

УДК 539.3:543.1

© 2003 г. Ю.А. Демьянов, Д.В. Кокарева, А. А. Малашин

### ВЗАИМОВЛИЯНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В МУЗЫКАЛЬНЫХ СТРУНАХ

С использованием изложенного ранее подхода [1] рассматриваются две задачи колебаний струн: колебания струны щипкового музыкального инструмента, оттянутой в одной из точек и покоящейся в начальный момент времени (задача 1), и колебания струны клавишного музыкального инструмента, точкам которой в начальный момент времени молоточек малой ширины сообщает начальную скорость (задача 2). Установлено, что вынужденные продольные колебания струны происходят на частотах поперечных колебаний, приведено условие возможного резонанса продольных колебаний, установлен характер колебаний места крепления за счет упругости и связанный с ним сдвиг частот поперечных колебаний.

**1. Постановка задачи колебаний музыкальных струн.** Как известно, (например, из работ [2, 3]), в основе изучения колебаний музыкальных струн лежат уравнения поперечных колебаний, которые качественно правильно устанавливают зависимость частот от длины струны, ее натяжения и плотности. Вместе с тем отсутствуют надежные данные о том, что прогнозируемый на их основе спектр колебаний соответствует измеренному. Из-за неучета динамических составляющих натяжения в струне не полностью описывается механизм колебания деки – основного генератора волн. В этой связи на базе известных уравнений [4]

$$\begin{aligned} \rho_0 x_{tt} &= (T \cos \theta)_s, & \rho_0 y_{tt} &= (T \sin \theta)_s \\ \cos \theta &= \frac{1 + x_s}{1 + e}, & \sin \theta &= \frac{y_s}{1 + e}, & e &= \sqrt{(1 + x_s)^2 + (y_s)^2} - 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $s$  – лагранжева координата частицы, отсчитываемая в положении, когда струна не натянута и имеет плотность  $\rho_0$ ,  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$  – координаты вектора смещения,  $e$  – деформация,  $T = eE$  – натяжение,  $E$  – модуль Юнга, выведены [1] линеаризованные уравнения, позволяющие учитывать продольные и поперечные колебания струн. Факт распространения продольных волн (наряду с поперечными) был отмечен ранее [4].

Смещение  $x$  целесообразно представить в виде

$$x = \bar{x} + x_0(s); \quad e = \bar{e} + e_0, \quad x_0 = e_0 s$$

означающем отсчет величины  $\bar{x}$  (как и  $y$ ) по отношению к неподвижной натянутой (до величины деформации  $e_0 = \text{const}$ ) струне.

Неизвестные функции  $\bar{x}(s, t)$ ,  $y(s, t)$  можно искать в виде

$$\epsilon^{1/2} (y_1 + \epsilon y_2 + \dots), \quad \bar{x} = \epsilon (x_1 + \epsilon x_2 + \dots), \quad \bar{e} = \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots \quad (1.2)$$

арактерная величина дополнительной деформации.

При разложении уравнений (1.1) по малому параметру  $\varepsilon$  получается [1] система уравнений первого приближения

$$y_{1tt} = b_0^2 y_{1ss}, \quad b_0^2 = \frac{T_0}{\rho_0(1+e_0)} \quad (1.3)$$

$$x_{1tt} = a_0^2 \left( x_{1s} + \frac{1}{2(1+e_0)} y_{1s}^2 \right)_s, \quad a_0^2 = \frac{E}{\rho_0} \quad (1.4)$$

Учитывая те или иные начальные условия для  $x_{1s}$ ,  $y_{1s}$ ,  $x_{1t}$ ,  $y_{1t}$ , а также условия в местах крепления струны, можно связать характер воздействия на струну с передачей колебаний в деку.

Ниже решаются две основные задачи теории колебаний музыкальных струн, в которых традиционная постановка для поперечных колебаний  $y_1(s, t)$  дополнена постановкой задачи для продольных колебаний  $x_1(s, t)$ .

**Задача 1** (струна щипкового инструмента закреплена в точках  $s = 0$  и  $s = l$ , при  $t = 0$  в точке  $s = c$  она оттянута на высоту  $h$  и покоится)

$$y_1(0, t) = y_1(l, t) = y_{1t}(s, 0) = x_1(0, t) = x_1(l, t) = x_{1t}(s, 0) = 0$$

$$y_1(s, 0) = \frac{h}{c}s, \quad x_1(s, 0) = \frac{s}{l}(c-l+\xi c), \quad \text{если } 0 \leq s \leq c \quad (1.5)$$

$$y_2(s, 0) = \frac{h}{c-l}(s-l), \quad x_1(s, 0) = \left(1 - \frac{s}{l}\right) \left(c - \frac{l-c}{\xi}\right), \quad \text{если } c \leq s \leq l$$

$$\xi = \frac{\sqrt{h^2 + (l-c)^2}}{\sqrt{h^2 + c^2}}$$

**Задача 2** (струна клавишного инструмента закреплена в точках  $s = 0$  и  $s = l$ ; при  $t = 0$  молоточек шириной  $2\delta$  сообщает покоящимся частицам скорость  $V_0 = \text{const}$ )

$$y_1(0, t) = y_1(l, t) = y_1(s, 0) = x_1(0, t) = x_1(l, t) = x_{1t}(s, 0) = 0$$

$$y_{1t}(s, 0) = \begin{cases} V_0, & \text{если } c - \delta \leq s \leq c + \delta \\ 0, & \text{если } s \notin [c - \delta, c + \delta] \end{cases} \quad (1.6)$$

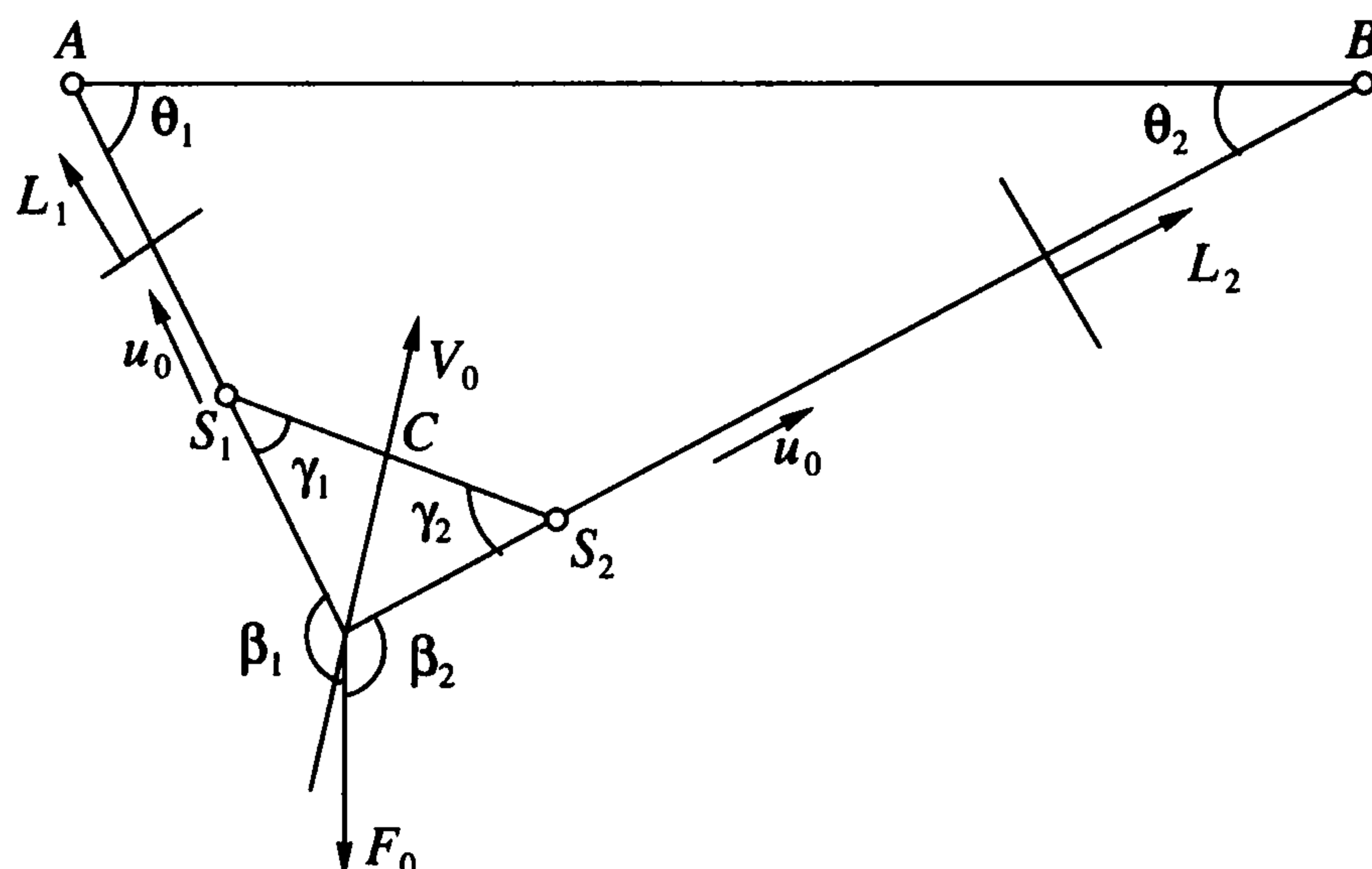
**2. Задача о начальной фазе движения струны в нелинейной и линейной постановках.** В задаче 1 для придания струне начальной треугольной формы необходимо приложение к точке  $C$  силы  $F_0$  (фиг. 1). Последняя вызывает в частях  $AC$  и  $BC$  дополнительную деформацию

$$e_0^{(1)} = (AC + BC - AB)/AB$$

(Это значение  $e_0^{(1)}$  соответствует случаю проскальзывания струны в точке  $C$ ).

Пусть при  $t = 0$  струна отпущена, то до прихода более быстрых продольных волн к концам  $A$  и  $B$  решение соответствует случаю распространения волн в неограниченной в обе стороны струне (части которой наклонены под углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$  к оси  $X$ ). Из-за отсутствия в постановке задачи характерной длины и постоянства начальной деформации анализ размерности и подобия дает

$$y = t f_1(s/(a_0 t)), \quad x = t f_2(s/(a_0 t))$$



Фиг. 1

При этом уравнения (1.3), (1.4), как показано ранее [4, 5], имеют простейшие решения  $f_1' = \text{const}$ ,  $f_2' = \text{const}$ , означающие постоянство компоненты скоростей и деформаций. По частям струны исходной формы от точки  $C$  распространяются продольные волны  $L_1$  и  $L_2$ , за ними – поперечные волны  $S_1$  и  $S_2$ . В точке  $C$  излом струны невозможен (иначе элемент в окрестности точки  $C$  двигается с ускорением, что противоречит решениям для скорости). Поэтому на участке  $S_1S_2$  деформации (натяжения) и скорости всех частиц одинаковы и постоянны. Как было показано [4, 5], деформации на поперечных волнах не испытывают разрыва, поэтому всюду в области  $L_1S_1CS_2L_2$  деформация  $e_1^{(1)}$  (дополнительная к  $e_0$ ) постоянна. Из-за отличия в величинах  $e_0^{(1)}$  и  $e_1^{(1)}$  на участках  $L_1S_1$  и  $L_2S_2$  имеет место продольное движение частиц струны со скоростью  $u_0 = a_0(e_0^{(1)} - e_1^{(1)})$  в сторону точек  $A$  и  $B$  (как будет видно из дальнейшего  $e_0^{(1)} > e_1^{(1)}$ ).

Применение закона изменения количества движения на направлениях  $AS_1$  и перпендикулярном к нему дает [4, 5]

$$\rho_0(b_1 - u_0)(V_0 \cos \beta_1 + u_0) = T(e)(\cos \gamma_1 - 1)(1 + e), \quad e = e_0 + e_1^{(1)} \quad (2.1)$$

$$\rho_0(b_1 - u_0)V_0 \sin \beta_1 = T(e) \sin \gamma_1 (1 + e) \quad (2.2)$$

Здесь  $b_1$  – скорость волны  $S_1$ ,  $V_0$  – модуль скорости на участке  $S_1S_2$ . Неизменность угла излома нити  $L_1S_1S_2$  со временем приводит к соотношению

$$b_1 \sin \gamma_1 = V_0 \sin(\beta_1 - \gamma_1) \quad (2.3)$$

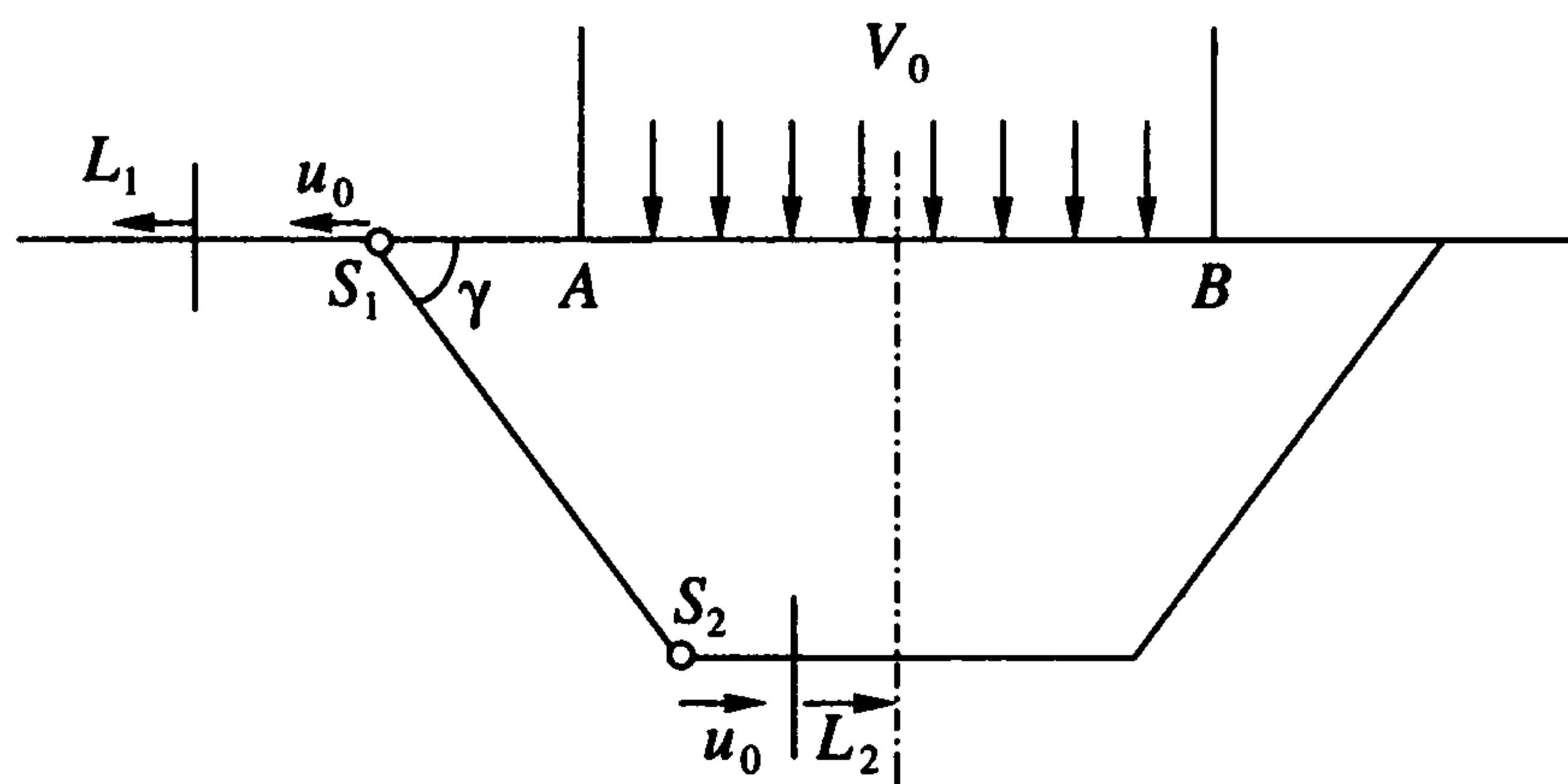
Из уравнений (2.1)–(2.3) можно получить [4, 5] следующие соотношения:

$$\rho_0(b_1 - u_0)^2 = Ee(1 + e) = T(e) \sin \gamma_1 \quad (2.4)$$

$$b_1 = b_2 = b = a_0 \sqrt{(e_0 + e_1^{(1)})(1 + e_0 + e_1^{(1)})} + a_0(e_0^{(1)} - e_1^{(1)}) \quad (2.5)$$

$$V_0 \sin \beta_1 = (b - u_0) \sin \gamma_1$$

Из уравнений (2.1), (2.2) и аналогичных уравнений для волны  $S_2$  с учетом соотношений  $\theta_1 - \gamma_1 = \gamma_2 - \theta_2$ ,  $\beta_1 + \beta_2 = \pi + \gamma_1 + \gamma_2$  находим  $V_0$ ,  $e_0^{(1)}$ ,  $\gamma_1$ ,  $\beta_1$ .



Фиг. 2

Учитывая малость  $\theta_0$ , имеем

$$b \sin \theta_0 = V_0, \quad V_0 \cos \theta_0 = (b - u_0) \sin \theta_0$$

$$b \cos \theta_0 = b - u_0, \quad \frac{\hat{\epsilon}}{1 - \cos \theta_0} = \sqrt{(e_0 + e_1^{(1)})(1 + e_0 + e_1^{(1)})} + \hat{\epsilon}, \quad \hat{\epsilon} = e_0^{(1)} - e_1^{(1)} \quad (2.6)$$

$$1 - \cos \theta_0 \approx \frac{\theta_0^2}{2}, \quad \hat{\epsilon} \approx \frac{\theta_0^2}{2} \sqrt{e_0(1 + e_0)}, \quad \bar{b}_0 = \frac{b_0}{a_0} = \sqrt{e_0(1 + e_0)} \quad (2.7)$$

$$\bar{V}_0 = \bar{b}_0 \theta_0 \approx \frac{\sqrt{2\hat{\epsilon}} \bar{b}_0}{\sqrt{\bar{b}_0}} = \sqrt{2\hat{\epsilon} \bar{b}_0}, \quad \bar{V}_0 \approx \sqrt{\hat{\epsilon}}$$

В задаче 2 в момент  $t = 0$  от точек  $A$  и  $B$  начинают распространяться две продольные ( $L_1$  и  $L_2$ ) и две поперечные ( $S_1$  и  $S_2$ ) волны (фиг. 2). Пока одна из волн  $L_1$  и  $L_2$  не достигнет мест крепления или середины  $AB$ , решение соответствует задаче распространения волн в неограниченной струне, ко всем точкам которой, начиная от  $A$  и далее, справа приложена в начальный момент постоянная скорость  $V_0$ . Как и в задаче 1, показывается, что в области  $L_1 S_1 S_2 L_2$  деформация растяжения (дополнительная к  $e_0$ ) постоянна, а на участках  $L_1 S_1$  и  $L_2 S_2$  возникает продольное движение со скоростью  $u_0$  к точкам излома.

Составляющие скорости  $V_x, V_y$  на участке  $S_1 S_2$  постоянны. Применение законов изменения количества движения на направление  $OX$  при прохождении частиц через волны  $S_1$  и  $S_2$  соответственно приводит к соотношениям, аналогичным (2.1):

$$\rho_0(b + u_0)(\pm V_x - u_0) = T \cos \gamma (\cos \gamma - 1)(1 + e) \quad (e = e_0 + e_1^{(1)}) \quad (2.8)$$

откуда  $V_x = 0$ .

Аналогично по направлению  $OY$  (2.2) имеем

$$\rho_0(b + u_0)V_y = T \sin \gamma (1 + e), \quad \rho_0(b + u_0)(V_y - V_0) = -T \sin \gamma (1 + e); \quad V_y = V_0/2 \quad (2.9)$$

Из оставшихся уравнений (2.8), (2.9), которые запишем в виде

$$\rho_0(b + u_0)u_0 = T(1 - \cos \gamma)(1 + e), \quad \rho_0(b + u_0)V_0/2 = T \sin \gamma (1 + e) \quad (2.10)$$

и из соотношений  $b \operatorname{tg} \gamma = V_0/2, u_0 = a_0 e^{(1)}$  при  $\bar{V}_0 = V_0/a_0 \ll 1$  найдем

$$\bar{b} = \frac{b}{a_0} \approx \sqrt{e_0}, \quad \gamma \approx \frac{1}{2} \frac{\bar{V}_0}{\sqrt{e_0}}, \quad e_1^{(1)} \approx \frac{\bar{V}_0^2}{8\sqrt{e_0(1 + e_0)}}, \quad \bar{V}_0 \approx 2\sqrt{2}[e_0(1 + e_0)]^{1/4} \sqrt{e^{(1)}} \quad (2.11)$$

Решим задачу 2 в рамках уравнений (1.3), (1.4). Соотношения (2.9), с учетом условия (2.4), преобразуются следующим образом:

$$V_y = (b_0 + u_0) \sin \gamma, \quad V_y - V_0 = -(b_0 + u_0) \sin \gamma \quad (2.12)$$

Обозначая  $s = s^*(t)$  траекторию поперечной волны, имеем [4]

$$b = \frac{d}{dt}\{s^*(t) + x[s^*(t), t]\} = \frac{ds^*(t)}{dt}(1 + x_s) - u$$

$$(b + u) = (1 + e)\frac{ds^*}{dt}; \quad \frac{ds^*}{dt} = \pm \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1 + e)}}$$

При этом соотношения (2.12) принимают вид соотношений

$$V_y = y_t = -\frac{ds^*}{dt}y_s, \quad V_y - V_0 = \frac{ds^*}{dt}y_s \quad (2.13)$$

совпадающих для поперечных составляющих  $y_1(s, t)$  с соотношениями на характеристиках  $ds^*/dt = b_0$  для уравнения (1.3). Поэтому соотношения (2.13) не привносят дополнительной информации в постановку задачи 2 для уравнения (1.3). Ее решение при  $t \rightarrow 0$  (когда волновая картина совпадает с картиной, возникающей в случае придания при  $t = 0$  всем точкам  $s < 0$  слева от  $A$  постоянной скорости  $V_0$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} y_{1s} &= 0, \quad \sqrt{e_1^{(1)}}y_{1t} = V_0 \quad \text{при} \quad -\infty < s < -b_0t \\ y_{1t} &= y_{1s} = 0 \quad \text{при} \quad s^* \geq b_0t \\ \sqrt{e_1^{(1)}}y_{1t} &= \frac{V_0}{2}, \quad \sqrt{e_1^{(1)}}y_{1s} = -\frac{V_0}{2b_0} \quad \text{при} \quad -b_0t \leq s^* \leq b_0t \end{aligned} \quad (2.14)$$

Значение  $V_y = V_0/2$  в области излома, найденное из (2.14), совпадает с ее точным значением.

Для нахождения  $x_1(s, t)$  проведем преобразование соотношений (1.8) аналогично тому, как это сделано с соотношениями (2.13). Получим

$$\begin{aligned} V_x - u_0 &= (b + u_0)(\cos\gamma - 1) = \frac{ds^*}{dt}(1 + e)(\cos\gamma - 1) = -\frac{ds^*}{dt}(e_1^{(1)} - \bar{x}_s) \\ -V_x - u_0 &= (b + u_0)(\cos\gamma - 1) = \frac{ds^*}{dt}(1 + e)(\cos\gamma - 1) = -\frac{ds^*}{dt}(e_1^{(1)} - \bar{x}_s) \end{aligned} \quad (2.15)$$

При учете того, что для первого приближения

$$e_1^{(1)} = x_{1s} + \frac{1}{2(1 + e_0)}y_{1s}^2$$

соотношения (2.15) записываются в виде

$$x_{1t} - a_0 = -\frac{b_0}{2(1 + e_0)}y_{1s}^2, \quad -x_{1t} - a_0 = -\frac{b_0}{2(1 + e_0)}y_{1s}^2 \quad (2.16)$$

откуда  $x_{1s} = 0$  за поперечными волнами. При этом

$$\frac{2(1 + e_0)^{3/2}}{\sqrt{e_0}} = y_{1s}^2, \quad \gamma \sim \frac{\sqrt{\epsilon_1^{(1)}}y_{1s}}{1 + e_0} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\epsilon_1^{(1)}}}{[e_0(1 + e_0)]^{1/4}}$$

Так как  $\text{tg}\gamma = V_0(2b_0)^{-1}$ , то

$$\bar{V}_0 \approx 2\bar{b}\gamma = 2\sqrt{2}[\epsilon_1^{(1)}]^{1/4}[e_0(1 + e_0)]^{1/4}$$

что совпадает с соотношениями (2.11).

Полученные результаты базируются на факте постоянства значений составляющих скоростей и деформаций, вытекающем из автомодельной задачи.

Если не использовать эту информацию, то

$$x_1 = f_1\left(t - \frac{s}{a_0}\right) \quad \text{при} \quad b_0 t \leq s \leq a_0 t, \quad x_1 = f_2\left(t + \frac{s}{a_0}\right) \quad \text{при} \quad -a_0 t \leq s \leq -b_0 t$$

$$x_1 = f_3\left(t - \frac{s}{a_0}\right) + f_4\left(t + \frac{s}{a_0}\right) \quad \text{при} \quad -b_0 t \leq s \leq b_0 t$$

Функции  $f_1', f_2', f_3', f_4'$  находятся из двух соотношений (2.16) и двух соотношений, выражающих непрерывность деформации на поперечных волнах, что соотносится с прежним результатом.

Приведем решение задачи 1. Условия на характеристиках

$$y_{1t} = -b_0 \left[ y_{1s} + (1 + e_0) \frac{\theta}{\varepsilon^{1/2}} \right], \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -b_0; \quad y_{1y} = b_0 \left[ y_{1s} + (1 + e_0) \frac{\theta_1}{\varepsilon^{1/2}} \right], \quad \frac{\partial s}{\partial t} = b_0$$

определяют скорость

$$y_{1t} = -b_0(1 + e_0)(4\varepsilon)^{-1/2}(\theta_1 + \theta_2)$$

и значения  $y_{1s}$  на  $S_1 S_2$ . При  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$  имеем

$$y_{1t} = -b_0(1 + e_0)\varepsilon^{-1/2}\theta_0, \quad y_{1s} = 0$$

и из решения уравнения (1.4), получим  $x_{1t} = 0$  в области  $S_1 S_2$  и  $x_{1t} = \text{const}$  в областях  $L_1 S_1, L_2 S_2$ .

Эффект жесткости струны необходимо учитывать, но области, где сказывается этот эффект, будут порядка нескольких диаметров струны и не оказывают, по мнению авторов, существенного влияния на процесс колебаний.

**3. Спектры поперечных и продольных колебаний музыкальных струн.** Известно [3], что решение  $y_1(s, t)$  задачи 1 имеет вид

$$y_1(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n s}{l}, \quad A_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 (l-c)c} \sin \frac{\pi n s}{l} \cos \omega_n t, \quad \omega_n = \frac{\pi n b_0}{l} \quad (3.1)$$

Выкладки

$$y_{1s} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \frac{\pi n s}{l}, \quad B_n = A_n \frac{\pi n}{l}$$

$$y_{1s}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^2}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi n s}{l} \right) + \sum_{i \neq j} \frac{B_i B_j}{2} \left[ \cos \frac{\pi s(i+j)}{l} + \cos \frac{\pi s(i-j)}{l} \right]$$

$$(y_{1s}^2)_s = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^2 \pi n}{l} \sin \frac{2\pi n s}{l} - \sum_{i \neq j} \frac{B_i B_j \pi (i+j)}{2l} \sin \frac{\pi s(i+j)}{l} -$$

$$- \sum_{i \neq j} \frac{B_i B_j \pi (i-j)}{2l} \sin \frac{\pi s(i-j)}{l}$$

(здесь и далее  $i \geq 1, j \geq 1$ ) показывают, что погонная нагрузка, входящая в правую часть уравнения (1.4), представляет собой суперпозицию составляющих от поперечных гармоник.

Учитывая, что

$$B_i = \frac{\pi i}{l} \frac{2hl^2}{\pi^2 i^2 (l-c)c} \sin \frac{\pi ic}{l} \cos \omega_i t; \quad \omega_{i+j} = \omega_i + \omega_j, \quad \omega_{i-j} = \omega_i - \omega_j$$

коэффициенты для четных и нечетных гармоник можно представить в виде

$$P_{2m}(t) = -\frac{D}{m} \sin^2 \left( \frac{\pi mc}{l} \right) (\cos 2\omega_m t + 1) - \sum_{i-j=2m} \frac{2mD}{ij} L_{ij} E_{ij} - \sum_{i+j=2m} \frac{2mD}{ij} L_{ij} E_{ij} \quad (3.2)$$

$$P_{2m-1}(t) = - \sum_{i-j=2m-1} D \frac{(2m-1)}{ij} L_{ij} E_{ij} - \sum_{\substack{i+j=2m-1 \\ i < j}} D \frac{(2m-1)}{ij} L_{ij} E_{ij} \quad (3.3)$$

$$D = \frac{2h^2 l}{\pi c^2 (l-c)^2}, \quad L_{ij} = \sin \frac{\pi ic}{l} \sin \frac{\pi jc}{l}, \quad E_{ij} = (\cos \omega_{i+j} t + \cos \omega_{i-j} t)$$

Решение однородного уравнения (1.4) с условиями (1.5) имеет вид

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} W + \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi nc}{l} \left\{ c - \frac{(l-c)}{\xi} - \frac{c}{l} W \right\} \quad (3.4)$$

$$u^{(I)} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(\omega_n^* t) \sin \frac{\pi n S}{l}, \quad \omega_n^* = \frac{\pi n a_0}{l}, \quad W = 2c - l + \xi c - \frac{(l-c)}{\xi}$$

$\omega_n^*$  – частота продольных колебаний.

Для четных гармоник ( $n = 2m$ ) решение уравнения (1.4)

$$x_{1tt} - a_0^2 x_{1ss} = \frac{a_0^2}{2(1+e_0)^2} P_{2m}(t) \sin \frac{2m\pi S}{l}$$

где  $P_{2m}(t)$  – выражение вида (3.2), имеет вид

$$u_{2m}^{(II)}(s, t) = F_{2m}(t) \sin \frac{2m\pi s}{l}$$

Функция  $F_{2m}$  находится из уравнения

$$\frac{d^2 F_{2m}}{dt^2} + a_0^2 \frac{4m^2 \pi^2}{l^2} F_{2m} = K P_{2m}(t), \quad K = \frac{a_0^2}{2(1+e_0)^2}$$

Тогда

$$F_{2m}(t) = \frac{1}{\omega_{2m}^*} \int_0^t K P_{2m}(\tau) \sin(\omega_{2m}^*(t-\tau)) d\tau$$

$$F_{2m} = -\frac{1}{\omega_{2m}^*} K \left[ \frac{D}{m} \sin \frac{2\pi mc}{l} \left\{ \frac{\omega_{2m}^*}{\omega_{2m}^{*2} - 4\omega_m^2} \cos 2\omega_m t + \frac{1}{\omega_{2m}^*} + \right. \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \left. + \frac{4\omega_m^2 - 2\omega_{2m}^{*2}}{\omega_{2m}^* (\omega_{2m}^{*2} - 4\omega_m^2)} \cos \omega_{2m}^* t \right\} + \sum_{i-j=2m} \frac{2Dm}{ij} L_{ij} A_{i,j}^{2m} + \sum_{\substack{i-j=2m \\ i < j}} \frac{2Dm}{ij} L_{ij} A_{i,j}^{2m} \right]$$

где

$$A_{i,j}^m = \frac{\omega_m^*}{\omega_m^{*2} - \omega_{i+j}^2} \cos \omega_{i+j} t + \frac{\omega_m^*}{\omega_m^{*2} - \omega_{i-j}^2} \cos \omega_{i-j} t + \frac{\omega_m^* (\omega_{i-j}^2 + \omega_{i+j}^2 - 2\omega_m^{*2})}{(\omega_{2m}^{*2} - \omega_{i+j}^2)(\omega_m^{*2} - \omega_{i-j}^2)} \cos \omega_m^* t \quad (3.6)$$

$$x_{12m} = u_{2m}^{(I)} + u_{2m}^{(II)}$$

Метод получения  $F_{2m-1}$  для нечетных гармоник аналогичен. Получим

$$F_{2m-1} = -\frac{1}{\omega_{2m-1}^*} K \left[ \sum_{i-j=2m-1} \frac{D(2m-1)}{ij} L_{ij} A_{i,j}^{2m-1} + \sum_{\substack{i-j=2m-1 \\ i < j}} \frac{D(2m-1)}{ij} L_{ij} A_{i,j}^{2m-1} \right] \quad (3.7)$$

Общее решение для  $x_1(s, t)$  имеет вид

$$x_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (x_{12m} + x_{12m-1}), \quad x_{12m} = \varphi_{2m} \cos \omega_{2m}^* t \sin \frac{2\pi m s}{l} + F_{2m} \sin \frac{2\pi m s}{l} \quad (3.8)$$

$$x_{12m-1} = \varphi_{2m-1} \cos \omega_{2m-1}^* t \sin \frac{(2m-1)\pi s}{l} + F_{2m-1} \sin \frac{(2m-1)\pi s}{l}$$

Выразив  $i$  через  $j$  (или  $j$  через  $i$ ), причем  $i \geq 1, j \geq 1$ , в соотношениях (3.5) и (3.7) смещение по  $x$  может быть представлено в виде

$$x_{12m} = \left\{ \left( \frac{1}{2\pi^2 m^2} \sin \frac{2\pi m c}{l} W + \frac{1}{\pi m} \cos \frac{2\pi m c}{l} \left( c - \frac{l-c}{\xi} - \frac{c}{l} W \right) \right) \cos \omega_{2m}^* t - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega_{2m}^*} K D \left[ \frac{1}{m} \sin \frac{2\pi m c}{l} \left( \frac{\omega_{2m}^*}{\omega_{2m}^{*2} - 4\omega_m^2} \cos 2\omega_m t + \frac{1}{\omega_{2m}^*} + \frac{4\omega_m^4 - 2\omega_{2m}^{*2}}{\omega_{2m}^* (\omega_{2m}^{*2} - 4\omega_m^2)} \cos \omega_{2m}^* t \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2m}{(2m+j)j} L_{2m+j,j} A_{2m+j,j}^{2m} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2m}{i(2m-i)} L_{i,2m-i} A_{i,2m-i}^{2m} + \right] \right\} \sin \frac{2\pi m s}{l} \quad (3.9)$$

$$x_{12m-1} = \left\{ \left( \frac{2}{\pi^2 (2m-1)^2} \sin \frac{\pi(2m-1)c}{l} W + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\pi(2m-1)} \cos \frac{\pi(2m-1)c}{l} \left( c - \frac{l-c}{\xi} + \frac{c}{l} W \right) \right) \cos \omega_{2m-1}^* t - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega_{2m-1}^*} K D \left[ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2m}{(2m-1+j)j} L_{2m-1+j,j} A_{2m-1+j,j}^{2m-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{2m}{(2m-i-1)i} L_{2m-1-i,i} A_{2m-1-i,i}^{2m-1} \right] \right\} \sin \frac{\pi(2m-1)s}{l} \quad (3.10)$$

Определение характеристик колебаний струны в задаче 2 аналогично, поэтому ниже приведены лишь основные этапы решения.

В задаче 2, как известно [2],

$$y_1(s, t) = \frac{4V_0}{b_0\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi n \delta}{l} \sin \frac{\pi n s}{l} \sin \frac{\pi n b_0 t}{l}$$

Решение задачи о продольных колебаниях имеет вид (3.8), где

$$\varphi_{2m} = \varphi_{2m-1} = 0$$

$$F_{2m} = -\frac{8V_0^2}{\omega_{2m}^* l^3 b_0^3 \pi m} \sin^2 \frac{\pi m c}{l} \sin^2 \frac{\pi m \delta}{l} K \left[ \frac{\omega_{2m}^*}{\omega_{2m}^* - 4\omega_m^2} \cos 2\omega_m t + \frac{4\omega_m^2 - 2\omega_{2m}^{*2}}{\omega_{2m}^* (\omega_{2m}^{*2} - 4\omega_m^2)} \cos \omega_{2m}^* t + \frac{1}{\omega_{2m}^*} \right] - \frac{K}{\omega_{2m}^*} \sin \frac{\pi i c}{l} + \left[ \sum_{i-j=2m} \frac{32mV_0^2}{l^3 b_0^2 \pi ij} L_{ij} J_{ij} A_{i,j}^{2m} + \sum_{i+j=2m} \frac{32mV_0^2}{l^3 b_0^2 \pi ij} L_{ij} J_{ij} A_{i,j}^{2m} \right]$$

$$F_{2m-1} = -\frac{K}{\omega_{2m-1}^*} \frac{16V_0^2}{\pi l^3 b_0^2} \left[ \sum_{i-j=2m-1} \frac{(2m-1)}{ij} L_{ij} J_{ij} A_{i,j}^{2m-1} + \sum_{i+j=2m-1} \frac{(2m-1)}{ij} L_{ij} J_{ij} A_{i,j}^{2m-1} \right]$$

$$J_{ij} = \sin \frac{\pi i \delta}{l} \sin \frac{\pi j \delta}{l}$$

**4. Влияние упругой заделки.** Рассмотрим ненулевые граничные условия в местах заделки. Пусть при  $s = l$  заделка жесткая:  $y = \bar{x} = 0$ , а при  $s = 0$  – упругая. Для вектора смещения имеем

$$\mathbf{I} = k\mathbf{T} \quad (4.1)$$

Условие (4.1) для  $y$  на  $\bar{x}$  принимает вид:

$$y = kE\hat{e} \sin \theta = kE(e_0 + x_s)y_s \quad (4.2)$$

$$\bar{x} = kE\hat{e} \cos \theta, \quad x_1 = k \left( x_s + \frac{1}{2(1+e_0)} y_s^2 \right) \quad (4.3)$$

Естественное допущение  $k \ll 1$  позволяет искать решения в виде

$$x_1(s, t) = x_{10}(s, t) + kx_{11}(s, t) + k^2 x_{12}(s, t) \quad (4.4)$$

$$y_1(s, t) = y_{10}(s, t) + ky_{11}(s, t) + k^2 y_{12}(s, t)$$

Решения для  $y_{10}(s, t)$  и  $x_{10}(s, t)$  совпадают с решениями (3.1) и (3.8) соответственно. Задачи для определения  $y_{11}(s, t)$  и  $x_{11}(s, t)$  таковы:

$$y_{11rr}(s, t) = b_0^2 y_{11ss}(s, t); \quad x_{11rr}(s, t) = a_0^2 x_{11ss}(s, t)$$

$$y_{11}(s, 0) = y_{11r}(s, 0) = y_{11}(0, t) = x_{11}(s, 0) = x_{11r}(s, 0) = x_{11}(0, t) = 0$$

$$y_{11}(l, t) = Ee_0 y_{10s}(l, t); \quad x_{11}(l, t) = x_{10s}(l, t) + \frac{1}{2(1+e_0)} y_{10s}^2(l, t)$$

Решение, полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$y_{11}(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} [y_{11n}^0(t) + ky_{11n}^1(t)] \sin \frac{\pi ns}{l} \quad (4.5)$$

где

$$y_{11n}^0(t) = \sum_{p \neq n} \frac{(-1)^{p+1} 2h \sin \frac{\pi pc}{l}}{(\omega_p^2 - \omega_n^2)(l-c)c} (\cos \omega_p t - \cos \omega_n t) \quad (4.6)$$

$$y_{11n}^1(t) = \frac{(-1)^n h \sin \frac{\pi nc}{l}}{\omega_n(l-c)c} t \sin \omega_n t \quad (4.7)$$

Устранение вековых членов  $A_n t \sin \omega_n t$  можно осуществить методом перенормировки [6] с переходом от  $\omega_n$  к  $\omega'_n = \omega_n(1 + \mu)$ . Разложение решения (4.6) по малому параметру  $\mu$  дает

$$y_{11}^0(s, t) = \sum_{p \neq n} \frac{(-1)^{p+1} 2h \sin \frac{\pi pc}{l}}{(\omega_p^2 - \omega_n^2)(l-c)c} (\cos \omega'_p t - \cos \omega'_n t + \mu \omega'_n t \sin \omega'_n t) \quad (4.8)$$

Это приводит к следующему результату:

$$y_{11}(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[ \sum_{p \neq n} \frac{(-1)^{p+1} 2h \sin \frac{\pi pc}{l}}{(\omega_p^2 - \omega_n^2)(l-c)c} (\cos \omega'_p t - \cos \omega'_n t) \right] \sin \frac{\pi ns}{l}$$

где

$$\omega'_i = \omega_i(1 + \mu), \quad \mu = -k(-1)^{i+1} \sin \frac{\pi nc}{l} \left[ \omega_i \sum_{p \neq n} \frac{2(-1)^{p+1} \sin \frac{\pi pc}{l}}{\omega_p^2 - \omega_i^2} \right]^{-1}$$

так как вековые члены из соотношения (4.8) при этом сократятся с аналогичными членами из (4.7).

В силу громоздкости решение для  $x_{11}(s, t)$  не приводится, кроме выражения для сдвига частоты:  $\Delta \omega_{i+j}^* \sim \frac{1}{2} (\omega_i + \omega_j)^{-2}$ .

**5. Анализ решений.** Результаты в разд. 3, 4, позволяют сделать следующие выводы.

1°. Вынужденные продольные колебания содержат частоты поперечных колебаний.

2°. Разрывы на поперечных волнах составляющих продольных скоростей и деформаций являются причиной возникновения вынужденных продольных колебаний на частотах поперечных. Решение, полученное в виде рядов Фурье при малых временах, совпадает с решением из разд. 2.

3°. В спектре колебаний присутствуют также более высокие частоты продольных колебаний струны. Например, для физико-механических параметров металлической струны ре первой октавы гитары ( $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $T = 82$  Н,  $l = 0.65$  м, площадь поперечного сечения струны  $7.069 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>,  $a_0 = 5048$  м/с,  $b_0 = 383.31$  м/с) [7]

$\omega_1^* = 3883$  Гц, что практически в 13 раз превышает  $\omega_1 = 294$  Гц. Субконтроктава, контроктава, большая октава, малая, первая, вторая, третья, четвертая и пятая октавы имеют, как известно [7], следующие частоты (в Гц): 16.35 – 30.87, 32.4 ... 61.74, 65.41 ... 123.47, 130.81 ... 246.94, 261.63 ... 493.88, 523.25 ... 987.77, 1046.5 ... 1975.53, 2093 ... 3951.07, 4186.01 ... 7902.13. Поэтому  $\omega_1^*$  лежит в четвертой октаве и должна быть учтена (как и последующие три частоты) в суммарном спектре колебаний.

4°. Имеет место сдвиг собственных частот колебаний за счет упругости заделки.

5°. Колебания деки происходят на частотах близких к частотам продольных и поперечных колебаний.

6°. В выражении  $x_1(s, t)$  (3.8) присутствует компонент  $A_{i,j}^m$  (3.6), из которого определяется условие резонанса:

$$m = \frac{\sqrt{e_0}j}{\sqrt{1+e_0}-\sqrt{e_0}}, \quad m = \frac{\sqrt{e_0}i}{\sqrt{1+e_0}+\sqrt{e_0}}, \quad m = \frac{\sqrt{e_0}(2j-1)}{2(\sqrt{1+e_0}-\sqrt{e_0})}$$

$$m = \frac{\sqrt{e_0}(2i+1)}{2(\sqrt{1+e_0}-\sqrt{e_0})}, \quad i \in 1, 2, \dots, m-1, \quad j \in 1, 2, \dots$$

Например, при  $e_0 = 1/197$  имеем  $\omega_1^* = \omega_{13}$ .

7°. Учет продольных колебаний, (в том числе вынужденных), приводит к новым расчетным схемам колебания музыкальных инструментов.

8°. Целесообразна постановка экспериментальных исследований в данной области.

Авторы считают своим долгом отметить, что принципиальные моменты этой статьи были обсуждены с профессором А.В. Римским-Корсаковым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю.А. К уточнению теории колебания музыкальных струн // Докл. РАН, 1999. Т. 369. № 4. С. 461–465.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высш. шк. 1970. 710 с.
4. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
5. Рахматулин Х.А. О косом ударе по гибкой нити с большими скоростями при наличии трения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 6. С. 449–462.
6. Nayfeh A.H. Perturbation Methods. N.Y. etc.: Wiley, 1973 = Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
7. Кузнецов Л.А. Акустика музыкальных инструментов. М.: Легпромбытиздат, 1989. 368 с.