УДК 532.5:534.1

© 2003 г. П. Каподанно

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОНДУЛОИДАЛЬНОЙ ЖИДКОЙ ПЕРЕМЫЧКИ МЕЖДУ ДВУМЯ СООСНЫМИ ДИСКАМИ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Рассматривается жидкая перемычка между двумя одинаковыми соосными круговыми дисками, имеющая в равновесии форму выпуклого ондулоида (т.е. волнообразной поверхности). Показывается, что устойчивость равновесия и существование малых колебаний жидкости зависят от коэрцитивности билинейной формы, связанной с возникающим в задаче оператором, определяемым потенциалом сил поверхностного натяжения. Задача сводится к операторному уравнению, в котором один из операторов связан, в силу закона Лапласа, со средней кривизной возмущенной свободной поверхности. Вопрос о коэрцитивности сводится к вспомогательной задаче на собственные значения. Условия устойчивости оказываются выполненными, если все собственные значения задачи строго превосходят единицу. Достаточные условия устойчивости получены с помощью рассуждений, основанных на привлечении теории эллиптических функций. Существование собственных частот доказывается методами функционального анализа.

Задача об устойчивости и малых колебаниях жидкой массы в условиях малой гравитации, когда поверхностное натяжение играет решающую роль, – объект многочисленных исследований ([1–4] и др.), в том числе в случае жидкой перемычки между двумя соосными дисками [5–7].

Известно, что если жидкая масса в равновесии имеет осесимметричную форму, то ее свободная поверхность, средняя кривизна которой постоянна, может быть цилиндром, сферой, ондулоидом, нодоидом либо катеноидом. Иными словами, это такая поверхность вращения, меридиан которой – геометрическое место фокуса эллипса, гиперболы или параболы, катящейся без проскальзывания по некоторой прямой [8]. Задача об устойчивости и малых колебаниях катеноидальной и сферической перемычек детально исследована [9, 10].

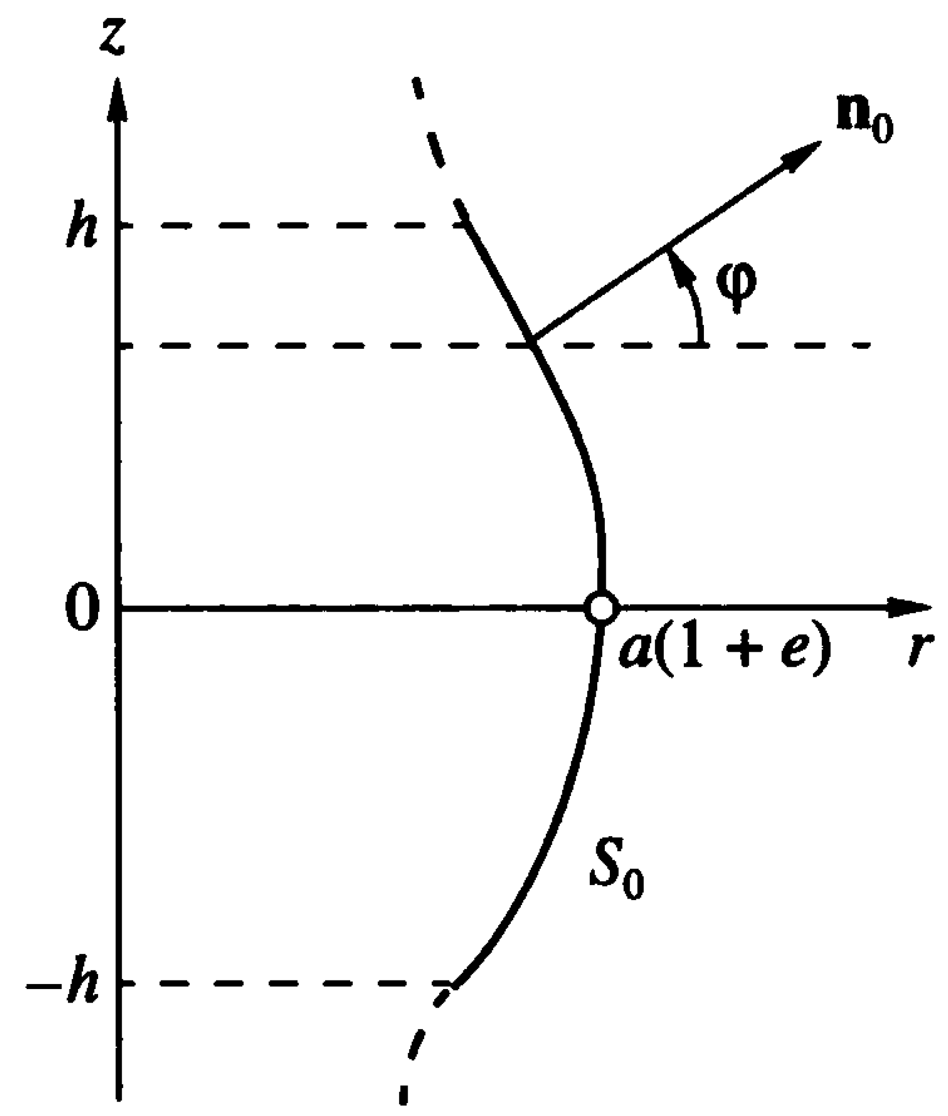
1. Формулировка задачи и уравнения движения. Рассмотрим жидкую перемычку, занимающую область τ между двумя соосными дисками S_1 и S_2, границы которых C_1 и C_2 – две одинаковые окружности. Предположим, что свободная поверхность жидкости в равновесии – выпуклая волнообразная поверхность (ондулоид). Воспользуемся прямоугольной системой координат Ox_0y_0z, ось z которой совпадает с осью симметрии ондулоида. Уравнения плоскостей S_1 и S_2 задаются как $z = h$ и $z = -h$ соответственно. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z. Уравнения [8]

$$r = a\cos\varphi + a\sqrt{e^2 - \sin^2\varphi}$$

$$z = a\sin\varphi + \operatorname{tg}\varphi\sqrt{e^2 - \sin^2\varphi} - \int_0^{\varphi}\frac{a(e^2-1)}{\cos^2 u\sqrt{e^2 - \sin^2 u}}du$$

задают меридиан выпуклого ондулоида, соответствующего эллипсу с большой полуосью a и эксцентриситетом e, $0 < e < 1$. Его часть, расположенная между плоскостями $z = h$ и $z = -h$, описывается неравенством

$$-\varphi_0 < -\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_1 < \varphi_0; \quad \varphi_0 = \arcsin e, \quad 0 < \varphi_0 < \pi/2$$



Фиг. 1

где φ – угол, образуемый радиус-вектором с ортом внешней нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности S_0, внешней по отношению к жидкости (фиг. 1).

Естественно ввести эллиптические функции. Полагая, как обычно, [11]

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{du}{\sqrt{e^2 - \sin^2 u}}$$

имеем в рамках стандартных обозначений функции Якоби

$$\sin\varphi = e\,\mathrm{sn}\,x, \quad \cos\varphi = \mathrm{dn}\,x, \quad \sqrt{e^2 - \sin^2\varphi} = e\,\mathrm{cn}\,x, \quad d\varphi = e\,\mathrm{cn}\,x dx$$

Введем обозначения

$$\chi_0(x) = (\mathrm{dn}\,x + e\,\mathrm{sn}\,x)^2, \quad \chi_1(x) = \mathrm{dn}\,x(\mathrm{dn}\,x + e\,\mathrm{sn}\,x)^2, \quad K = x(\varphi_0)$$

$$\Psi_0(x) = (\mathrm{dn}\,x + e\,\mathrm{cn}\,x)^2, \quad \Psi_1(x) = \mathrm{dn}\,x(\mathrm{dn}\,x + e\,\mathrm{cn}\,x)^2, \quad \kappa = x(\varphi_1)$$

Уравнение поверхности примет тогда более простой вид

$$r = a\sqrt{\chi_0(x)}, \quad z = a(e\,\mathrm{sn}\,x + E(x))$$

$$E(x) = \int_0^x \mathrm{dn}^2 \upsilon d\upsilon, \quad -\kappa \le x \le \kappa \tag{1.1}$$

Имеем, таким образом,

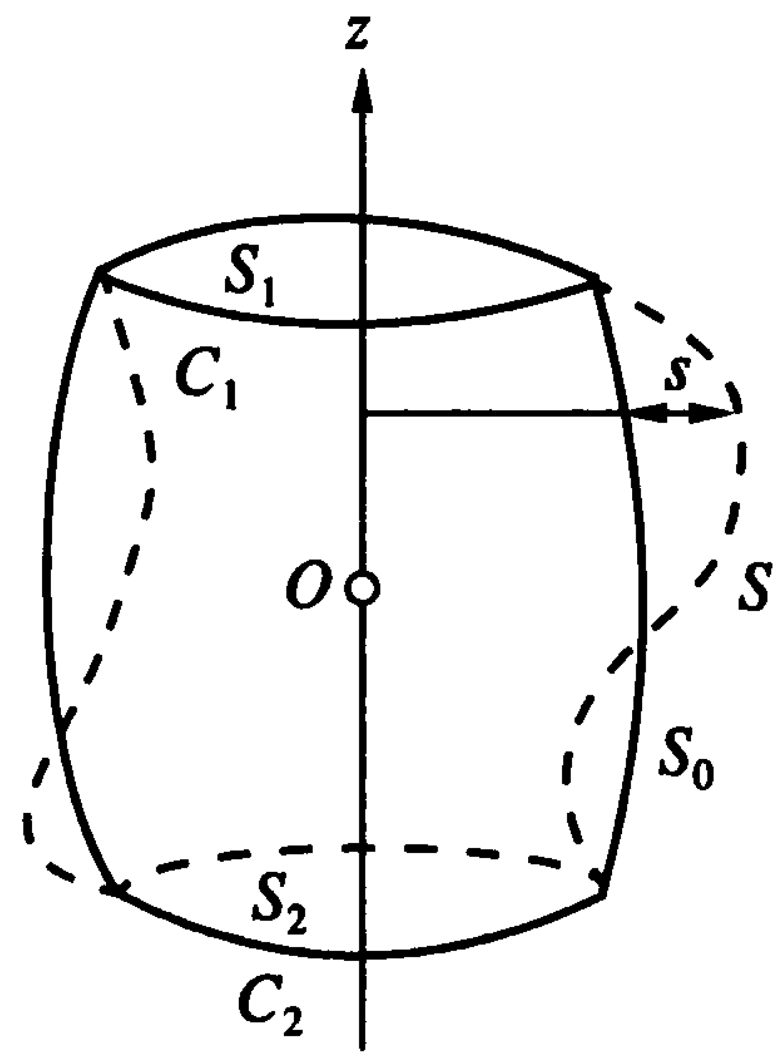
$$h = z(\kappa) = a(e\,\mathrm{sn}\,\kappa + E(\kappa))$$

и элемент площади задается как

$$dS = a^2\Psi_0(x)d\theta dx$$

Уравнение возмущенной свободной поверхности отличается от (1.1) наличием слагаемого $\zeta(\theta, x, t)$ в правой части первого равенства (1.1), причем функция ζ и ее производные предполагаются малыми.

Заметим, что нормальное перемещение точки свободной поверхности с точностью до слагаемого первого порядка малости задается как $\zeta\cos\Phi = \zeta\,\mathrm{dn}\,x$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Таким образом, функция $\zeta(\theta, x, t)$ должна удовлетворять условиям периодичности

$$\zeta(\theta, x, t) = \zeta(\theta + 2\pi, x, t) \tag{1.2}$$

граничным условиям

$$\zeta(\theta, \pm\kappa, t) = 0 \tag{1.3}$$

и условию, выражающему постоянство объема жидкости

$$\int\limits_{S_0} \zeta \cos\Phi dS = 0$$

и приводимого к виду

$$\int\limits_{\Omega} \zeta\chi_1(x) d\theta dx = 0 \tag{1.4}$$

где область $\Omega = \{(\theta, x)\colon 0 < \theta \le 2\pi, -\kappa < x < \kappa\}$ – прямоугольник.

Предположим, что жидкость идеальна, несжимаема; ее постоянная плотность равна ρ, и течение жидкости безвихревое. Тогда потенциал скоростей $\Phi(r, \theta, x, t)$ – гармоническая функция, т.е.

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1.5}$$

в области τ, занятой жидкостью, причем функция Φ должна удовлетворять кинематическим условиям

$$\partial\Phi/\partial n = \zeta_t \mathrm{dn} x \quad \text{на} \quad S_0(\zeta_t = \partial\zeta/\partial t); \quad \partial\Phi/\partial n = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h \tag{1.6}$$

где $\partial/\partial n$ – производная вдоль внешней нормали к области τ.

Пусть p_0 – постоянное внешнее давление и p – давление в жидкости. Динамическое условие на свободной поверхности задается законом Лапласа [12]

$$p - p_0 = -\alpha(R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

где α – поверхностное натяжение, предполагаемое постоянным, а R_1 и R_2 – радиусы кривизны возмущенной свободной поверхности S, которые считаются отрицательными, когда центр главной кривизны находится по ту же сторону от поверхности, что и жидкость.

Вычисляя среднюю кривизну поверхности S с помощью общей формулы [13], в первом приближении по ζ получаем

$$R_1^{-1}+R_2^{-1} = -a^{-1}+a^{-2}\mathfrak{D}[\zeta], \quad \mathfrak{D}[\zeta] = [(\zeta_{\theta\theta}+\zeta)\mathrm{dn}^2x+(\zeta_x\mathrm{dn}^2x)_x]/\Psi_1(x)$$

Тогда линеаризованное уравнение Бернулли дает

$$\partial\Phi/\partial t|_{S_0} = \mu\mathfrak{D}[\zeta]+C(t), \quad \mu = \alpha\rho^{-1}a^{-2} \tag{1.7}$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени.

Условия (1.2)–(1.4) нужно добавить к уравнению (1.5) и условиям (1.6).

2. Операторное уравнение задачи. Рассмотрим вспомогательную задачу Неймана

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в области} \quad \tau; \quad \partial\Phi/\partial n = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h$$

с условием совместности

$$\int_{S_0} g\,\mathrm{dn}\,x dS = 0$$

Если

$$\tilde{H} = \left\{g\in L^2(S_0), \int_{S_0} g\,\mathrm{dn}\,x dS = 0\right\}, \quad \tilde{H}^1(\tau) = \left\{u\in H^1(\tau), \int_{S_0} u|_{S_0}\mathrm{dn}\,x ds = 0\right\}$$

то всякой функции $g\in\tilde{H}$ соответствует единственная функция $\Phi\in\tilde{H}^1(\tau)$, определяющая слабое решение задачи Неймана, такое, что

$$\int_\tau \mathrm{grad}\,\Phi\,\mathrm{grad}\,\Psi d\tau = \int_{S_0} g\Psi|_{S_0}\mathrm{dn}\,x dS, \quad \forall\Psi\in\tilde{H}^1(\tau)$$

След $\Phi|_{S_0}$ функции Φ на поверхности S_0 принадлежит пространству $\tilde{H}$. Таким образом, можно определить линейный оператор $\mathbf{K}$ из $\tilde{H}$ в $\tilde{H}$ следующим соотношением:

$$\Phi|_{S_0} = \mathbf{K}g$$

Известно [14], что оператор $\mathbf{K}$ – непрерывный, самосопряженный, положительно определенный и компактный из $\tilde{H}$ в $\tilde{H}$. В рассматриваемой задаче $g = \zeta_t$, и уравнение (1.7) принимает вид

$$\mathbf{K}\zeta_{tt} = \mu\mathfrak{D}[\zeta]+C(t).$$

Домножая левую и правую части этого уравнения на $\chi_1(x)$, интегрируя полученное равенство по области Ω и принимая во внимание, что $\zeta\in\tilde{H}$, $\mathbf{K}\zeta\in\tilde{H}$, выразим $C(t)$ как функцию от ζ. Тогда операторное уравнение принимает вид

$$\mathbf{K}\zeta_{tt}+\mu\mathbf{M}\zeta = 0 \tag{2.1}$$

где

$$\mathbf{M}\zeta = -\mathfrak{D}[\zeta]+(2\pi)^{-1}\mathcal{P}[\zeta]/\mathfrak{Q}$$

$$\mathcal{P}[\zeta] = \int_\Omega \zeta\,\mathrm{dn}^2x d\theta dx+\mathrm{dn}^2\kappa\int_0^{2\Omega}[\zeta_x(\theta,\kappa,t)-\zeta_x(\theta,-\kappa,t)]d\theta$$

$$\mathfrak{Q} = \int_{-\kappa}^{\kappa}\chi_1(x)dx$$

В дальнейшем, наряду с пространством $\tilde{H}$, введем пространство

$$H = \left\{ u \in L^2(\Omega) \colon \int\limits_{\Omega} u\chi_1(x)d\theta dx = 0 \right\}$$

оснащенное скалярным произведением

$$(u, v)_H = \int\limits_{\Omega} uv\chi_0(x)d\theta dx$$

Оператор **M** будет рассматриваться как неограниченный оператор в H, область определения которого задается как

$$D(\mathbf{M}) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \colon u = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm\kappa, \int\limits_{\Omega} uv\chi_0(x)d\theta dx = 0 \right\}$$

причем следы нулевого и первого порядка функции u при $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ рассматриваются как равные функции в $L^2(-\kappa, \kappa)$.

Чтобы получить билинейную форму для $u, v \in D(\mathbf{M})$, ассоциированную с **M**, понадобится в дальнейшем вычислить скалярное произведение $u, v \in D(\mathbf{M})$

$$(\mathbf{M}u, v)_H = \int\limits_{\Omega} [-\mathrm{dn}^2 x(u_{\theta\theta} + u) - (u_x \mathrm{dn}^2 x)_x] v d\theta dx$$

После интегрирования по частям имеем форму

$$m(u, v) = \int\limits_{\Omega} (u_\theta v_\theta + u_x v_x - uv)\mathrm{dn}^2 x d\theta dx \tag{2.2}$$

область определения которой имеет вид

$$V = \left\{ u \in H^1(\Omega) \colon u = 0 \quad \text{для} \quad x = \pm\kappa, \int\limits_{\Omega} u\chi_1(x)d\theta dx = 0 \right\}$$

причем следы функции u при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ равны в $L^2(-\kappa, \kappa)$. Форма m, очевидно, симметрична и непрерывна на $V \times V$.

Дадим механическую интерпретацию формы m. Потенциальная энергия П сил поверхностного натяжения определяется формулой [1]

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\alpha \int\limits_{S_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \zeta_t \mathrm{dn}\, x dS$$

Применяя формулу для средней кривизны и интегрируя по частям, имеем

$$\Pi = \alpha m(\zeta, \zeta)$$

Известно, что положение равновесия жидкой перемычки устойчиво, если квадратичная форма $m(\zeta, \zeta)$ положительно определена.

3. Положительная определенность квадратичной формы $m(\zeta, \zeta)$: сведение к задаче на собственные значения. Определим величину

$$\lambda = \inf_{u \in V} \frac{\mathcal{M}[u]}{\mathcal{N}[u]}$$

$$\mathcal{M}[u] = \int\limits_{\Omega} (u_\theta^2 + u_x^2)\mathrm{dn}^2 x d\theta dx, \quad \mathcal{N}[u] = \int\limits_{\Omega} u^2 \mathrm{dn}^2 x d\theta dx$$

Она существует и неотрицательна. По определению нижней грани существует последовательность

$$\{u_n\} \in V\colon \mathcal{N}[u_n] = 1$$

такая, что

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \mathcal{M}[u_n]$$

Эта последовательность ограничена в $H^1(\Omega)$. Тогда из нее можно выбрать подпоследовательность, которую также обозначим $\{u_n\}$, слабо сходящуюся в $H^1(\Omega)$ и сильно сходящуюся в $L^2(\Omega)$ к функции $U \in H^1(\Omega)$. С помощью теоремы Банаха–Сакса–Мазура [15, 16] доказывается, что следы функции U при $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ равны в $L^2(-\kappa, \kappa)$, и, таким образом, $U \in V$. Далее с помощью той же теоремы доказывается, что нижняя грань λ достигается при $u \in U$ и, наконец, что $\lambda > 0$.

Положим [15, 16], что

$$u = U + \varepsilon\delta u, \quad \varepsilon \in R, \quad \delta u \in V$$

Тогда

$$\mathcal{M}[U + \varepsilon\delta u] - \lambda\mathcal{N}[U + \varepsilon\delta u] \geq 0, \quad \forall\varepsilon \in R, \quad \forall\delta u \in V$$

и, таким образом,

$$\int_\Omega (U_\theta \delta u_\theta + U_x \delta u_x)\mathrm{dn}^2 x d\theta dx - \lambda\int_\Omega U\mathrm{dn}^2 x\delta u d\theta dx = 0, \quad \forall\delta u \in V$$

либо, используя множитель Лагранжа μ, имеем

$$\int_\Omega (U_\theta \delta\tilde{u}_\theta + U_x \delta\tilde{u}_x)\mathrm{dn}^2 x d\theta dx - \lambda\int_\Omega U\mathrm{dn}^2 x\delta\tilde{u} d\theta dx + \mu\int_\Omega \chi_1(x)\delta\tilde{u} d\theta dx = 0$$

$$\forall\delta\tilde{u} \in \tilde{V}$$

где

$$\tilde{V} = \{u \in H^1(\Omega)\colon U = 0 \quad \text{для} \quad x = \pm\kappa\}$$

причем следы функции U на $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ равны в $L^2(-\kappa, \kappa)$. Полагая $\delta\tilde{u} \in D(\Omega)$, что допустимо, имеем

$$\mathcal{L}(U) \doteq U_{\theta\theta}\mathrm{dn}^2 x + (\mathrm{dn}^2 x U_x)_x + \lambda U\mathrm{dn}^2 x - \mu\chi_1(x) = 0$$

в смысле распределений, а поэтому и в смысле функций, так как решения этого эллиптического уравнения принадлежат C^∞ [17].

Вычисляя μ посредством умножения этого уравнения на $\chi_0(x)/\mathrm{dn}x$ и интегрируя по области Ω, видим, что функция $U \in C^\infty$, минимизирующая отношение в соотношении (3.1), – классическое решение вспомогательной задачи на собственные значения (СЗ)

$$\begin{gathered}
\mathcal{L}(u) = 0, \quad \mu = \mathcal{A}_\mu/(2\pi\mathcal{B}) \\
u = 0 \quad \text{для} \quad x = \pm\kappa, \ \int_\Omega u\chi_1(x)d\theta dx = 0 \\
u(\theta, x) = u(\theta + 2\pi, x) \\
\mathcal{A}_\mu = \Psi_1(\kappa)\int_0^{2\pi}[u_x(\theta, \kappa) - u_x(\theta, -\kappa)]d\theta - \int_\Omega u_x(\Psi_{-1}(x))_x \mathrm{dn}^2 x d\theta dx
\end{gathered} \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B} = \int_{-\kappa}^{\kappa} \Psi_0^2(x)dx$$

$$\Psi_{-1}(x) = (\mathrm{dn}\,x + e\,\mathrm{cn}\,x)^2/\mathrm{dn}\,x$$

и λ – наименьшее СЗ задачи.

Далее найдем СЗ задачи (3.1) и исследуем условия, при которых наименьшее из них строго превосходит единицу, так как это условие оказывается единственным условием устойчивости.

4. Существование собственных значений вспомогательной задачи. Будем искать решения задачи (3.1) в виде

$$u = \Theta(\theta)X(x)$$

Имеем

$$\Theta''X\mathrm{dn}^2x + \Theta[(\mathrm{dn}^2xX')' + \lambda X\mathrm{dn}^2x] - \nu\tilde{\Theta}\chi_1(x) = 0$$

где

$$\nu = \frac{\mathcal{A}_\nu}{2\pi\mathcal{B}}, \quad \tilde{\Theta} = \int_0^{2\pi}\Theta(\theta)d\theta$$

$$\mathcal{A}_\nu = \Psi_1(\kappa)[X'(\kappa) - X'(-\kappa)] - \int_{-\kappa}^{\kappa}(\Psi_{-1}(x))_x\mathrm{dn}^2xX'(x)dx$$

и выполняется условие

$$\tilde{\Theta}C_1[X] = 0, \quad C_1[X] = \int_{-\kappa}^{\kappa}X(x)\chi_1(x)dx$$

Будем различать несколько случаев.

В первом случае

$$\tilde{\Theta} = 0$$

Имеем

$$-\Theta''/\Theta = [(X'\mathrm{dn}^2x)' + \lambda X\mathrm{dn}^2x]/(X\mathrm{dn}^2x) = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\Theta(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta), \quad A_n, B_n - \mathrm{const}$$

и имеется классическая задача Штурма–Лиувилля

$$(X'\mathrm{dn}^2x)' + (\lambda - n^2)X\mathrm{dn}^2x = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad X(\pm\kappa) = 0$$

Полагая $y(x) = X(x)\mathrm{dn}\,x$, имеем

$$y'' = (2e^2\mathrm{sn}^2x - e^2 - \lambda + n^2)y, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad y(\pm\kappa) = 0$$

Ее вариационная формулировка имеет вид: найти функцию $y \in H_0^1(-\kappa, \kappa)$, такую, что

$$\int_{-\kappa}^{\kappa}[y'\tilde{y}' + (ie^2\mathrm{sn}^2x - e^2)y\tilde{y}]dx = (\lambda - n^2)\int_{-\kappa}^{\kappa}y\tilde{y}dx, \quad \forall\tilde{y} \in H_0^1(-\kappa, \kappa)$$

Инъекция из $H_0^1(-\kappa, \kappa)$ в $L^2(-\kappa, \kappa)$ непрерывна, плотна и компактна. С другой стороны, билинейная форма левой части последнего равенства, равная $\int_{-\kappa}^{\kappa} \mathrm{dn}^2 x dx$, симметрична, непрерывна и коэрцитивна в $H_0^1(-\kappa, \kappa)$. Рассмотренные задачи – не что иное, как стандартные задачи на СЗ. СЗ строго превосходят n^2 и, тем самым, единицу. Для каждого значения $n = 1, 2, \ldots$ функции $y_{nm}(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ образуют полную ортогональную систему в $L^2(-\kappa, \kappa)$.

Во втором случае

$$C_1(x) = 0$$

В этом случае функция $\Theta(\theta)$ постоянна, и, вновь полагая $y(x) = X(x)\mathrm{dn}x$, имеем

$$\begin{aligned} & y'' = (2e^2\mathrm{sn}^2 x - \lambda - e^2)y + \nu(\mathrm{dn}x + e\,\mathrm{sn}x)^2 = 0, \quad y(\pm\kappa) = 0 \\ & \mathscr{C}[y] = \int_{-\kappa}^{\kappa} y(x)(\mathrm{dn}x + e\mathrm{sn}x)^2 dx = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Введем пространства

$$\tilde{\mathscr{H}} = \{y \in L^2(-\kappa, \kappa): \mathscr{C}[y] = 0\}, \quad \tilde{\mathscr{V}} = \{y \in H_0^2(-\kappa, \kappa): \mathscr{C}[y] = 0\}$$

Вариационная формулировка задачи (4.1) такова: найти функцию $y \in \tilde{\mathscr{V}}$, такую, что

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} [y'\tilde{y}' + (2e^2\mathrm{sn}^2 x - e^2)y\tilde{y}]dx = \lambda \int_{-\kappa}^{\kappa} y\tilde{y}dx, \quad \forall\tilde{y} \in \tilde{\mathscr{V}}(-\kappa, \kappa)$$

Можно убедиться, что, как и раньше, здесь имеется стандартная задача на СЗ. Эти СЗ строго положительны, и их собственные функции $y_{0m}(x)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ образуют полностью ортогональную систему в $\tilde{\mathscr{H}}$. Известно, что $1, \cos n\theta, \sin n\theta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют полную ортогональную систему в $L^2(0, 2\pi)$. Тогда, используя классическую теорему [18], видим, что функции

$$y_{0m}(x), \quad y_{nm}(x)\cos n\theta, \quad y_{nm}(x)\sin n\theta, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

образуют полную ортогональную систему в $L^2(\Omega)$, элементы которой удовлетворяют равенству

$$\int_{\Omega} u\chi_1(x)d\theta dx = 0$$

Метод разделения переменных обеспечивает, таким образом, отыскание всех СЗ задачи (3.1).

Таким образом, необходимо найти достаточные условия того, что все СЗ задачи (4.1) строго превосходят единицу.

5. Преобразование задачи (4.1). Прямое интегрирование дифференциальных уравнений (4.1) представляется непростым. Заметим, что наименьшее СЗ задачи (4.1) имеет вид

$$\lambda_1 = \inf_{y \in \tilde{V}} \frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{I}_2}, \quad \mathscr{I}_1 = \int_{-\kappa}^{\kappa} [y'^2 + e^2(2\mathrm{sn}^2 x - 1)y^2]dx, \quad \mathscr{I}_2 = \int_{-\kappa}^{\kappa} y^2 dx$$

Рассмотрим вспомогательную задачу, которая получается, если в задаче (4.1) положить $\nu = 0$. Она имеет вид

$$-y'' + e^2(2\mathrm{sn}^2 x - 1)y = \lambda' y, \quad y(\pm\kappa) = 0 \tag{5.1}$$

Ее СЗ значения строго положительны.

Лемма 1. Величина $\lambda' = 1$ не является СЗ.

Доказательство. В самом деле, при $\lambda' = 1$ дифференциальное уравнение допускает частное решение $y = \mathrm{sn}\, x$ и оказывается интегрируемым. Имеем

$$y = AF(x) + B\,\mathrm{sn}\, x, \quad F(x) = (x - E(x))\mathrm{sn}\, x - \mathrm{cn}\, x\,\mathrm{dn}\, x, \quad A, B - \mathrm{const}$$

Граничные условия $y(\pm\kappa) = 0$ дают

$$B = 0, \quad AF(\kappa) = 0$$

Легко проверить, что на отрезке $[0, K]$ функция $F(x)$ возрастает от -1 до $K - E(K) > 0$, и, таким образом, она обращается в нуль ровно один раз. Величина $F(\kappa)$ тогда отлична от нуля всегда, за исключением единственного значения κ, обозначенного φ_1, которое отбросим. Тогда $A = 0$, что завершает доказательство.

Лемма 2. Величина $\lambda_1 \neq 1$.

Доказательство. Для этого покажем, что при $\lambda = 1$ задача (4.1) не имеет других решений кроме тривиального $y = 0$. В самом деле, в этом случае дифференциальное уравнение имеет вид

$$[y'\,\mathrm{sn}\, x - y\,\mathrm{sn}' x]' = -\frac{\nu}{2e}[(2\mathrm{sn}^2 x - 1)]'$$

Оно интегрируется, и его общее решение имеет вид

$$y = \nu(1 + ex\,\mathrm{sn}\, x) + B\,\mathrm{sn}\, x + AF(x)$$

Из условий задачи (4.1) находим

$$B = 0, \quad AF(\kappa) + \nu(1 + e\kappa\,\mathrm{sn}\,\kappa) = 0$$

$$A\mathcal{I}_3 + \nu\mathcal{I}_4 = 0, \quad \mathcal{I}_3 = \int_0^\kappa F(x)(2\mathrm{sn}^2 x - 1)dx$$

$$\mathcal{I}_4 = \int_0^\kappa (1 + ex\,\mathrm{sn}\, x)(2\mathrm{sn}^2 x - 1)dx$$

Выполняя интегрирование по частям, можно показать, что коэффициент при A в последнем условии отрицателен, откуда следует, что если как ν, так и A отличны от нуля, то отношение $\nu_A = \nu/A$ должно быть положительным. Нетрудно убедиться, что при этом

$$\mathcal{I}_3 + \nu_A\mathcal{I}_4 < (1 + e^2)\kappa[F(\kappa) + \nu_A(1 + e\kappa\,\mathrm{sn}\,\kappa)] = 0$$

Приходим, таким образом, к противоречию, величины ν и A равны нулю, откуда $y = 0$.

Лемма 3. Задача (5.1) допускает единственное СЗ, строго меньшее единицы, а остальные СЗ превосходят единицу.

Доказательство. Задача

$$-y'' + e^2(2\mathrm{sn}^2 x - 1)y = \lambda'' y, \quad y(\pm\kappa) = 0$$

допускает одно и только одно отрицательное СЗ, в то время как все остальные СЗ превосходят единицу. В этом случае можем воспользоваться следующей теоремой [7].

Пусть Φ_0 – решение задачи

$$-y'' + e^2(2\mathrm{sn}^2 x - 1)y - y = f(x), \quad y(\pm\kappa) = 0$$

Если

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} \Phi_0 f dx < 0$$

то квадратичная форма $\mathcal{I}_4 = \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$ положительно определена в $\tilde{\mathcal{V}}$. Как будет показано ниже, это условие выполнено при $f(x) = \chi_0(x)$. В этих условиях имеем

$$\inf_{y \in \tilde{\mathcal{V}}} (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2)/\mathcal{I}_2 \ge 0$$

и, как следствие, в силу того, что $\lambda_1 \ne 1$, имеем $\lambda_1 > 1$.

Ограничимся в дальнейшем отысканием достаточных условий того, что задача (5.1) имеет одно и только одно СЗ, строго превосходящее единицу.

Положим

$$\lambda' = 1 - e^2 \mathrm{sn}^2 \omega$$

Тогда дифференциальное уравнение задачи (5.1) принимает классический вид уравнения Ламе

$$y'' = (2e^2 \mathrm{sn}^2 x - 1 - e^2 + e^2 \mathrm{sn}^2 \omega) y$$

в дальнейшем воспользуемся классическими понятиями теории эллиптических функций из [19], [11]. Обозначим ω_1 и ω_3, соответственно, вещественную и чисто мнимую части полупериодов функции $\wp u$, а e_1, e_2 и e_3 – нули функции $\wp' u$, причем $e_1 > e_2 > e_3$. Наконец, пусть $\eta_1 = \zeta\omega_1$, $\eta_3 = \zeta\omega_3$.

Предположим, что СЗ $\lambda' \in (0, 1)$, и найдем, где должно располагаться соответствующее значение величины ω. Имеем

$$0 < \mathrm{sn}^2 \omega < e^{-2}$$

Однако, известно [11], что

$$\mathrm{sn}^2 \omega = (e_1 - e_3)/(\wp u - e_3), \quad u = \omega_1 \omega / K$$

и функция $\wp u$ принимает вещественные значения на прямоугольном контуре с вершинами 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_3$ и ω_3 (фиг. 3). Она монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$ при u, пробегающем контур по часовой стрелке, начиная с нуля.

Двойное неравенство

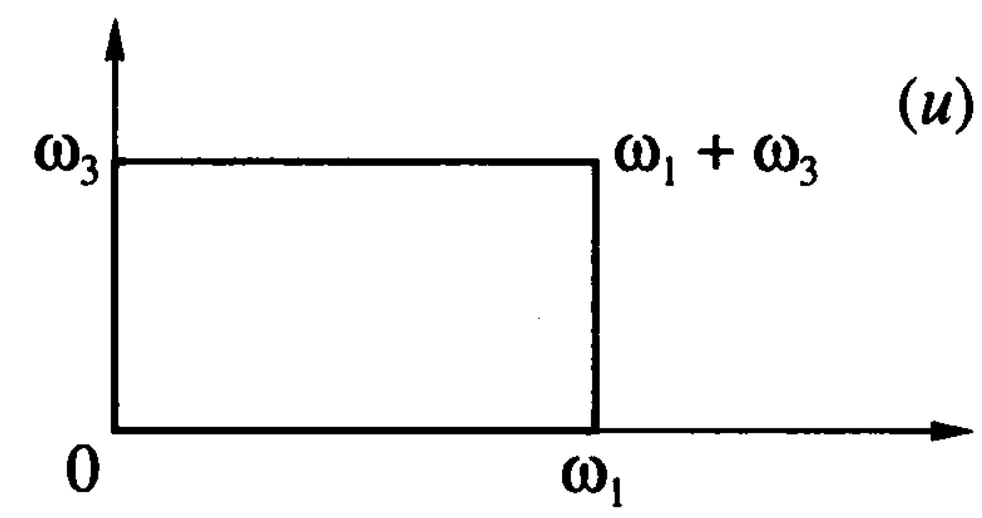
$$0 < (e_1 - e_3)/(\wp u - e_3) < e^{-2}$$

эквивалентно неравенству $\wp u > e_2$. Отсюда вытекает, что условие $0 < \lambda' < 1$ эквивалентно неравенству $0 < u < \omega_1$, и поэтому $\wp u > e_1$. Для $u = \omega_1 + iy_0$, $0 < y_0 < \omega_3/i$ это условие эквивалентно неравенству $e_2 < \wp u < e_1$. В первом случае имеем $1 - e^2 < \lambda' < 1$, во втором – $0 < \lambda' < 1 - e^2$.

Далее, Эрмит [20] нашел общее решение уравнения Ламе в виде

$$y = A\theta_1\left(\frac{x+\omega}{2K}\right)\theta_4^{-1}\left(\frac{x}{2K}\right)\exp\left(-\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{2K}\right)\frac{x}{2K}\right) + B\theta_1\left(\frac{-x+\omega}{2K}\right)\theta_4^{-1}\left(\frac{x}{2K}\right)\exp\left(\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{2K}\right)\frac{x}{2K}\right)$$

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\theta_4'(x)}{\theta_4(x)}$$



Фиг. 3

если оба частных интеграла – коэффициенты при A и B – линейно независимы. Здесь и далее θ_α – тэта-функция Якоби [19].

Исследуем вопрос о существовании значений ω, соответствующих $0 < \lambda' < 1$, таких, что два частных интеграла линейно независимы. Заметим, что $\theta_4(\omega/(2K)) = 0$, если $u = \omega_3 + 2n\omega_1 + 2m\omega_3$, где n и m – целые числа. Таким образом, функция $\theta_4(\omega/(2K))$ не может обращаться в нуль при $0 < u < \omega_1$, $u \in R$ и при $u = \omega_1 + iy_0$, $0 < y_0 < \omega_3/i$.

Выпишем условия того, что правая часть равенства (5.2) обращается в нуль при $x = 0$ и $x = iK$. Имеем

$$\theta_1\left(\frac{\omega}{2K}\right)(A+B) = 0, \quad \theta_1\left(\frac{\omega}{2K}\right)\left(A\exp\left(-\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{2K}\right)\right)+B\exp\left(\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{2K}\right)\right)\right) = 0$$

Случай $\theta_1(\omega/(2K)) = 0$ нужно отбросить, поскольку тогда $\omega = 0$ и $\lambda' = 1$. Таким образом, A и B отличны от нуля, если

$$\mathcal{F}(\omega/(2K)) = k\pi i, \quad k \in Z$$

где [19]

$$\zeta_3 u - \eta_1 u/\omega_1 = k\pi i/(2\omega_1)$$

Для $0 < u < \omega_1$, $u \in R$ надо положить $k = 0$.

Функция $g(u) = \zeta_3 u - \eta_1 u/\omega_1$ обращается в нуль при $u = 0$ и $u = \omega_1$, ее производная $g'u = -\wp(u + \omega_3) - \eta_1/\omega_1$ положительна при $u = 0$ и один раз обращается в нуль на интервале $(0, \omega_1)$.

Функция $g(u)$, таким образом, обращается в нуль при $u = 0$, т.е. при $\lambda' = 1$, что исключено из рассмотрения, и при $u = \omega_1$, т.е. при $\lambda' = 1 - e^2$.

Для $u = \omega_1 + iy_0$, $0 < y_0 < \omega_3/i$ уравнение имеет вид

$$\zeta_2(iy_0)/i - \eta_1 y_0/\omega_1 = k\pi/(2\omega_1)$$

Можно показать, что производная функции, стоящей в левой части, равная $-\wp(\omega_2 + iy_0) - \eta_1/\omega_1$, отрицательна. Функция $\zeta_2(iy_0)/i - \eta_1 y_0/\omega_1$ убывает от нуля до $-\pi/(2\omega_1)$ на интервале $(0, \omega_3/i)$, откуда следует, что уравнение не может быть удовлетворено кроме как при $k = 0$ и $k = -1$. Если $k = 0$, имеем $y_0 = 0$, а поэтому $u = \omega_1$, $\omega = K$ и $\lambda' = 1 - e^2$. Если $k = -1$, имеем $y_0 = \omega_3/i$, а поэтому и $u = \omega_1 + \omega_3$, $\operatorname{sn}\omega = e^{-1}$, и $\lambda' = 0$, что исключено из рассмотрения.

Покажем, что $\lambda' = 1 - e^2$ не может быть СЗ задачи (5.1). Задача имеет вид

$$y'' = (2\operatorname{sn}^2 x - 1)y, \quad y(\pm\kappa) = 0$$

Дифференциальное уравнение обладает частным решением $\operatorname{cn}x$, его можно проинтегрировать, и его общее решение имеет вид

$$y = A\operatorname{cn}xG(x) + B\operatorname{cn}x$$

$$G(x) = x - (1-e^2)^{-1}E(x) + (1-e^2)^{-1}\operatorname{sn}x\operatorname{dn}x\operatorname{cn}^{-1}x$$

Условия $y(\pm\kappa) = 0$ дают

$$B = 0, \quad AG(\kappa) = 0$$

Нетрудно убедиться, что функция $G(x)$, производная которой равна $\mathrm{cn}^{-2}x$, положительна на отрезке $[0, \kappa]$, откуда следует, что $A = 0$. Этим завершается доказательство.

Итак, для значений ω, соответствующих $\lambda' \in (0, 1)$, два частных интеграла уравнения Ламе линейно независимы.

Теперь необходимо найти СЗ задачи (5.1) при тех значениях ω, при которых СЗ строго меньше единицы. Будем искать достаточные условия, при которых таких СЗ ровно одно.

6. Достаточное условие наличия в задаче (5.1) единственного СЗ, строго меньшего единицы. Необходимо рассмотреть два случая, отмеченных выше.

Первый случай: $0 < u < \omega_1$. В этом случае $\omega \in R$ и $0 < \omega < K$. Из общего интеграла (5.2) уравнения Ламе находим, что $\lambda' = 1 - e^2\mathrm{sn}^2\omega$ – СЗ для вещественных значений ω, удовлетворяющих уравнению

$$\theta_1\left(\frac{\omega-\kappa}{2K}\right)\theta_1^{-1}\left(\frac{\omega-\kappa}{2K}\right) = \pm\exp\left(-\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{2K}\right)\kappa K^{-1}\right) \tag{6.1}$$

Используя выражение для $\theta(\omega/(2K))$, найденное выше, и формулу [19]

$$\theta_1(\upsilon) = \exp(-2\eta_1\omega_1\upsilon)\frac{\pi}{\omega_1}q_0^2q^{1/4}\sigma(2\omega_1\upsilon), \quad q = \exp\left(\frac{i\pi\omega_3}{\omega_1}\right), \quad q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

представим уравнение (6.1) в виде

$$\tilde{\omega}u = \frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)} = \pm\exp(-2u_1\zeta_3u), \quad 0 < u_1 = \frac{\omega_1\kappa}{K} < \omega_1 \tag{6.2}$$

Это уравнение можно решить графически. Исследуем левую часть уравнения. Имеем

$$[\tilde{\omega}(u)]' = \frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}F_0(u), \quad F_0(u) = -\zeta u_1 + \frac{\wp' u}{\wp u - \wp u_1}$$

Имеем

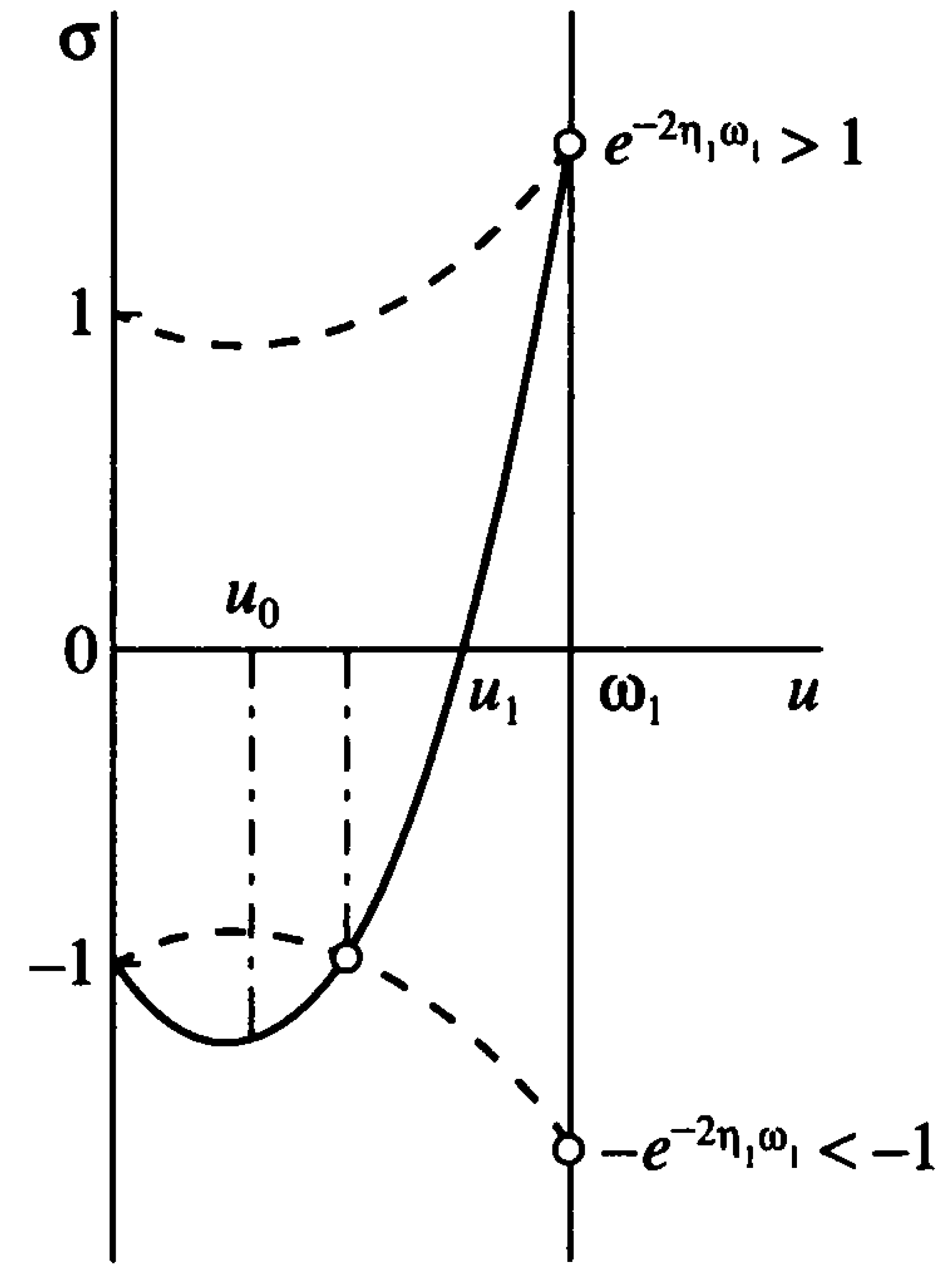
$$F_0(0) = 0, \quad F_0(u_1) = \infty, \quad F_0(\infty) = -2\zeta_1 u_1$$

Поскольку $\zeta_1 u$ убывает от нуля до $-\infty$ на интервале $(0, \omega_1)$, имеем $F_0(\omega_1) > 0$. С другой стороны, можно проверить, что $F_0'(u) < 0$.

Из графика функции $F_0(u)$ видно, что если $\zeta u_1 < 0$, то функция $F_0(u)$ имеет единственный ноль u_0, причем $0 < u_0 < u_1$, а если $\zeta u_1 > 0$, то функция $F_0(u)$ не обращается в нуль на интервале $(0, \omega_1)$. Отсюда можно вывести следующий результат: если $\zeta u_1 < 0$ (и, следовательно, $\eta_1 < 0$, и ζu имеет единственный ноль β на интервале $(0, \omega_1)$), функция $\tilde{\sigma}(u)$ убывает от -1 на интервале $(0, u_0)$ и возрастает до $\exp(-2\eta_1\omega_1) > 1$ на интервале (u_0, ω_1). Если $\zeta u_1 > 0$, то эта функция возрастает от -1 до $\exp(-2\eta_1\omega_1)$ на интервале $(0, \omega_1)$.

Исследуем функции $\pm\exp(-2u_1\zeta_3u)$. Имеем [19]

$$\zeta_3' u = -\wp(u+\omega_3) - e_3 - (e_3-e_1)(e_3-e_2)/(\wp u - e_3)$$



Фиг. 4

Отсюда выводим, что если $e_2 < 0$, то функция ζ_3' не обращается в нуль на интервале $(0, \omega_1)$, и что если $e_2 > 0$, то эта функция имеет один нуль γ на интервале $(0, \omega_1)$. Тогда, если $e_2 < 0$, то функция $\exp(-2u_1\zeta_3 u)$ убывает от единицы до $\exp(-2\eta_1\omega_1)$, и если $e_2 > 0$, то эта функция имеет минимум при $u = \gamma$.

Можем, таким образом, исследовать графически уравнение (6.2). В случае, когда $\zeta u_1 < 0$, что влечет $\eta_1 < 0$ и $e_2 > 0$, имеем на фиг. 4 график функции $\tilde{\omega}(u)$, изображенный сплошной линией, и графики функций $\pm\exp(-2u_1\zeta_3 u)$, изображенные штриховой линией.

Таким образом, уравнение (6.2) имеет единственный корень, принадлежащий интервалу $(0, u_1)$.

В случае $\zeta u_1 > 0$, сравнивая угловые коэффициенты касательных к кривым в точке $u = 0$, делаем вывод о том, что уравнение (6.2) имеет на интервале $(0, u_1)$ единственный корень, если выполнено условие $\zeta u_1 + e_3 u_1 < 0$. Кроме того, в случае вещественного u, удовлетворяющего неравенству $0 < u < \omega_1$, уравнение (6.2) имеет единственный корень, если $\zeta u_1 < 0$ или если $0 < \zeta u_1 - e_3 u_1$.

Второй случай: $u = \omega_1 + iy_0$, $0 < y_0 < \omega_3/i$. В этом случае $\lambda' = 1 - e^2\mathrm{sn}^2\omega$ – СЗ для значений $u\omega_1\omega/K$ уравнений (6.2). Используя соотношения между функциями σ и σ_1 [19], находим эквивалентное уравнение относительно y

$$\tilde{\sigma}_1(iy_0) = \frac{\sigma_1(iy_0 - u_1)}{\sigma_1(iy_0 + u_1)} = \pm\exp(-2u_1\zeta_2(iy_0)) \tag{6.3}$$

Немедленно убеждаемся, что величины, входящие в левую и правую части, по модулю равны единице. Заменим (6.3) уравнением

$$\tilde{\sigma}(iy_0)^2 = \pm\exp(-4u_1\zeta_2(iy_0)) \tag{6.4}$$

При $y_0 = 0$ (соответственно, $y_0 = \omega_3/i$) обе части равны единице (соответственно, $\exp(-4\eta_3 u_1)$). Таким образом, $y_0 = 0$ и $y_0 = \omega_3/i$ – решения уравнения, откуда следует, что $u = \omega_1$ и $u = \omega_1 + \omega_3$ – решения уравнения (6.2).

Предположим, что аргумент в каждой из частей равен нулю и проследим за значениями аргумента, когда y_0 возрастает от нуля до ω_3/i.

Имеем [19]

$$\frac{d}{dy_0}\left[\arg\left(\frac{\sigma_1(iy_0-u_1)}{\sigma_1(iy_0+u_1)}\right)^2\right] = 2[\zeta_1(iy_0-u_1)-\zeta_1(iy_0+u_1)] =$$

$$= 2\left[-2\zeta u_1 + \frac{\wp' u_1}{\wp(\omega_1+iy_0)-\wp u_1}\right]$$

Но имеем здесь

$$e_2 < \wp(\omega_1+iy_0) < e_1 < \wp u_1 \quad \text{и} \quad \wp' u_1 < 0$$

откуда следует

$$\frac{\wp' u_1}{\wp(\omega_1+iy_0)-\wp u_1} > 0$$

Если $\zeta u_1 > 0$, рассмотренная производная может обращаться в нуль, и она представляется крайне сложной для полного обсуждения. Остановимся на случае, когда $\zeta u_1 < 0$. Рассмотренная производная при этом положительна, и $\tilde{\sigma}(iy_0)^2$ постоянно возрастает от нуля на интервале $(0, \omega_3/i)$. Для $\zeta u_1 < 0$ имеем $\eta_1 < 0$ и $e_2 > 0$. Из известного соотношения $\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = i\pi/2$ выводим тогда $-4\eta_3\omega_1/i > 2\pi$. Тогда аргумент функции $\exp(-4\eta_3 u_1)$ имеет вид $-4\eta_3 u_1 + 2N\pi$, где целое N выбрано таким образом, чтобы этот аргумент не превосходил 2π.

Аргумент функции $\exp(-4u_1\zeta_2(iy_0))$ равен $-4u_1\zeta_2(iy)/i \operatorname{mod}(2\pi)$. Имеем

$$d/dy_0[\zeta_2(iy_0)/i] = -\wp(\omega_2+iy_0) = -e_2-(e_2-e_1)(e_2-e_3)/(\wp(iy_0)-e_1)$$

Второе слагаемое отрицательно, откуда следует, что аргумент функции $\exp(-4u_1\zeta_2(iy_0))$ возрастает от нуля до $-4\eta_3 u_1/i - 2N\pi$.

Наконец можно убедиться, что на интервале $(0, \omega_3/i)$ вторые производные функций $\arg[\tilde{\sigma}_1(iy_0)^2]$ и $-4u_1\zeta_2(iy_0)/i$, соответственно, отрицательна и положительна. Тогда график первой функции располагается над графиком второй функции, что доказывает наличие у уравнения (6.4) ровно двух корней $y_0 = 0$ и $y_0 = \omega_3/i$. Уравнение (6.2) обладает лишь двумя корнями, откуда следует, что $\operatorname{sn}\omega_1 = 1$ и $\operatorname{sn}\omega = e^{-1}$, т.е. $\lambda' = 1 - e^2$ и $\lambda' = 0$. Поскольку эти два значения нужно отбросить, получаем следующий результат: для $\zeta u_1 < 0$ не существует значения ω вида $\omega_1 + iy_0$, $0 \le y_0 \le \omega_3/i$, что обеспечивает существование СЗ задачи (5.1), строго меньшего единицы.

Итак, если $\zeta u_1 < 0$, то существует ровно одно вещественное значение ω, которое соответствует СЗ $\lambda' < 1$. Также обоснован тот факт, что неравенство $\zeta u_1 < 0$ – условие, достаточное для того, чтобы вспомогательная задача (5.1) имела ровно одно СЗ, строго меньшее единицы.

Сделаем несколько замечаний, касающихся условия $\zeta u_1 < 0$. Это условие влечет неравенство $\eta_1 < 0$. Из соотношения [11]

$$\eta_1 = \sqrt{e_1-e_3}\left(\frac{E-Ke_1}{e_1-e_3}\right), \; . \; E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2 \upsilon}\,d\upsilon, \quad e^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}$$

можно вывести, что условие $\eta_1 < 0$ эквивалентно неравенству

$$K > 3E/(2-e^2)$$

Имеем $K \geq E$, и, когда $e \to 1$, имеем $E \to 1$ и $K \to +\infty$. Таким образом, условие выполнено тогда, когда e достаточно близко к единице.

С другой стороны, неравенство $\zeta u_1 < 0$ имеет место, если $\beta < u_1 < \omega_1$, где β – нуль функции ζu на интервале $(0, \omega_1)$. Это последнее условие заведомо обеспечено, если значение κ достаточно близко к K или если φ_1 достаточно близко к φ_0. Тогда величина

$$F(\kappa) = [\kappa - E(\kappa)]\operatorname{sn}\kappa - \operatorname{cn}\kappa \operatorname{dn}\kappa$$

положительна, что и будет предполагаться в дальнейшем.

7. Достаточные условия того, что все СЗ задачи (4.1) строго превосходят единицу. Предположим, что $\zeta u_1 < 0$ и $F(\kappa) > 0$. Применим теорему Фогеля [7], упомянутую выше. Рассмотрим задачу

$$-y'' + e^2(2\operatorname{sn}^2 x - 1)y - y = \chi_0(x), \quad y(\pm\kappa) = 0 \tag{7.1}$$

Введем функционал

$$G[y] = \int_{-\kappa}^{\kappa} y\chi_0(x)dx < 0$$

Если Φ_0 – решение этой задачи и $G[\Phi_0] < 0$, то квадратичный функционал

$$\int_{-\kappa}^{\kappa} dx[y'^2 + e^2(2\operatorname{sn}^2 x - 1)y^2 - y^2]dx$$

положительно определен в пространстве

$$\tilde{\upsilon} = \{y \in H_0^1(-\kappa, \kappa), G[y] = 0\}$$

откуда следует, что наименьшее СЗ задачи (4.1)

$$\lambda_1 = \inf_{y \in \tilde{\mathcal{V}}} \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_2$$

строго превосходит единицу.

Вычислим решение Φ_0. Общее решение дифференциального уравнения в задаче (7.1) имеет вид

$$y = Y(x) + B\operatorname{sn}x, \quad Y(x) = A[(x - E(x))\operatorname{sn}x - \operatorname{cn}x\operatorname{dn}x] - (1 + ex\operatorname{sn}x)$$

В силу граничных условий имеем $B = 0$ и

$$y = Y(\kappa)$$

откуда, в силу положительности коэффициента при A, имеем $A > 0$. Условие Фогеля имеет вид

$$G[Y(x)] < 0$$

Оно выполняется, так как, согласно доказанному выше, коэффициент при A отрицателен.

8. Устойчивость жидкой перемычки. Будем всегда предполагать, что выполнены условия

$$\zeta u_1 < 0, \quad F(\kappa) > 0 \tag{8.1}$$

В силу определения величины λ_1 имеем

$$\mathcal{M} \geq \lambda_1 \mathcal{N}, \quad \forall u \in V$$

Пусть $0 < \varepsilon < 1$ и

$$m(u, u) = \varepsilon\mathcal{M} + (1-\varepsilon)\mathcal{M} - \mathcal{N}$$

Тогда

$$m(u, u) \geq \varepsilon\mathcal{M} + [(1-\varepsilon)\lambda_1 - 1]\mathcal{N}$$

Так как $\lambda_1 > 1$, то можно добиться выполнения неравенства $(1-\varepsilon)\lambda_1 - 1$, выбирая параметр ε, удовлетворяющим неравенству $0 < \varepsilon < (\lambda_1 - 1)/\lambda_1$. Поскольку $\mathrm{dn}^2 x$ принимает значения между двумя строго положительными числами на интервале $(-\kappa, \kappa)$, можно найти $\tilde{\varepsilon} > 0$, такое, что

$$m(u, u) \geq \tilde{\varepsilon}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in V$$

откуда следует коэрцитивность билинейной формы m на $V \times V$. Следовательно, неравенства (8.1) представляют собой достаточные условия устойчивости волнообразной перемычки.

9. Существование собственных частот. Из операторного уравнения (2.1) выводим

$$(K\zeta_{tt}, \tilde{\zeta})_H + \mu m(\zeta, \tilde{\zeta}) = 0, \quad \forall\tilde{\zeta} \in V, \quad \mu = \alpha/(\rho a^2)$$

Введем пространство $\hat{H}$ – пополнение V нормой, ассоциированной со скалярным произведением $(u, v)_{\hat{H}} = (Ku, v)_H$. Вариационная формулировка тогда приобретает вид: найти $\zeta(t) \in V$, такое, что

$$(\zeta_{tt}, \tilde{\zeta})_{\hat{H}} + \mu m(\zeta, \tilde{\zeta}) = 0, \quad \forall\tilde{\zeta} \in V \tag{9.1}$$

Известно, что при выполнении условий $\zeta u_1 < 0$ и $F(\kappa) > 0$ билинейная форма m симметрична, непрерывна и коэрцитивна в $V \times V$. С другой стороны, инъекция V в $\hat{H}$, плотная по построению, непрерывна и компактна. Два последних свойства немедленно влекут классические свойства инъекции из $H^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ и непрерывность оператора K.

Имеем, таким образом, стандартную задачу теории колебаний [21]: существует несчетное множество СЗ

$$0 < \Omega_1 \leq \Omega_2 \leq \ldots \leq \Omega_n, \quad \Omega_n \to \infty$$

таких, что соответствующие собственные функции образуют ортогональный базис в пространстве $\tilde{H}$, а также в пространстве V, оснащенном скалярным произведением $m(.,.)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
2. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др.* Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюция и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. 416 с.
4. *Morand H.J.P., Ohayon R.* Interactions Fluids – Structures. Paris: Masson, 1992. 212 p.
5. *Langbeim D.* Stability of liquid bridges between parallel plates // Europ. Space Agency. Publ. ESA SP. 1992. V. 331/1. 85 p.

6. *Sanz A.* Static and dynamic response of liquid bridges // Proc. IUTAM Symp. Microgravity Fluid Mechanics: Bremen, 1991. (Ed. H.J. Roth) Berlin: Springer, 1992. P. 3–17.
7. *Vogel T.I.* Stability of a liquid drop trapped between two parallel plates // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. № 3. P. 516–525.
8. *Delaunay Ch.* Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante // J. Maths Pures et Appl. 1941. V. 6. № 3. P. 309–315.
9. *Capodanno P.* On the small oscillations of a catenoidal liquid bridge between two parallel plates under zero gravity // Microgravity Sci. Technol. 1994. V. 7. № 3. P. 252–257.
10. *Vivona D.* Mathematical study of the small oscillations of a spherical rigid bridge between two equal discs under gravity zero // Bull. Polish Acad. Sci. Techn. Sci. 2001. V. 49. № 1. P. 31–49.
11. *Tricomi F.* Funzioni ellittiche. Bologna: Zanichelli, 1951. 343 p.
12. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
13. *Blaschke W.* Vorlesungen über Differential Geometrie. V. 1. Berlin: Springer, 1930. 311 S.
14. *Friedman A., Shinbrot M.* The initial value problem for the linearized equations of water waves // J. Math. and Mech. 1967. V. 17. № 2. P. 107–180.
15. *Roseau M.* Vibrations in Mechanical Systems. Berlin: Springer, 1987. 530 p.
16. *Riesz F., Szokefalvi-Nagy B.* Leçons d'Analyse Fonctionelle. Paris: Gauthier Villars, 1968. 448 p.
17. *Schwartz L.* Theorie des Distributions. Paris: Hermann, 1966. 420 p.
18. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics. V. 1. N.Y.; L.: Intersci. Publ., 1966. 561 p. = *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 1. 476 с.
19. *Tannery J., Molk J.* Eléments de la Théorie des Fonctions Elliptiques. Paris: Gauthier – Villars, V. 1. 1893. 246 p.; V. 2. 1896. 299 p.; V. 3. 1898. 267 p.; V. 4. 1902. 303 p.
20. *Hermite Ch.* Oeuvres // Sur quelques applications de la théorie des fonctions elliptiques. 1912. T. 3. P. 266–418.
21. *Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E.* Vibration and Coupling of Contionuous Systems. Asymptotic Methods. Berlin: Springer, 1989. 421 p.

Безансон (Франция)

Поступила в редакцию
10.I.2002