УДК 539.3:534.121.1

© 2003 г. Д.В. Долгих, В.В. Киселев

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ СИЛЬНЫХ ИЗГИБОВ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ

Для описания динамики изгиба тонкой нелинейно-упругой пластины предлагается вариант теории возмущений, корректно учитывающий нелинейность среды, неоднородность деформаций по толщине пластины и краевые условия на ее поверхности. Построена эффективная (2 + 1)-мерная модель, обобщающая статические нелинейно-геометрические уравнения Фёппля–Кармана. Найдены двумерные солитоны продольной деформации. Исследованы условия их существования и устойчивость.

К настоящему времени наиболее полно теоретически описаны, главным образом, продольные нелинейно-упругие волны в безграничной среде (см. [1] и цитируемую там литературу). Особенности формирования и физические свойства нелинейно-упругих возбуждений и структур в ограниченных образцах и слоистых материалах в области их сильного поперечного изгиба практически не изучены. Вывод упрощенных моделей для нелинейно-упругих тел основывался на физически наглядных геометрических гипотезах, справедливость которых трудно оценить количественно. Нередко такие приближения не удовлетворяли краевым условиям на поверхности образцов. Это привело к неаккуратному обращению с малыми членами и различным вариантам написания основных формул в нелинейной теории упругих стержней, пластин [2–5] и оболочек.

Ниже предлагается вариант теории возмущений для построения упрощенной нелинейной (2 + 1)-мерной модели для тонких пластин, амплитуда изгиба которых сравнима с их толщиной. Такой изгиб пластин считается сильным. Используется нелинейная теория упругости [6], в которой упругая энергия среды не содержит градиентов от лагранжева тензора деформаций. Поэтому исходные (3 + 1)-мерные уравнения нелинейной теории упругости не содержат дисперсионных слагаемых. Интересно, что в эффективной (2 + 1)-мерной модели тонких пластин слагаемые линейной и нелинейной дисперсии появляются в результате исключения пространственной переменной, характеризующей неоднородность деформации по нормали к пластине, и учета граничных условий на ее развитой поверхности. При балансе эффектов нелинейности и дисперсии возможно образование на поверхности пластины солитоноподобных состояний. Поэтому при построении упрощенных (2 + 1)-мерных нелинейных уравнений для пластины следует тщательно удовлетворить краевым условиям на ее развитой поверхности. С этой целью решается последовательность краевых задач в направлении нормали к плоскости пластины с контролируемой точностью по параметрам, характеризующим пространственно-временную деформацию пластины, геометрическую и физическую нелинейность среды. Краевые условия на боковых гранях пластины трансформированы в эффективные граничные условия для (2 + 1)-мерной модели.

Первые порядки предложенной теории возмущений в квазистатическом пределе приводят к известным уравнениям статики гибких пластин [7, 8]. Однако такое "геометрическое" приближение не описывает в полной мере нелинейной динамики сильных изгибов пластины, поскольку для квазиодномерных деформаций нелинейные двумерные уравнения редуцируются к линейным. Чтобы корректно учесть эффекты геометрической и физической нелинейности среды, рассматриваются следующие порядки теории возмущений. В результате получена эффективная (2 + 1)-мерная модель, которая адекватно описывает взаимодействие продольных деформаций, поперечных кручений и изгибов пластины, а также локальные изменения инерционных свойств пластины вследствие ее искривлений. В упрощенных уравнениях поперечное нагружение пластины моделируется источниками.

Ниже рассматривается модельная задача об устойчивости и авторезонансных колебаниях пластины, которая иллюстрирует недостаточность нелинейно-геометрического приближения Фёппля–Кармана [7, 8]. Приближения, основанные на геометрических гипотезах или разложениях смещений в ряды Тейлора по координате, перпендикулярной к поверхности пластины, часто не удовлетворяют граничным условиям. Поэтому могут приводить к неверным оценкам и качественным выводам при теоретическом описании нелинейных, в частности солитоноподобных, состояний в пластине, что иллюстрируется на примере мультисолитонов продольной деформации в пластине.

Формирование чисто продольных деформаций пластины соответствует более быстрым процессам и требует специального рассмотрения.

1. Основные соотношения нелинейной теории упругости. В нелинейной теории конечных деформаций упругая энергия среды записывается в форме разложения по инвариантам лагранжева тензора деформаций с компонентами

$$\eta_{ik} = \frac{1}{2}[\partial_i u_k + \partial_k u_i + \partial_k u_l \partial_i u_l] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial X_n}{\partial x_i}\frac{\partial X_n}{\partial x_k} - \delta_{ik}\right] \tag{1.1}$$

Здесь x_k – координаты материальной точки среды до деформации, $X_k = x_k + u_k(\mathbf{x}, t)$ – координаты той же точки после деформации ($i, k = 1, 2, 3$), $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор смещений. Для изотропной среды в качестве независимых инвариантов тензора $\|\eta_{ik}\|$, через которые могут быть выражены остальные инварианты, выберем [7]

$$I_1 = \eta_{ll}, \quad I_2 = \eta_{ik}^2, \quad I_3 = \eta_{ik}\eta_{kl}\eta_{li} \tag{1.2}$$

Выражение для упругой энергии изотропного нелинейного тела представим в форме

$$W = \int\limits_{V_0} \phi \mathrm{d}\mathbf{x}', \quad \phi = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + \frac{A}{3}I_3 + BI_1I_2 + \frac{C}{3}I_1^3 \tag{1.3}$$

Здесь ϕ – энергия, отнесенная к единице объема тела до деформации. Упругие модули λ, μ, A, B, C предполагаются сравнимыми по порядку величины. Далее для пластины будет выделена область пространственно-временных масштабов и внешних нагрузок, где, вследствие малости деформаций, можно пренебречь другими инвариантами в разложении энергии (1.3).

Динамические уравнения для нелинейно-упругого тела могут быть получены из принципа Гамильтона

$$\delta S + \int\limits_{t_0}^{t} \delta A \mathrm{d}t' = 0; \quad S = \int\limits_{t_0}^{t} [K - U]\mathrm{d}t' \tag{1.4}$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$K = \int\limits_{V_0} \frac{\rho_0}{2}(\partial_t u_i)^2 \mathrm{d}\mathbf{x}' \tag{1.5}$$

где ρ_0 – плотность материала в недеформированном состоянии (далее считаем $\rho_0 =$ $=$ const), интегрирование производится по объему V_0 недеформированного тела.

Потенциальная энергия U включает упругую энергию W тела и энергию его взаимодействия W_1 с внешними массовыми силами

$$U = W + W_1; \quad W_1 = -\int\limits_{V_0} \rho_0 P_i u_i \mathrm{d}\mathbf{x}' \tag{1.6}$$

Здесь P_i – внешняя массовая сила, $\rho_0 P_i$ – сила, действующая на единицу объема тела до деформации.

Работа внешних поверхностных сил имеет вид [6]

$$\delta A = \int_\sigma \delta u_i T_{ij}^{\mathrm{ext}} \det\left\|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right\| \frac{\partial x^s}{\partial X_j} d\sigma_s \tag{1.7}$$

Интегрирование производится по поверхности σ недеформированного тела.

Принцип Гамильтона (1.4) дает необходимые динамические уравнения [6]

$$-\rho_0 \partial_t^2 u_i + \partial_s P_{is} + \rho_0 P_i = 0; \quad P_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{ij}} + \partial_k u_i \frac{\partial \phi}{\partial \eta_{kj}} \tag{1.8}$$

где $\|P_{ij}\|$ – тензор Пиолы–Кирхгофа, а также краевые условия, отнесенные к поверхности недеформированной пластины,

$$P_{is} n_s\big|_\sigma = T_{ij}^{\mathrm{ext}} \det\left\|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\right\| \frac{\partial x_s}{\partial X_j} n_s\Big|_\sigma \tag{1.9}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности σ.

2. Построение упрощенных (2 + 1)-мерных уравнений для нелинейно-упругой пластины. Рассмотрим нелинейно-упругую пластину, параллельную плоскости x_1Ox_2. Пусть d – толщина пластины вдоль оси x_3, l – характерный пространственный масштаб ее деформаций в плоскости x_1Ox_2, a и $t_{\mathrm{ch}} = l/\sqrt{\mu/\rho_0}$ – характерные амплитуда смещений и время деформаций.

Введем два малых параметра $\epsilon_1 = a/l$ и $\epsilon_2 = d/l$, которые отражают порядок малости амплитуд смещений и толщины пластины. В исходных динамических уравнениях (8) перейдем к безразмерным переменным

$$\xi_\alpha = x_\alpha/l, \quad \eta = x_3/d, \quad \tau = t/t_{\mathrm{ch}}, \quad u_i = a\bar{u}_i \tag{2.1}$$

Тогда они примут вид

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_\tau^2\bar{u}_\alpha = \rho_0 d P_\alpha + \epsilon_2\partial_\beta P_{\alpha\beta} + \partial_\eta P_{\alpha 3} \tag{2.2}$$

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_\tau^2\bar{u}_3 = \rho_0 d P_3 + \epsilon_2\partial_\beta P_{3\beta} + \partial_\eta P_{33} \tag{2.3}$$

Здесь и далее греческие индексы α, $\beta = 1, 2$; $\partial_\alpha = \partial/\partial\xi_\alpha$.

Рассмотрим область сильных изгибов пластины, где справедлива приближенная оценка $\epsilon_1 \sim \epsilon_2$ (или $a \sim d$). Считаем, что по порядку величины массовая сила и внешнее напряжение на развитых плоскостях ($\eta = \pm 1/2$) пластины характеризуются соотношениями

$$d\rho_0 P_3/\mu = O(\epsilon_1^4), \quad d\rho_0 P_\alpha/\mu = O(\epsilon_1^5); \quad T_{33}^{\mathrm{ext}}/\mu = O(\epsilon_1^4), \quad T_{\alpha 3}^{\mathrm{ext}}/\mu = O(\epsilon_1^5) \tag{2.4}$$

Внешнее нагружение на боковых гранях пластины значительно больше:

$$T_{\alpha\beta}^{\mathrm{ext}}/\mu = O(\epsilon_1^2) \tag{2.5}$$

В данной работе поля $\bar{u}_\alpha$ описывают не только локальные деформации материала с характерным масштабом l, но и квазиоднородное плоское напряженное состояние пластины, при котором $\partial_\beta\bar{u}_\alpha = O(\epsilon_1^2)$. Этими условиями выделяется область физических параметров задачи, в которой нелинейная динамика пластины будет описана в рамках более простой нелинейной (2 + 1)-мерной модели.

Для построения упрощенных уравнений будем искать решения исходных (3 + 1)-мерных уравнений (2.2), (2.3) в виде

$$\bar{u}_3 = \bar{u}_3^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_3^{(n)}, \quad \bar{u}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_\alpha^{(n)} \tag{2.6}$$

Верхние индексы указывают общий порядок соответствующих слагаемых по параметрам ϵ_1 и ϵ_2 ($\epsilon_1 \sim \epsilon_2$).

Ограничимся рассмотрением сравнительно медленных процессов

$$\partial_\tau^2 \bar{u}_3/\bar{u}_3 = T_{\alpha\beta}^{\text{ext}}/\mu = O(\epsilon_1^2) \tag{2.7}$$

Чтобы отметить первый порядок производной по времени, формально заменим $\partial_\tau \to$ $\to \partial_{\tau_1}$.

Разложению (2.6) соответствует следующее представление:

$$P_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} \tag{2.8}$$

Подставляя выражение (2.8) в равенства (2.2), (2.3) и приравнивая нулю слагаемые одного порядка по параметрам ϵ_1 и ϵ_2, получаем цепочку уравнений. Необходимые граничные условия находим в результате разложения правой части равенства (1.9) по параметрам ϵ_1 и ϵ_2. Первые порядки теории возмущений дают простые краевые задачи

$$\partial_\eta P_{33}^{(i)} = 0, \quad P_{33}^{(i)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{2.9}$$

$$\partial_\eta P_{\alpha 3}^{(k)} = 0, \quad P_{\alpha 3}^{(k)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = 0, \quad k = 1, 2 \tag{2.10}$$

В результате их решения находятся выражения для полей $\bar{u}_k^{(i)}$. Функции $\bar{u}_3^{(i)}$ ($i = 0, 1$) не зависят от η. Это упрощает дальнейшие расчеты. Далее функции, не зависящие от η, будем отмечать тильдой: $\bar{u}_3^{(i)} = \tilde{u}_3^{(i)}$ ($i = 0, 1$). Для $\bar{u}_\alpha^{(k)}$ ($k = 1, 2$), $\bar{u}_3^{(n)}$ ($n = 2, 3$) получаются выражения

$$\bar{u}_\alpha^{(k)} = -\epsilon_2 \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(k-1)} \eta + \tilde{u}_\alpha^{(k)}, \quad k = 1, 2 \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_3^{(n)} = &-\frac{1}{\lambda + 2\mu}\bigg(-\frac{\lambda}{2}(\epsilon_2 \eta)^2 \Delta \tilde{u}_3^{(n-2)} + \\ &+ [\lambda \epsilon_2 \partial_\alpha \tilde{u}_\alpha^{(n-1)} + \epsilon_1 \epsilon_2 (\lambda + \mu)(\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)})^{(n-2)}]\eta\bigg) + \tilde{u}_3^{(n)}, \quad n = 2, 3 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Функции $\tilde{u}_\alpha^{(k)}$, $\tilde{u}_3^{(n)}$ возникли при интегрировании и пока произвольны. Они будут определены следующими порядками теории возмущении.

Через функции $\tilde{u}_\alpha^{(m-1)}$ и $\tilde{u}_3^{(m-2)}$ ($m = 2, 3$) можно выразить компоненты двумерного тензора деформаций

$$\eta_{\alpha\beta}^{(m)} = \epsilon_{\alpha\beta}^{(m)} - \epsilon_1 \epsilon_2 \eta \partial_\alpha \partial_\beta \tilde{u}_3^{(m-2)}; \quad m = 2, 3 \tag{2.13}$$

Тензор с компонентами

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{(m)} = (\epsilon_1/2)[\partial_\alpha \tilde{u}_\beta^{(m-1)} + \partial_\beta \tilde{u}_\alpha^{(m-1)} + \epsilon_1(\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)})^{(m-2)}]$$

описывает однородную по толщине пластины "плоскую" деформацию. Здесь и далее запись типа $(\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(\cdot)} \partial_\beta \tilde{u}_3^{(\cdot)})^{(m-2)}$ подразумевает сумму всех произведений из величин $\partial_\alpha \tilde{u}_3^{(i)}$ и $\partial_\beta \tilde{u}_3^{(k)}$, удовлетворяющих ограничению $i + k = m - 2$. Для дальнейших вычислений полезна связь между $\eta_{33}^{(n)}$ и $\eta_{\alpha\alpha}^{(n)}$:

$$\eta_{33}^{(n)} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\eta_{\alpha\alpha}^{(n)}, \quad n = 2, 3 \tag{2.14}$$

Общую схему интегрирования уравнений теории возмущений поясним на примере следующей краевой задачи (всюду далее, если не оговорено иное, $m = 3, 4$):

$$\partial_\eta P_{\alpha 3}^{(m)} + \epsilon_2 \partial_\beta P_{\alpha\beta}^{(m-1)} = 0 \tag{2.15}$$

$$P_{\alpha 3}^{(m)}\Big|_{\eta = \pm 1/2} = 0 \tag{2.16}$$

В уравнениях (2.15) тензор $\left\|P_{\alpha\beta}^{(k)}\right\|$ ($k = 2, 3$) симметричен и выражается через уже введенные функции:

$$P_{\alpha\beta}^{(k)} = (\partial\phi/\partial\eta_{\alpha\beta})^{(k)} = \lambda(\eta_{\gamma\gamma}^{(k)} + \eta_{33}^{(k)})\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\eta_{\alpha\beta}^{(k)} = -\epsilon_1\epsilon_2\eta\hat{L}_{\alpha\beta}\tilde{u}_3^{(k-2)} + \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} \tag{2.17}$$

Здесь $\hat{L}_{\alpha\beta} = \lambda'\Delta\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\partial_\alpha\partial_\beta$ – дифференциальный оператор, $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ – компоненты симметричного тензора, характеризующего плоское напряженное состояние пластины,

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = \lambda'\epsilon_{\gamma\gamma}^{(k)}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}^{(k)} \tag{2.18}$$

$\lambda' = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ – эффективный упругий модуль плоской деформации. Напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)}$ вызваны нагрузкой на боковых гранях пластины. В частности, когда на боковых гранях пластины нет нагрузок порядка ϵ_1^3, можно положить $\tilde{u}_3^{(1)} = \tilde{u}_\alpha^{(2)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(3)} = 0$, и теория возмущений значительно упростится.

Проинтегрируем уравнения (2.15) по η в пределах от $\eta = 0$ до некоторого значения η ($|\eta| \le 1/2$). Получим

$$P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta) - P_{\alpha 3}^{(m)}(0) - \frac{\lambda' + 2\mu}{2}\epsilon(\epsilon_2\eta)^2\Delta\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)} + \epsilon_2\eta\partial_\beta\sigma_{\alpha\beta}^{(m-1)} = 0 \tag{2.19}$$

В соотношениях (2.19) явно указана лишь зависимость от переменной η. Полагая в (2.19) $\eta = \pm 1/2$ и учитывая граничные условия (2.16), получаем систему, из которой находим $P_{\alpha 3}^{(m)}(0)$ и уравнения, связывающие функции $\tilde{u}_\alpha^{(m-2)}$ и $\tilde{u}_3^{(m-3)}$:

$$P_{\alpha 3}^{(m)}(0) = -\frac{\lambda' + 2\mu}{8}\epsilon_1\epsilon_2^2\Delta\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)}, \quad \partial_\beta\sigma_{\alpha\beta}^{(m-1)} = 0 \tag{2.20}$$

Возвращаясь от уравнений (2.20) к уравнениям (2.19), находим

$$P_{\alpha 3}^{(m)}(\eta) = \frac{\lambda' + 2\mu}{2}\epsilon_1\epsilon_2^2\left(\eta^2 - \frac{1}{4}\right)\Delta\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)} \tag{2.21}$$

С другой стороны, по определению (второе соотношение (1.8)), имеем

$$P_{\alpha 3}^{(m)} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta_{\alpha 3}}\right)^{(m)} = 2\mu\eta_{\alpha 3}^{(m)} = \mu\Big(\epsilon_1\partial_\alpha\bar{u}_3^{(m-1)} + \frac{a}{d}\partial_\eta\bar{u}_\alpha^{(m)} +$$
$$+\frac{a}{d}\epsilon_1[(\partial_\alpha\bar{u}_\gamma^{(\cdot)}\partial_\eta\bar{u}_\gamma^{(\cdot)})^{(m-1)} + (\partial_\alpha\bar{u}_3^{(\cdot)}\partial_\eta\bar{u}_3^{(\cdot)})^{(m-1)}]\Big) \qquad (2.22)$$

Заметим, что в правой части этого равенства все слагаемые кроме $(a/d)\partial_\eta\bar{u}_\alpha^{(m)}$ уже известны. Поэтому объединяя соотношения (2.21), (2.22), можно вычислить продольные смещения

$$\frac{a}{d}\bar{u}_\alpha^{(m)} = \epsilon_2^2\epsilon_1\left[\left(1+\frac{\lambda'}{4\mu}\right)\frac{\eta^3}{3} - \frac{\lambda'+2\mu}{8}\eta\right]\Delta\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)} +$$
$$+\frac{\epsilon_2\eta^2\lambda'}{4\mu}[\partial_\alpha\epsilon_{\gamma\gamma}^{(m-1)} - \epsilon_1^2\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)}\Delta\tilde{u}_3^{(0)}] + \epsilon_1\eta\Big[-\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-1)} + \epsilon_1(\partial_\alpha\tilde{u}_\gamma^{(\cdot)}\partial_\gamma\tilde{u}_3^{(\cdot)})^{(m-2)} +$$
$$+\frac{\lambda'}{2\mu}\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)}\epsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \frac{\epsilon_1^2}{2}\partial_\alpha\tilde{u}_3^{(m-3)}(\partial_\gamma\tilde{u}_3^{(0)})^2\Big] + \frac{a}{d}\tilde{u}_\alpha^{(m)} \qquad (2.23)$$

Здесь $\tilde{u}_\alpha^{(m)} = \tilde{u}_\alpha^{(m)}$ (ξ_1, ξ_2, τ) – функции, возникшие при интегрировании уравнений (2.21), (2.22).

При $s = 3, 4$ компоненты $P_{3\beta}^{(s)}$ и $P_{\beta 3}^{(s)}$ уже не равны друг другу. Однако, согласно определению (второе соотношение (1.8)), они связаны между собой и функция $P_{3\beta}^{(s)}$ также известна. Поэтому из уравнений теории возмущений

$$d\rho_0 P_3^{(s+1)} + \epsilon_2\partial_\beta P_{3\beta}^{(s)} + \partial_\eta P_{33}^{(s+1)} = \mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_{\tau_1}^2\tilde{u}_3^{(s-3)} \qquad (2.24)$$

можно найти $P_{33}^{(s+1)}$ при $s = 3, 4$. При интегрировании по η уравнений (2.24) следует учесть ненулевые граничные условия на поверхности пластины (см. (1.9), (2.4))

$$P_{33}^{(s+1)}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = [T_{33}^{\text{ext}}]^{(s+1)} \qquad (2.25)$$

и массовые силы, если они имеются.

Схема интегрирования уравнения (2.24) не отличается от рассмотренной на примере уравнения (2.15). В результате простых вычислений находим $P_{33}^{(n)}(\eta)$ и уравнение эволюции для поперечных смещений пластины

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_{\tau_1}^2\tilde{u}_3^{(n-4)} = \rho_0 d\langle P_3^{(n)}\rangle + \{P_{33}^{(n)}\} -$$
$$-\frac{\lambda'+2\mu}{12}\epsilon_1\epsilon_2^3\Delta^2\tilde{u}_3^{(n-4)} + \epsilon_1\epsilon_2\partial_\beta[\partial_\gamma\tilde{u}_3^{(\cdot)}\sigma_{\gamma\beta}^{(\cdot)}]^{(n-2)}, \quad n = 4, 5 \qquad (2.26)$$

Здесь и далее для сокращения записи введены обозначения

$$\langle f\rangle = \int_{-1/2}^{1/2} f(\eta)d\eta, \quad \{f\} = f\left(\eta = \frac{1}{2}\right) - f\left(\eta = -\frac{1}{2}\right) \qquad (2.27)$$

В статическом случае ($\partial^2_{\tau_1}\tilde{u}^{(0)}_3 = 0$) при отсутствии на боковых гранях пластины нагрузок порядка ϵ_1^3 второе уравнение (2.20) ($m = 3$) и уравнение (2.26) ($n = 4$) образуют замкнутую систему, совпадающую с уравнениями Фёппля–Кармана для тонкой пластины [7], которые обычно выводятся из условий равновесия при использовании геометрических гипотез. Такое приближение учитывает только геометрическую нелинейность среды и недостаточно для изучения нелинейной динамики пластин. Действительно, вследствие второго уравнения (2.20) ($m = 3$), последний член в уравнении (2.26) ($n = 4$) может быть записан в форме

$$\epsilon_1\epsilon_2\partial_\beta[\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3\sigma^{(2)}_{\alpha\beta}] = \epsilon_1\epsilon_2\partial_\alpha\partial_\beta\tilde{u}^{(0)}_3\sigma^{(2)}_{\alpha\beta} + o(\epsilon_1^4)$$

В результате нелинейное уравнение (2.26) становится близким к линейному, а в случае одномерных деформаций редуцируется к линейному уравнению. Поэтому нелинейная динамика тонких пластин полностью проявится только в следующих порядках теории возмущений. Подчеркнем, что эта динамика будет обусловлена не только геометрической, но и физической нелинейностью среды. Физическая нелинейность среды характеризуется инвариантами третьего и более высоких порядков в разложении упругой энергии (1.3). Чтобы выйти за рамки "квазилинейного" приближения (2.20), (2.26), перейдем к рассмотрению уравнений теории возмущений пятого и шестого порядков по параметрам ϵ_1 и ϵ_2. Эти вычисления более утомительны, но осуществляются по прежней схеме.

Динамические уравнения для продольных деформаций пластины имеют вид

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial^2_{\tau_1}\tilde{u}^{(1)}_\alpha = F^{(5)}_\alpha + \epsilon_2\partial_\beta\sigma^{(4)}_{\alpha\beta} + \frac{\epsilon_2^3\lambda'(\lambda'+2\mu)}{48\mu}\Delta\partial_\alpha\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma} + \epsilon_2\partial_\beta\Pi^{(4)}_{\alpha\beta} \tag{2.28}$$

Здесь

$$\sigma^{(n)}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\lambda'\epsilon^{(n)}_{\gamma\gamma} + 2\mu\epsilon^{(n)}_{\alpha\beta}$$

$$\epsilon^{(n)}_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_1}{2}(\partial_\alpha\tilde{u}^{(n-1)}_\beta + \partial_\beta\tilde{u}^{(n-1)}_\alpha + \epsilon_1[\partial_\alpha\tilde{u}^{(\cdot)}_\gamma\partial_\beta\tilde{u}^{(\cdot)}_\gamma]^{(n-2)} + \epsilon_1[\partial_\alpha\tilde{u}^{(\cdot)}_3\partial_\beta\tilde{u}^{(\cdot)}_3]^{(n-2)}), \quad n = 2, 4$$

С внешним нагружением пластины связаны эффективные продольные силы

$$F^{(5)}_\alpha = \frac{\epsilon_2\lambda'}{2\mu}\partial_\alpha[d\rho_0\langle\eta P^{(4)}_3\rangle + \{\eta P^{(4)}_{33}\}] + \{P^{(5)}_{\alpha 3}\} + d\rho_0\langle P^{(5)}_\alpha\rangle \tag{2.29}$$

где, согласно соотношениям (1.9) и (2.4),

$$P^{(5)}_{\alpha 3}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = [T^{\mathrm{ext}}_{\alpha 3}]^{(5)}$$

Интересно, что неоднородное поперечное нагружение пластины поверхностными и массовыми силами порождает эффективную продольную силу (первое слагаемое в правой части выражения (2.29)). Компоненты тензора $\|\Pi^{(4)}_{\alpha\beta}\|$ имеют вид

$$\Pi^{(4)}_{\alpha\beta} = [a_1(\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta})^2 + a_2(\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma})^2 + b_1(\epsilon_1\epsilon_2\partial_\nu\partial_\mu\tilde{u}^{(0)}_3)^2 + b_2(\epsilon_1\epsilon_2\Delta\tilde{u}^{(0)}_3)^2]\delta_{\alpha\beta} + \tag{2.30}$$
$$+ 2a_1\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma}\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta} + c(\epsilon_1\epsilon_2)^2\Delta\tilde{u}^{(0)}_3\partial_\beta\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3 + \frac{1}{12}(\lambda'+2\mu)(\epsilon_1\epsilon_2)^2\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3\Delta\partial_\beta\tilde{u}^{(0)}_3 + \epsilon_1\partial_\gamma\tilde{u}^{(1)}_\alpha\sigma^{(2)}_{\gamma\beta}$$

где

$$a_1 = \frac{A}{2} + \frac{2\mu B}{\lambda+2\mu}, \quad a_2 = \frac{1}{(\lambda+2\mu)^3}[-\lambda^3 A + 6\mu\lambda^2 B + 8\mu^3 C] - \frac{A}{2}$$

$$b_1 = \frac{1}{24}[2a_1 + 3\mu - \lambda'], \quad b_2 = \frac{a_2}{12} - \frac{1}{8}\left[\mu + \frac{\lambda'^2}{2\mu}\right], \quad c = \frac{1}{6}\left[a_1 + \frac{3\mu}{2} + \frac{\lambda'}{4}\right]$$

В соотношении (2.30) нелинейные члены, зависящие от $\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta}$, отражают взаимодействие продольных деформаций пластины, в то время как слагаемые, зависящие от $\tilde{u}^{(0)}_3$, индуцированы поперечными изгибами пластины, ее кручениями и кривизной.

Динамическое уравнение для поправки $\tilde{u}^{(2)}_3$ имеет вид

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\left[\partial^2_{\tau_1}\tilde{u}^{(2)}_3 - \frac{\epsilon_2^2}{12}\left(1-\frac{\lambda'}{2\mu}\right)\partial^2_{\tau_1}\Delta\tilde{u}^{(0)}_3\right] =$$

$$= q^{(6)} - \frac{\epsilon_1\epsilon_2^3}{12}(\lambda'+2\mu)\epsilon_1\epsilon_2^3\Delta^2\tilde{u}^{(2)}_3 + \epsilon_1\epsilon_2\partial_\alpha[\partial_\beta\tilde{u}^{(\cdot)}_3\sigma^{(\cdot)}_{\alpha\beta}]^{(4)} -$$

$$-\frac{\epsilon_1\epsilon_2^5}{12}(\lambda'+2\mu)\left[\frac{1}{5}+\frac{\lambda'}{8\mu}\right]\Delta^3\tilde{u}^{(0)}_3 + \epsilon_1\partial_\alpha\Pi^{(5)}_\alpha \tag{2.31}$$

Здесь $q^{(6)}$ – эффективное двумерное поле внешних сил, приводящих к поперечным изгибам пластины:

$$q^{(6)} = \epsilon_2\partial_\alpha\left(\{\eta P^{(5)}_{\alpha 3}\} + d\rho_0\langle\eta P^{(5)}_\alpha\rangle + \left[1+\frac{\lambda'}{2\mu}\right]\epsilon_1\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3[\{\eta P^{(4)}_{33}\} + d\rho_0\langle\eta p^{(4)}_3\rangle]\right) +$$

$$+\frac{\epsilon_2^2\lambda'}{4\mu}\Delta(\{\eta^2 P^{(4)}_{33}\} + d\rho_0\langle\eta^2 P^{(4)}_3\rangle) + \{P^{(6)}_{33}\} + d\rho_0\langle P^{(6)}_3\rangle \tag{2.32}$$

Граничные условия на поверхности пластины

$$P^{(6)}_{33}\Big|_{\eta=\pm 1/2} = ([T^{\text{ext}}_{33}]^{(6)} + [T^{\text{ext}}_{33}]^{(4)}\epsilon_1\partial_\alpha\bar{u}^{(1)}_\alpha + [T^{\text{ext}}_{3\alpha}]^{(5)}\epsilon_1\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3)\Big|_{\eta=\pm 1/2} \tag{2.33}$$

следуют из разложения (1.9) с точностью до шестого порядка по параметрам ϵ_1, ϵ_2.

Величина $\Pi^{(5)}_\alpha$ учитывает эффекты нелинейной дисперсии, а также взаимодействие неоднородных кручений, искривлений и изгибов пластины друг с другом и с ее продольными деформациями:

$$\Pi^{(5)}_\alpha = -\epsilon_1\epsilon_2^2\partial_\beta\left(2\tilde{b}_1\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma}\partial_\beta\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3 + \tilde{c}\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta}\Delta\tilde{u}^{(0)}_3 - \frac{\epsilon_1}{12}[\partial_\gamma\tilde{u}^{(0)}_3\hat{L}_{\alpha\beta}\tilde{u}^{(1)}_\gamma + \epsilon_1(\partial_\gamma\tilde{u}^{(0)}_3)^2\hat{L}_{\alpha\beta}\tilde{u}^{(0)}_3]\right) -$$

$$-\epsilon_1\epsilon_2^2\partial_\alpha(2\tilde{b}_2\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma}\Delta\tilde{u}^{(0)}_3 + \tilde{c}\epsilon^{(2)}_{\gamma\sigma}\partial_\gamma\partial_\sigma\tilde{u}^{(0)}_3) +$$

$$+\epsilon_1\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3\left(\left[\tilde{b}_1(\partial_\gamma\partial_\sigma\tilde{u}^{(0)}_3)^2 + \tilde{b}_2(\Delta\tilde{u}^{(0)}_3)^2 - \frac{1}{12}(\partial_\sigma\partial_\gamma\tilde{u}^{(0)}_3)\hat{L}_{\sigma\gamma}\tilde{u}^{(0)}_3\right](\epsilon_1\epsilon_2)^2 + a_1(\epsilon^{(2)}_{\gamma\sigma})^2 +\right.$$

$$\left.+a_2(\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma})^2\right) + \epsilon_1\partial_\beta\tilde{u}^{(0)}_3\left\{\frac{\epsilon_2^2\lambda'}{48\mu}\hat{L}_{\alpha\beta}\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma} + 2a_1\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma}\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta} + (\epsilon_1\epsilon_2)^2\tilde{c}\partial_\beta\partial_\alpha\tilde{u}^{(0)}_3\Delta\tilde{u}^{(0)}_3\right\} -$$

$$-\frac{(\epsilon_1\epsilon_2)^2}{12}\partial_\beta\partial_\gamma\tilde{u}^{(0)}_3\hat{L}_{\gamma\beta}\tilde{u}^{(1)}_\alpha \tag{2.34}$$

где

$$\tilde{b}_1 = b_1 - \frac{\mu}{12},\quad \tilde{b}_2 = b_2 + \frac{\mu}{12},\quad \tilde{c} = c - \frac{\lambda'+2\mu}{12}$$

Отметим, что второе слагаемое в квадратных скобках в левой части уравнения (2.31) учитывает изменение инерционных свойств пластины, обусловленное локальными изменениями ее кривизны.

Полученные результаты можно объединить и построить эффективную систему (2 + 1)-мерных уравнений для тонких пластин, изгиб которых сравним с их толщиной. Эти уравнения определят полные продольные и поперечные смещения пластины

$$v_\alpha = \tilde{u}_\alpha^{(1)} + \tilde{u}_\alpha^{(2)} + \tilde{u}_\alpha^{(3)}, \quad v_3 = \tilde{u}_3^{(0)} + \tilde{u}_3^{(1)} + \tilde{u}_3^{(2)}$$

Комбинируя приближения (2.20) и (2.28), (2.26) и (2.31), нетрудно убедиться, что с точностью до слагаемых шестого порядка по параметрам ϵ_1, ϵ_2 включительно уравнения эволюции полей v_α и v_3 таковы:

$$\epsilon_1\epsilon_2\mu\partial^2_{\tau_1} v_\alpha = F^{(5)}_\alpha + \epsilon_2\partial_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\epsilon_2^3\lambda'(\lambda'+2\mu)}{48\mu}\Delta\partial_\alpha\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma} + \epsilon_2\partial_\beta\Pi^{(4)}_{\alpha\beta} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_1\epsilon_2\mu\left[\partial^2_{\tau_1}v_3 - \frac{\epsilon_2^2}{12}\left(1-\frac{\lambda'}{2\mu}\right)\partial^2_{\tau_1}\Delta v_3\right] &= \\ = q^{\mathrm{eff}} - \frac{\epsilon_1\epsilon_2^3}{12}(\lambda'+2\mu)\Delta^2 v_3 + \epsilon_1\epsilon_2\partial_\beta[\partial_\alpha v_3\sigma_{\alpha\beta}] - \frac{\epsilon_1\epsilon_2^5}{12}&(\lambda'+2\mu)\left[\frac{1}{5}+\frac{\lambda'}{8\mu}\right]\Delta^3 v_3 + \epsilon_2\partial_\alpha\Pi^{(5)}_\alpha\end{aligned} \tag{2.36}$$

Здесь введены двумерные деформации и напряжения

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_1}{2}[\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha + \epsilon_1\partial_\alpha v_\gamma\partial_\beta v_\gamma + \epsilon_1\partial_\alpha v_3\partial_\beta v_3]$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda'\epsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}$$

Эффективные двумерные силы имеют вид

$$q^{\mathrm{eff}} = \{P^{(4)}_{33} + P^{(5)}_{33}\} + d\rho_0\langle P^{(4)}_3 + P^{(5)}_3\rangle + q^{(6)} \tag{2.37}$$

Выражения для $\epsilon^{(2)}_{\alpha\beta}$, $\Pi^{(5)}_\alpha$ и $\Pi^{(4)}_{\alpha\beta}$ получены из введенных ранее формальной заменой $\tilde{u}^{(1)}_\alpha \to v_\alpha$, $\tilde{u}^{(0)}_3 \to v_3$. Замкнутая система (2.35), (2.36) является приближением, не нарушающим краевых условий на развитой поверхности пластины с точностью до членов $O(\epsilon_1^6)$. Полученные эффективные уравнения учитывают основные нелинейные взаимодействия в пластине. Они не редуцируются к линейным уравнениям в случае одномерных деформаций.

Заметим, что при учете соотношений (2.20) и (2.26) форма записи системы (2.35), (2.36) может быть видоизменена. В частности, используя соотношение (2.26), можно понизить общий порядок уравнения (2.36) – выразить производные $\Delta^3 v_3$ через производные второго и четвертого порядков.

Для полученной модели следует сформулировать эффективные краевые условия на боковых сторонах пластины. Они могут быть выведены из вариационного принципа (1.4) после подстановки в него выражений полей $\bar{u}^{(n)}_k$, найденных по теории возмущений. В результате простых интегрирований вариационная задача дает необходимые краевые условия на боковых сторонах пластины, а также условия, которые учитывают сосредоточенные силы в углах пластины. Можно показать, что такой алгоритм в четвертом порядке по параметрам ϵ_1, ϵ_2 приводит к граничным условиям, известным для уравнений Фёппля–Кармана [7, 8].

3. Простая модельная задача. Рассмотрим пластину, нагруженную внешними силами вдоль оси x_1

$$T_{11}^{\text{ext}}\Big|_{\xi_1 = \pm l_1} = O(\epsilon_1^2) + O(\epsilon_1^4)$$

Для простоты считаем, что на боковых гранях пластины отсутствуют напряжения T_{11}^{ext} порядка ϵ_1^3. При $\xi_1 = \pm l_1$ примем условия шарнирного опирания сторон пластины. Предположим, что при $\xi_2 = \pm l_2$ смещения пластины ограничены связями в направлении x_2, которые допускают смещения пластин только в направлениях x_1 и x_3. В этом случае

$$v_1 = v_1(\xi_1), \quad v_3 = v_3(\xi_1), \quad v_2 = 0$$

и задача упрощается.

Хотя экспериментальная реализация такой ситуации, по-видимому, затруднительна, тем не менее, ее рассмотрение полезно. Этот пример иллюстрирует недостаточность приближения Фёппля–Кармана [7, 8] и содержит особенности, которые могут встретиться в более сложных случаях.

Пусть постоянное напряжение T_{11}^{ext} близко к значению T_{11}^{lin}, при котором, согласно линейной теории, происходит потеря устойчивости пластины:

$$T_{11}^{\text{lin}}/\mu \sim T_{11}^{\text{ext}}/T_{11}^{\text{lin}} - 1 \sim \epsilon_1^2$$

Вблизи нейтральной устойчивости пластины динамика полей v_i будет медленной:

$$\begin{gathered}\frac{\partial_\tau^2 \bar{v}_i}{\bar{v}_i} \sim \frac{T_{11}^{\text{ext}} - T_{11}^{\text{lin}}}{\mu} \sim \epsilon_1^4 \\ -\frac{\epsilon_2^2}{12}(\lambda' + 2\mu)\partial_1^4 v_3 + \sigma_{11}^{(2)}\partial_1^2 v_3 = o(\epsilon_1^2)\end{gathered} \tag{3.1}$$

Чтобы отметить второй порядок производной по времени, формально заменим $\tau \to \tau_2$.

Эффективные граничные условия для пластин найдем по схеме, изложенной в предыдущем разделе. Считаем, что на сторонах $\xi_1 = \pm l_1$ пластины значения вариаций $\delta\tilde{u}_3^{(k)}$, $\delta\partial_1^2\tilde{u}_1^{(k)}$ фиксированы, а вариации $\delta\partial_1\tilde{u}_3^{(k)}$, $\delta\tilde{u}_1^{(k+1)}$ произвольны ($k = 0, 2$). При условиях (3.1) с уравнениями теории возмущений согласованы следующие краевые условия:

$$\begin{gathered}v_3\Big|_{\xi_1 = \pm l_1} = \partial_1^2 v_3\Big|_{\xi_1 = \pm l_1} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)}\Big|_{\xi_1 = \pm l_1} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(4)}\Big|_{\xi_1 = \pm l_1} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(4)} - ([T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)})^2\left(\frac{1}{2\mu} + \frac{3a_1 + a_2}{(\lambda' + 2\mu)^2}\right)\end{gathered} \tag{3.2}$$

Учитывая соотношения (3.1) и (3.2), из второго уравнения (2.20) и (2.28) находим

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(2)} = [T_{11}^{\text{ext}}]^{(2)} + o(\epsilon_1^2) \\ \sigma_{11}^{(4)} = -(\epsilon_1\epsilon_2)^2\left[b_1 + b_2 + c + \frac{\lambda' + 2\mu}{24}\right](\partial_1^2 v_3)^2 + \sigma_{11}^{(4)}\Big|_{\xi_1 = \pm l_1} + o(\epsilon_1^4)\end{gathered} \tag{3.3}$$

а из уравнения (2.36) получаем замкнутое уравнение для v_3

$$\partial_{\tau_2}^2 v_3 + a_2\partial_1^2 v_3 + a_4\partial_1^4 v_3 + g\partial_1[\partial_1 v_3(\partial_1^2 v_3)^2] = 0 \qquad (3.4)$$

где

$$a_2 = -\frac{1}{\mu}\left([T_{11}^{\mathrm{ext}}]^{(2)} + [T_{11}^{\mathrm{ext}}]^{(4)} - \frac{1}{2\mu}(([T_{11}^{\mathrm{ext}}]^{(2)})^2\right)$$

$$a_4 = \frac{\epsilon_2^2}{12\mu}\left(\lambda' + 2\mu + 2[T_{11}^{\mathrm{ext}}]^{(2)}\left(\frac{17}{10} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu}\right)\right)$$

$$g = \frac{1}{8\mu}(\epsilon_1\epsilon_2)^2(\lambda' + 2\mu)$$

Заметим, что вследствие оценок (3.1) при вычислении $\sigma_{11}^{(4)}$ пренебрегли инерционными членами, а при выводе уравнения (3.4) опустили слагаемые $\sim\partial_{\tau_2}^2\partial_1^2 v_3$.

Для рассматриваемой задачи нелинейно-геометрические уравнения Фёппля–Кармана редуцируются к линейным и приводят к пороговому напряжению

$$T_{11}^{\mathrm{lin}} = -\frac{1}{12}(\pi\epsilon_2)^2(\lambda' + 2\mu)$$

при котором появляется нейтрально-устойчивое решение вида $v_3 \sim \sin\pi(\xi_1 + l_1)$. В этом случае размерная $2L_1$ (безразмерная $2l_1$) длина пластины и характерный масштаб l связаны соотношением $2L_1/l = 2l_1 = n$, где n – натуральное число (значения $n > 1$ реализуются только при взрывной нагрузке [9]).

Будем искать решение нелинейного уравнения (3.4) в форме

$$v_3 = A(\tau_2)\sin\pi(\xi_1 + l_1) \qquad (3.5)$$

Секулярные члены в уравнении (3.4) будут устранены, если

$$\partial_{\tau_2}^2 A + \omega_0^2 A - \gamma A^3 = 0; \quad \omega_0^2 = a_4\pi^4 - a_2\pi^2, \quad \gamma = g\pi^6/4 \qquad (3.6)$$

Пусть $A = 1$, $\partial_{\tau_2}A = 0$ при $\tau_2 = 0$ (амплитуда a смещений пластины введена в определение ϵ_1). Уравнение (3.6) допускает первый интеграл

$$2(\partial_{\tau_2}A)^2 = \gamma(A^2 - 1)(A^2 - \beta); \quad \beta + 1 = 2\omega_0^2/\gamma \qquad (3.7)$$

Уравнение (3.7) имеет ограниченное решение только при $\beta \geq 1$ [10]. Нейтральная устойчивость пластины соответствует равенству. Отсюда получаем пороговое значение модуля внешнего нагружения

$$|T_{11}^{\mathrm{nl}}| = |T_{11}^{\mathrm{lin}}|\left(1 - \frac{(\pi\epsilon_2)^2}{6}\left[\frac{17}{10} + \frac{3a_1 + a_2}{\lambda' + 2\mu}\right]\right) - \frac{(T_{11}^{\mathrm{lin}})^2}{2\mu} - \frac{\lambda' + 2\mu}{32}(\pi^2\epsilon_1\epsilon_2)^2$$

Таким образом, потеря устойчивости нелинейно-упругой пластины произойдет при нагрузке, которая отличается от найденной из "квазилинейной" теории [7, 8].

Пусть продольная нагрузка на пластину меньше критической: $\omega_0^2 > \gamma$. Обсудим вынужденные колебания пластины под действием малой резонансной нагрузки с развитой поверхности

$$q^{\mathrm{eff}} = T_{33}^{\mathrm{ext}}\Big| = \alpha q(x, \tau_2)\cos\phi(\tau_2)$$

Здесь введен новый безразмерный параметр α, характеризующий малость внешнего воздействия ($0 < \alpha \le 1$). Пусть амплитуда внешней силы меняется медленно по сравнению с ее частотой: $\partial_{\tau_2} q / \partial_{\tau_2}\phi = o(1)$.

В этом случае для амплитуды колебаний пластины вместо уравнения (3.6) имеем

$$\partial^2_{\tau_2} A + \omega_0^2 A - \gamma A^3 = \alpha f(\tau_2)\cos\phi(\tau_2) \tag{3.8}$$

где

$$f(\tau) = \frac{1}{l_1\epsilon_1\epsilon_2\mu}\int_{-l_1}^{l_1} q(\tau, \xi_1)\sin\pi(\xi_1 + l_1)\mathrm{d}\xi_1$$

Были исследованы [11] свойства решений нелинейного уравнения (3.8) с нулевыми начальными данными $(A, \partial_{\tau_2}A) = (0, 0)$ и найдены условия, при которых энергия системы растет, хотя внешняя сила остается малой.

В отличие от резонанса в линейной задаче для возникновения нелинейного авторезонанса необходимо, чтобы амплитуда внешней силы превышала некоторое пороговое значение. Кроме того, в нелинейной задаче частота собственных колебаний пластины уменьшается с ростом амплитуды. Поэтому для достижения авторезонанса на первом этапе (пока амплитуда колебаний пластины еще мала) следует медленно варьировать фазу вынуждающей силы

$$\phi(\tau_2) = \omega_0\tau_2 + \alpha^{-2\lambda/3}\Phi(\alpha^{2(1+\lambda)/3}\tau_2), \quad \lambda \ge 0 \tag{3.9}$$

Были найдены [11] условия, которым должны удовлетворять функции f и Φ, чтобы задача имела растущие при $\tau_2 \to \infty$ решения. Эти условия зависят от скорости монотонного изменения частоты $\partial_{\tau_2}\phi$ вынуждающей силы и отвечают жесткому ($\lambda = 0$) и мягкому ($\lambda > 0$) режимам авторезонанса.

4. Нелинейная динамика продольных деформаций пластины. Особым видом деформаций тонкой пластины являются продольные деформации, происходящие в плоскости пластины и не сопровождающиеся ее изгибом. В отличие от поперечных изгибов пластины это сравнительно быстрые процессы. Поэтому приведенные выше уравнения теории возмущений следует изменить.

Пусть для изменения полей u_α в пространстве и величины внешнего нагружения справедливы прежние оценки, а оценка (2.7), характеризующая изменение смещений во времени, заменяется на $\partial_\tau \bar{u}_\alpha / \bar{u}_\alpha = O(1)$. В этом случае эффективные уравнения динамики продольных деформаций пластины получатся в результате незначительной модификации прежней схемы вычислений. С одной стороны, в уравнениях теории возмущений появятся дополнительные инерционные члены. С другой – все слагаемые, не содержащие производных по времени, получатся из прежних уравнений при условии $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$ ($k = 0, 1, 2$). Отметим ключевые моменты.

Существенно, что для рассматриваемых быстрых процессов инерционные свойства пластины и двумерные напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^{(k+1)}$ ($k = 1, 2$) оказываются связанными:

$$\mu\epsilon_1\partial^2_\tau\tilde{u}^{(k)}_\alpha = \partial_\beta\sigma^{(k+1)}_{\alpha\beta} + o(\epsilon_1^{k+1}) \tag{4.1}$$

Связь напряжений $\sigma_{\alpha\beta}^{(k+1)}$ со смещениями такая же, как связь (2.18) при $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$ ($k =$ $= 0, 1, 2$). Из уравнений эволюции для полей $\bar{u}_\alpha^{(3)}$ при учете связи

$$\mu\partial^2_\tau\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma} = (\lambda' + 2\mu)\Delta\epsilon^{(2)}_{\gamma\gamma} + o(\epsilon_1^2)$$

которая следует из соотношения (4.1), после интегрирования по η находим

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_\tau^2\tilde{u}_\alpha^{(3)} = \frac{\epsilon_2^3}{12}\mu\left(\frac{\lambda'}{2\mu}\right)^2\partial_\tau^2\partial_\alpha\epsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + F_\alpha^{(5)} + \epsilon_2\partial_\beta\sigma_{\alpha\beta}^{(4)} + \epsilon_2\partial_\beta\Pi_{\alpha\beta}^{(4)} \qquad (4.2)$$

Выражения для $\epsilon_{\alpha\beta}^{(2)}$, $\sigma_{\alpha\beta}^{(4)}$, $\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}$ получаются из прежних при $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$ ($k = 0, 1, 2$).

Эффективные нелинейные уравнения для результирующих смещений $v_\alpha = \tilde{u}_\alpha^{(1)} + \tilde{u}_\alpha^{(2)} + \tilde{u}_\alpha^{(3)}$ получим в результате объединения выражений (4.1) и (4.2)

$$\mu\epsilon_1\epsilon_2\partial_\tau^2 v_\alpha = F_\alpha^{(5)} + \epsilon_2\partial_\beta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\epsilon_1^3}{12}\mu\left(\frac{\lambda'}{2\mu}\right)^2\partial_\tau^2\partial_\alpha\epsilon_{\gamma\gamma}^{(2)} + \epsilon_2\partial_\beta\Pi_{\alpha\beta}^{(4)} \qquad (4.3)$$

где

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda'\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\gamma} + 2\mu\epsilon_{\alpha\beta}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\epsilon_1}{2}[\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha + \epsilon_1\partial_\alpha v_\gamma\partial_\beta v_\gamma], \quad \epsilon_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{\epsilon_1}{2}[\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha]$$

а в выражении для $\Pi_{\alpha\beta}^{(4)}$ следует произвести формальную замену $\tilde{u}_\alpha^{(1)} \to v_\alpha$.

Уравнения, аналогичные (4.3), были выведены ранее [12] из вариационного принципа с привлечением гипотезы обобщенного плоского напряженного состояния. Эта гипотеза в точности соответствует соотношению (2.12) при $n = 2$, $\tilde{u}_3^{(k)} = 0$ ($k = 0, 2$). Однако само по себе приближение (2.12), если пренебречь поправкой $\bar{u}_\alpha^{(3)}$, нарушает краевое условие $P_{\alpha 3}^{(3)}$ $(\eta = \pm 1/2) = 0$ на поверхности пластины. В то же время, учет $\bar{u}_\alpha^{(3)}$ приведет к исчезновению слагаемого линейной дисперсии $\sim\partial_\alpha\Delta\epsilon_{\gamma\gamma}^{(2)}$ в уравнениях работы [12]. В остальном уравнения работы [12] совпадают с уравнениями (4.3). Параметры β_1, β_2 из [12] связаны с модулями упругости a_1, a_2 данной работы соотношениями

$$\beta_1 = a_1/(\lambda' + 2\mu), \quad \beta_2 = 2(3a_1 + a_2)/(3[\lambda' + 2\mu])$$

Поскольку члены линейной дисперсии ответственны за образование солитоноподобных состояний, обсудим возможность формирования солитонов продольной деформации в пластине. Рассмотрим частный случай, когда продольные смещения пластины слабо зависят от пространственной координаты ξ_2, причем смещения вдоль оси x_2 малы по величине по сравнению со смещениями вдоль оси x_1: $v_2/v_1 \sim \partial_2 v_\alpha/\partial_1 v_\alpha \sim \epsilon_1$. Кроме того, пренебрежем поверхностными и массовыми силами.

Заметим, что при описании процессов, более медленно изменяющихся в пространстве, чем рассмотренные, нет необходимости заново обращаться к исходным (3 + 1)-мерным уравнениям и перестраивать теорию возмущений. Необходимую редукцию проще выполнить в рамках эффективных уравнений (4.3).

В данном случае в главном приближении отсутствуют локальные вращения среды вокруг оси x_3, поэтому сдвиговые деформации удовлетворяют условию $\partial_1 v_2 \simeq \partial_2 v_1$. С учетом этого замечания система (4.3) редуцируется к (2 + 1)-мерному уравнению для поля $\phi = \partial_1 v_1$:

$$\partial_\tau^2\phi = \left[\frac{\lambda' + 2\mu}{\mu}\Delta + \frac{\epsilon_2^2}{12}\left(\frac{\lambda'}{2\mu}\right)^2\partial_\tau^2\partial_1^2\right]\phi + g\partial_1^2\phi^2 \qquad (4.4)$$

В длинноволновом пределе для возмущений, распространяющихся со скоростями, близкими к скорости звука $s = \sqrt{(\lambda' + 2\mu)/\mu}$ (в безразмерных переменных), уравнение (4.4) может быть упрощено при использовании приближения $\partial_\tau^2\phi \approx s^2\partial_1^2\phi + o(\epsilon_1)$. В результате имеем

$$\partial_\tau^2\phi = [\alpha^{(2,0)}\Delta - \alpha^{(4,0)}\partial_1^4]\phi + g\partial_1^2\phi^2 \tag{4.5}$$

где

$$\alpha^{(2,0)} = \frac{\lambda' + 2\mu}{\mu}, \quad \alpha^{(4,0)} = -\frac{\epsilon_2^2}{12}\left(\frac{\lambda' s}{2\mu}\right)^2$$

$$g = \frac{\epsilon_1}{\mu}\left[3a_1 + a_2 + \frac{3}{2}(\lambda' + 2\mu)\right]$$

Если в уравнении (4.5) пренебречь зависимостью поля ϕ от пространственной координаты ξ_2, оно сводится к полностью интегрируемой модели Буссинеска. Если же ограничиться рассмотрением волн, движущихся в одну сторону вдоль оси x_1, со скоростями, близкими к скорости звука, модель (4.5) может быть редуцирована к (2 + 1)-мерной интегрируемой модели Кадомцева–Петвиашвили.

В общем случае было показано [13], что уравнение (4.5) допускает преобразование Бэклунда. Если ϕ_0 – некоторое решение этого уравнения и функция f удовлетворяет уравнению

$$[D_\tau^2 - \alpha^{(2,0)}(D_1^2 + D_2^2) + \alpha^{(4,0)}D_1^4 - 2g\phi_0 D_1^2]f \cdot f = 0 \tag{4.6}$$

то

$$\phi_1 = \phi_0 - 6\alpha^{(4,0)}g^{-1}\partial_1^2\ln f$$

также будет решением уравнения (4.5). Здесь $D_\tau^2 f \cdot f = (\partial_\tau - \partial_{\tau'})f(\tau)f(\tau')|_{\tau=\tau'}$ и т.д. – операторы Хироты. Билинейная форма позволяет применить метод Хироты для получения (2 + 1)-мерных солитоноподобных решений [13]. В частности, найдено N-солитонное экспоненциальное решение

$$\phi = -6\alpha^{(4,0)}g^{-1}\partial_1^2\ln f \tag{4.7}$$

$$f = \sum_{\mu=0,1}\exp\left[\sum_{i>j}A_{ij}\mu_i\mu_j + \sum_i \mu_i\eta_i\right]$$

$$\exp A_{ij} = -[(\Omega_i - \Omega_j)^2 - k^2(p_i - p_j, q_i - q_j)][(\Omega_i + \Omega_j)^2 - k^2(p_i + p_j, q_i + q_j)]^{-1}$$

$$\exp\eta_i = \exp[\Omega_i\tau + p_i\xi_1 + q_i\xi_2 + \eta_{0i}]$$

$$k^2(p,q) = \alpha^{(2,0)}[p^2 + q^2] - \alpha^{(4,0)}p^4, \quad \Omega_i = k(p_i, q_i)$$

Здесь $\sum_{\mu=0,1}$ означает суммирование по всем возможным комбинациям $\mu = 0, 1$, $\sum_{i>j}$ – суммирование по всем возможным парам из N элементов, $\sum_i$ – суммирование по i от $i = 1$ до $i = N$. Параметры Ω_i, p_i, q_i, η_{0i} должны удовлетворять редукциям, гарантирующим вещественность ϕ.

Когда $N = 2M$, и параметры связаны попарно так, что $\Omega_s = \Omega_{s+M}^*$, $p_s = p_{s+M}^*$ и т.д. (s = 1, 2, ...M), выражение (4.7) описывает ансамбль из M двумерных "пульсирующих" солитонов. Такие солитоны становятся сингулярными в некоторых пространственно-временных точках, поэтому их физическая интерпретация затруднена.

При вещественных p_i, q_i, Ω_i, η_{0i} решение описывает упругие парные столкновения N квазиодномерных "плоских" солитонов типа

$$\phi = -\frac{6\alpha^{(4,0)}d^2}{g\,\mathrm{ch}^2\Theta}, \quad \Theta = d(\xi_1 + ut), \quad d^2 = \frac{\alpha^{(2,0)} - u^2}{4\alpha^{(4,0)}} > 0$$

где u – скорость солитона. "Плоские" солитоны несингулярны. Их устойчивость или неустойчивость относительно двумерных возмущений зависит от знака величины $\alpha^{(2,0)}\alpha^{(4,0)}$. В данном случае $\alpha^{(2,0)}\alpha^{(4,0)} < 0$, и "плоские" солитоны, движущиеся со сверхзвуковыми скоростями ($u^2 > s^2$), устойчивы относительно двумерных возмущений [13].

Было показано [13], что модель (4.5) допускает также "сигарообразные" полиномиальные солитоны. В данном случае такие солитоны неустойчивы относительно двумерных возмущений.

Проведенный анализ согласуется с результатами экспериментов по наблюдению солитонов продольной деформации в пластине [14].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00366).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
2. *Островский Л.А., Сутин А.М.* Нелинейные упругие волны в стержнях // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 531–537.
3. *Потапов А.И., Солдатов И.Н.* Квазиплоский пучок нелинейных продольных волн в пластине // Акуст. ж. 1984. Т. 30. Вып. 6. С. 819–822.
4. *Самсонов А.М.* О существовании солитонов продольной деформации в бесконечном нелинейно-упругом стержне // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 5. С. 1083–1086.
5. *Порубов А.В., Самсонов А.М.* Уточнение модели распространения продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 12. С. 26–29.
6. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation of an Elastic Solid. New York: Willey; London: Chapman and Hall, 1951. 140 p.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
8. *Вольмир А.С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
9. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл.АН СССР. 1949. Т. 64. № 6. С. 779–782.
10. *Nayfeh A.H.* Perturbation Methods. N.Y., etc.: Wiley, 1973 = *Найфе А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
11. *Калякин Л.А.* Асимптотический анализ модели авторезонанса // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 5. С. 594–597.
12. *Сокуринская Е.В.* Некоторые точные решения задачи о нелинейных упругих волнах в пластине // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 3. С. 36–41.
13. *Киселев В.В.* Слабонелинейные солитоноподобные возбуждения в двумерной модели мартенситного перехода // Физика твердого тела. 1994. Т. 36. № 11. С. 3321–3331.
14. *Самсонов А.М., Дрейден Г.В., Порубов А.В., Семенова И.В.* Генерация и наблюдение солитона продольной деформации в пластине // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 21. С. 61–68.

Екатеринбург
e-mail: kiseliev@imp.uran.ru

Поступила в редакцию
8.X.2002