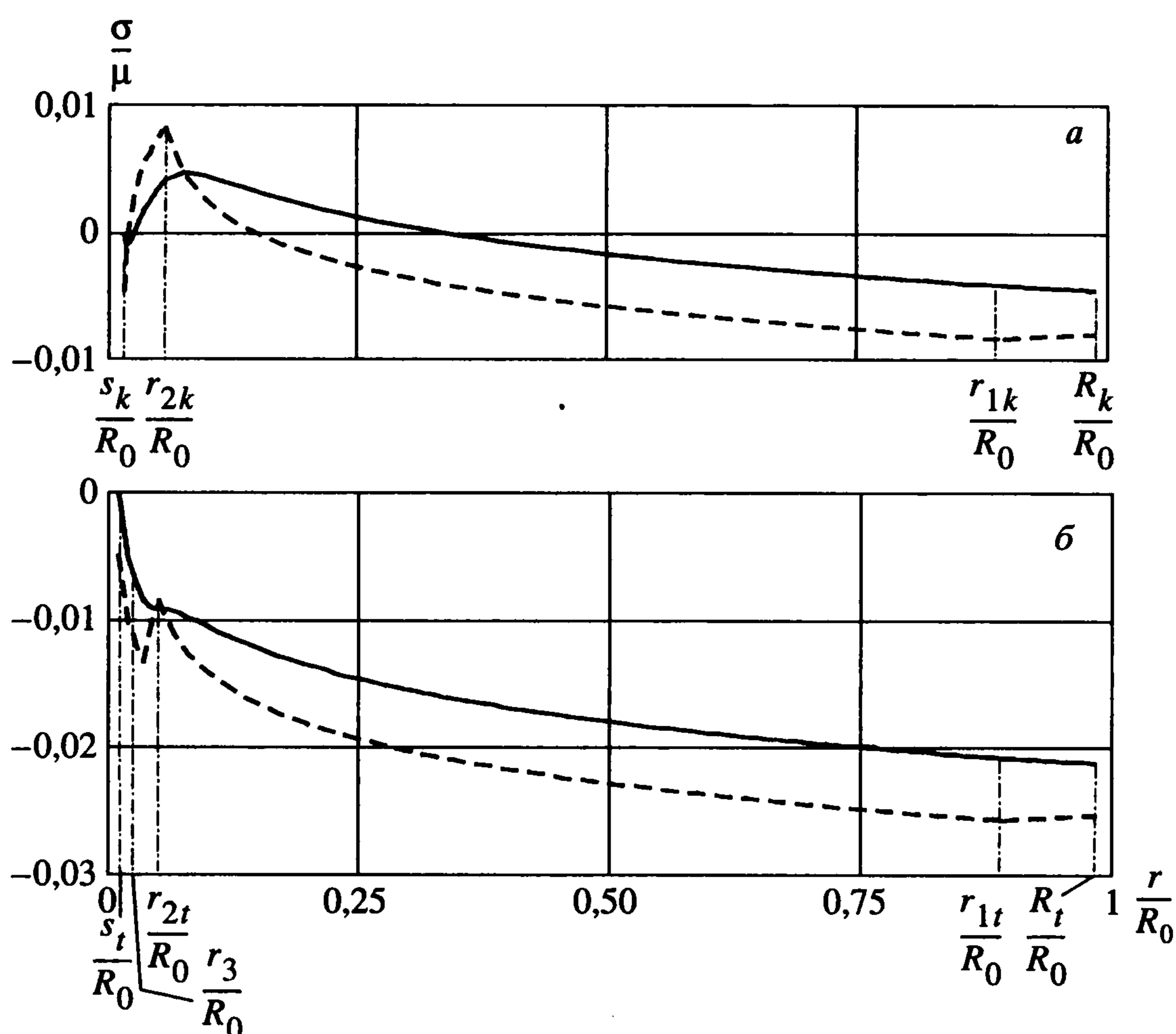
Как уже отмечалось, процесс пластического течения начинается при $\sigma_{rr}(R) = -P_3$, при этом $P_0 < P_3 < P_1$. При дальнейшем увеличении внешнего давления $\sigma_{rr}(R) = -P_3(1 + \lambda t)$ со временем зона пластического течения занимает область $s_k(t) < r < r_3(t)$, где $r_3(t)$ – движущаяся по среде граница пластической области.



Фиг. 1

Распределение напряжений в материале в некоторый момент времени иллюстрирует фиг. 2, б. Интересен следующий факт: при выходе границы $r_3(t)$ на поверхность r_2 , соответствующую конечному положению границы зоны пластического течения при разгрузке среды, нагружающее давление $p(t)$ оказывается точно равным P_1 . Область $r_3 = r_2 < r < r_1$ в этот момент времени мгновенно приходит в пластическое состояние ($\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$). Таким образом, цикл завершается, т.е. среда приходит в состояние, проиллюстрированное на фиг. 1, а.

Если далее внешнее давление не увеличивать, а снова разгрузить тело, то в результате получим напряженное состояние, представленное на фиг. 1, в. То же характерно и для изменений радиусов граничных поверхностей. Такой эффект называем эффектом приспособляемости среды к циклическим нагружениям (напомним, что все расчеты проведены в рамках модели идеальной пластичности). Для того чтобы увеличить уровень необратимых деформаций или, что то же, уменьшить радиус цилиндрической каверны в теле, следует увеличивать внешнее давление по сравнению с первоначально достигнутым значением P_1 .



Фиг. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке и Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-96904, 02-01-01128).

ЛИТЕРАТУРА

1. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311. № 1. С. 59–62.
2. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Об одном варианте модели несжимаемого упругопластического тела, допускающего большие деформации // Проблемы естествознания и производства. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 1995. С. 5–9.
3. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 199–201.
4. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1969. V. 36. № 1. P. 1–6.
6. Кандауров В.И. Об уравнениях упруговязкопластической среды с конечными деформациями // ПМТФ. 1982. № 4. С. 133–139.
6. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материала при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987. 231 с.
7. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 120–128.
8. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
9. Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, изготовленной из несжимаемого упругопластического материала // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций. Владивосток: Дальнаука, 1998. С. 77–96.
10. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.