

УДК 531.36:532.5

© 2003 г. Н.Г. Бандурин

БОЛЬШИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ МАССИВНОЙ РАСТЯЖИМОЙ НИТИ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В лагранжевой системе координат получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие деформирование массивной растяжимой нити в движущейся среде. Решение трех конкретных задач при заданных числовых параметрах выполнено на основе разработанного автором численного метода решения систем нелинейных интегродифференциальных уравнений.

Задачи о деформировании нитей и гибких тросовых систем возникают при проектировании различных объектов во многих областях техники и технологии. Отметим задачу о форме троса при действии на него потока воздуха [1], проблему расчета орбитальных тросовых систем [2, 3] задачу о деформировании волокон наполнителя при получении армированных полимерных композиций [4]. Ниже получены и для трех частных случаев решены уравнения, описывающие нелинейное деформирование массивной нити. Растягивающая сила рассматривается как функция коэффициента относительного удлинения нити, который в свою очередь связан нелинейной зависимостью с компонентами вектора перемещения. Перемещения и деформации нити принимаются произвольно большими.

1. Постановка задачи. Предполагается, что в ортогональной декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) в начальный момент времени $t = 0$ направление первоначально прямой растяжимой нити с массой на единицу длины m_0 определено ортом $\mathbf{p} = p_i \mathbf{e}_i$ и при $t > t_0$ движение нити осуществляется в среде, поле скоростей которой задано в виде $\mathbf{v}_c = v_{ci}(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_i$. На нить действуют внешние силы, интенсивность которых на единицу первоначальной ее длины равна

$$\mathbf{F} = F_i(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{e}_i.$$

Принимая в качестве переменной Лагранжа длину дуги нити s , можно записать выражения для радиус-векторов \mathbf{r}_0 и \mathbf{r} произвольной точки нити относительно системы отсчета x_i в начальный и текущий моменты времени, вектора перемещения \mathbf{w} , базисных векторов \mathbf{g}^0 , \mathbf{g} и относительного удлинения l [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= s(p_i \mathbf{e}_i), \quad \mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{w} \\ \mathbf{g}^0 &= \mathbf{r}'_0 = p_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{g}^0 \cdot \mathbf{g}^0 = 1 \\ \mathbf{g} &= \mathbf{r}' = (p_i + w'_i) \mathbf{e}_i, \quad l = |\mathbf{g}| - 1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по s .

Для получения уравнений движения в текущий момент времени t рассматриваются две точки нити, ограничивающие бесконечно малый ее элемент ds : точка a , базисный вектор которой \mathbf{g} , и точка a_1 , для которой

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + d\mathbf{r}_0 + d\mathbf{w}, \quad \mathbf{g}_1 = (p_1 + w'_1 + dw'_1) \mathbf{e}_i \tag{1.2}$$

Орты касательных в точках a и a_1 определяются выражениями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{g}/|\mathbf{g}|, \quad |\mathbf{g}| = [(p_1 + w'_1)^2 + (p_1 + w'_2)^2 + (p_3 + w'_3)^2]^{1/2} \\ \boldsymbol{\tau}_1 &= \mathbf{g}_1/|\mathbf{g}_1| = \mathbf{g}/|\mathbf{g}| + \mathbf{g}\{|\mathbf{g}|^{-3}[(p_i + w'_i)w''_i] + |\mathbf{g}|^{-1}[w''_i \mathbf{e}_i]\} ds \end{aligned} \quad (1.3)$$

Элемент ds находится под действием сил инерции $\mathbf{F}_{in}ds$, внешних сил $\mathbf{F}ds$, а также сил, действующих со стороны среды, при продольном $\mathbf{R}_\tau ds$ и поперечном $\mathbf{R}_n ds$ обтекании. Векторы \mathbf{R}_τ и \mathbf{R}_n определяются с использованием вектора скорости движения нити относительно среды \mathbf{v}_0 в текущий момент времени

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_c \quad (1.4)$$

где $\mathbf{v} = \dot{w}_i \mathbf{e}_i$ – скорость движения нити в системе координат x_i (точкой обозначено дифференцирование по времени). Вектор \mathbf{v}_0 можно разложить на продольную $\mathbf{v}_{0\tau}$ и поперечную \mathbf{v}_{0n} составляющие, а также найти орт нормали \mathbf{n}

$$\mathbf{v}_{0\tau} = (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{v}_{0n} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{0\tau}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{v}_{0n}/|\mathbf{v}_{0n}| \quad (1.5)$$

Предполагается, что векторы \mathbf{R}_τ и \mathbf{R}_n могут быть представлены в виде

$$\mathbf{R}_\tau = -\varphi(|\mathbf{v}_{0\tau}|, \text{Re}, \dots)\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{R}_n = -\psi(|\mathbf{v}_{0n}|, \text{Re}, \dots)\mathbf{n} \quad (1.6)$$

где функции φ и ψ могут зависеть не только от абсолютных значений скоростей и от числа Рейнольдса, но и от других параметров нити и среды.

В точках a и a_1 на элемент нити ds действуют растягивающие усилия $-T\boldsymbol{\tau}$ и $(T + dT)\boldsymbol{\tau}_1$ соответственно, где T – скалярная функция относительного удлинения

$$T = \chi(l) \quad (1.7)$$

Приравнявая нулю главный вектор действующих на элемент нити сил, получим уравнение равновесия в векторной форме

$$-T\boldsymbol{\tau} + (T + dT)\boldsymbol{\tau}_1 + (\mathbf{F}_{in} + \mathbf{F} + \mathbf{R}_\tau + \mathbf{R}_n)ds = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

которое эквивалентно следующим трем дифференциальным уравнениям, полученным в результате скалярного умножения левой и правой частей равенства (1.8) на \mathbf{e}_k :

$$\begin{aligned} (\partial\chi/\partial l)l|\mathbf{g}|^2(p_k + w'_k) + \chi\{|\mathbf{g}|^2 w''_k - (p_k + w'_k)[(p_i + w'_i)w''_i]\} + \\ + |\mathbf{g}|^3(-m_0\ddot{w}_k + F_k + R_{\tau k} + R_{nk}) = 0, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Ниже принято, что нить движется в плоскости x_1ox_2 и при $t = 0$ совпадает с горизонтальной осью ox . В этом частном случае

$$p_1 = 1, \quad p_2 = p_3 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2$$

$$x_1 = s + w_1, \quad x_2 = w_2$$

Кроме того, выражение для растягивающей силы принимается в виде

$$T = T_0 + \lambda l \quad (1.10)$$

где T_0 – начальное натяжение нити, λ – постоянный параметр. При этих условиях из системы (1.9) можно получить два уравнения для вычисления функций $w_1(s, t)$ и $w_2(s, t)$

$$\begin{aligned} \lambda\alpha(1 + w'_1) + (T_0 + \lambda l)[|\mathbf{g}|w''_1 - \alpha|\mathbf{g}|^{-1}(1 + w'_1)] + |\mathbf{g}|^2(-m_0\ddot{w}_1 + F_1 - \varphi\tau_1 - \psi n_1) = 0 \\ \lambda a w'_2 + (T_0 + \lambda l)[|\mathbf{g}|w''_2 - \alpha|\mathbf{g}|^{-1}w'_2] + |\mathbf{g}|^2(-m_0\ddot{w}_2 + F_2 - \varphi\tau_2 - \psi n_2) = 0 \\ \alpha = (1 + w'_1)w''_1 + w'_2 w''_2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Полученная система уравнений достаточно точно описывает движение нити при больших перемещениях и деформациях. Очевидно, что при пренебрежении произведениями производных функций w_1 и w_2 первое уравнение (1.11) описывает малые продольные колебания стержня, а второе – поперечные колебания струны [6].

2. Числовые примеры. Ниже приводятся результаты решения системы уравнений (1.11), описывающей движение нити длиной $L_0 = 1$ в некоторых частных случаях краевых и начальных условий. Решение получено с помощью предложенного автором метода, основанного на использовании интерполяционных процедур [7], и универсальных программ для решения двумерных краевых и начально-краевых задач [8].

2.1. Нить закреплена по концам (при $s = 0$ и $s = 1$). Внешние силы и сопротивление среды не учитываются. Параметры нити: $T_0 = 1$, $\lambda = 2$, $m_0 = 10$. В начальный момент времени (при $t = 0$) частицам нити в поперечном направлении придается скорость, изменяющаяся по закону

$$V_0 = 1/2 \sin 2\pi s \quad (2.1)$$

Для системы уравнений (1.11) решалась начально-краевая задача с краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} w_1(0, t) = w_2(0, t) = 0, \quad w_1(1, t) = w_2(1, t) = 0 \\ w_1(s, 0) = w_2(s, 0) = 0, \quad \dot{w}_1(s, 0) = 0, \quad \dot{w}_2(s, 0) = 1/2 \sin 2\pi s \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение получено в виде последовательности шагов по времени. На отрезок $[0, L_0]$ наносилась сетка с нечетным числом узлов n_s . Степень используемого интерполяционного многочлена [8] принималась равной $(n_s + 1)/2$. На каждом шаге по времени решение получалось на последовательности отрезков длиной H_t , на которые наносилась сетка с числом узлов n_t . Следовательно, шаг по времени получается равным $H_t/(n_t - 1)$.

Начальные условия для решения на последующем шаге определялись из решения на предыдущем. Итерационный процесс завершался при уменьшении невязки в уравнениях (1.11) до фиксированного малого значения.

Особенность этой существенно нелинейной задачи заключается в том, что при $t > 0$ нить совершает свободные колебания, поэтому имеется возможность проследить выполнение закона сохранения энергии. В любой момент времени сумма кинетической и потенциальной энергии равна

$$\begin{aligned} U = U_k + U_p = \\ = 1/2 m_0 \int_0^1 [(\dot{w}_1(s, t))^2 + (\dot{w}_2(s, t))^2] ds + \int_0^1 l(s) [T_0 + 1/2 \lambda l(s)] ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

и эта величина при $t > 0$ должна быть равна значению кинетической энергии нити при $t = 0$

$$U_0 = \frac{1}{2} m_0 \int_0^1 V_0^2 ds = \frac{5}{8} \quad (2.4)$$

В таблице для некоторых вариантов сетки узлов и трех моментов времени t представлены вычисленные с шагом по времени $h_t = H_t/(n_t - 1) = 0.025$ значения вертикального перемещения средней точки нити $W_2(1/2, t)$ и максимального отклонения полной энергии от ее точного значения $\Delta = \max|U - U_0|$, а также длина нити в деформированном состоянии при $t = 1.4$, которая вычислялась по формуле

$$L = \int_0^1 (l + 1) ds = \int_0^1 [(1 + w_1')^2 + w_2'^2]^{1/2} ds \quad (2.5)$$

Сетка	$L(t = 1.4)$	$w(1/2, t) \cdot 10^4$			$\Delta \cdot 10^4$		
		t			t		
		1.4	4.2	9.8	1.4	2.8	9.8
7×3	1.4233	4620	-4520	-4240	34	35	58
9×3	1.4219	4660	-4580	-4530	11	24	47
13×3	1.4239	4684	-4669	-	1	7	-
17×3	1.4240	4685	-	-	0.2	-	-

Три значения времени, представленных в таблице, выбраны так, чтобы они приблизительно соответствовали некоторым экстремальным значениям вертикального перемещения середины нити. Можно видеть, что в процессе деформирования длина нити увеличивается почти на половину своего первоначального значения. Естественно, что с течением времени наблюдается возрастание отклонения Δ , но оно незначительное и даже при $t = 9.8$ не превышает одного процента. Если же пренебречь в выражении (2.3) действием инерционных сил в горизонтальном направлении, то отклонение увеличивается до пяти процентов. Следует подчеркнуть, что при $n_s > 9$ и, следовательно, при высоком порядке аппроксимации дифференциальных уравнений алгебраическими получить решение на большом промежутке времени в этой задаче не удалось, что, по-видимому, объясняется неустойчивостью физического процесса. В то же время даже при $n_s = 9$ и степени интерполирующего многочлена $n = 4$ погрешность аппроксимации равна $O(h_s^{n+1}) = O(3 \cdot 10^{-5})$. При решении технических задач такая погрешность может оказаться приемлемой. Что касается степени интерполирующего полинома по времени, то минимальное ее значение $n = 2$ ($n_t = 3$) с точки зрения устойчивости вычислительного процесса наиболее оптимально.

2.2. Правый конец нити при $s = 1$ закреплен неподвижно, а левый движется с постоянной угловой скоростью вокруг правого по окружности с радиусом единица. Внешние силы и сопротивление среды не учитываются. Параметры нити: $T_0 = 2$, $\lambda = 4$, $m_0 = 20$.

Краевые и начальные условия

$$\begin{aligned}
 w_1(0, t) &= 1 - \cos(0.2t), & w_1(1, t) &= 0 \\
 \dot{w}_1(0, t) &= \sin(0.2t), & \dot{w}_1(1, t) &= 0 \\
 w_1(s, 0) &= w_2(s, 0) = 0, & \dot{w}_1(s, 0) &= \dot{w}_2(s, 0) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Задача решена при следующих значениях параметров:

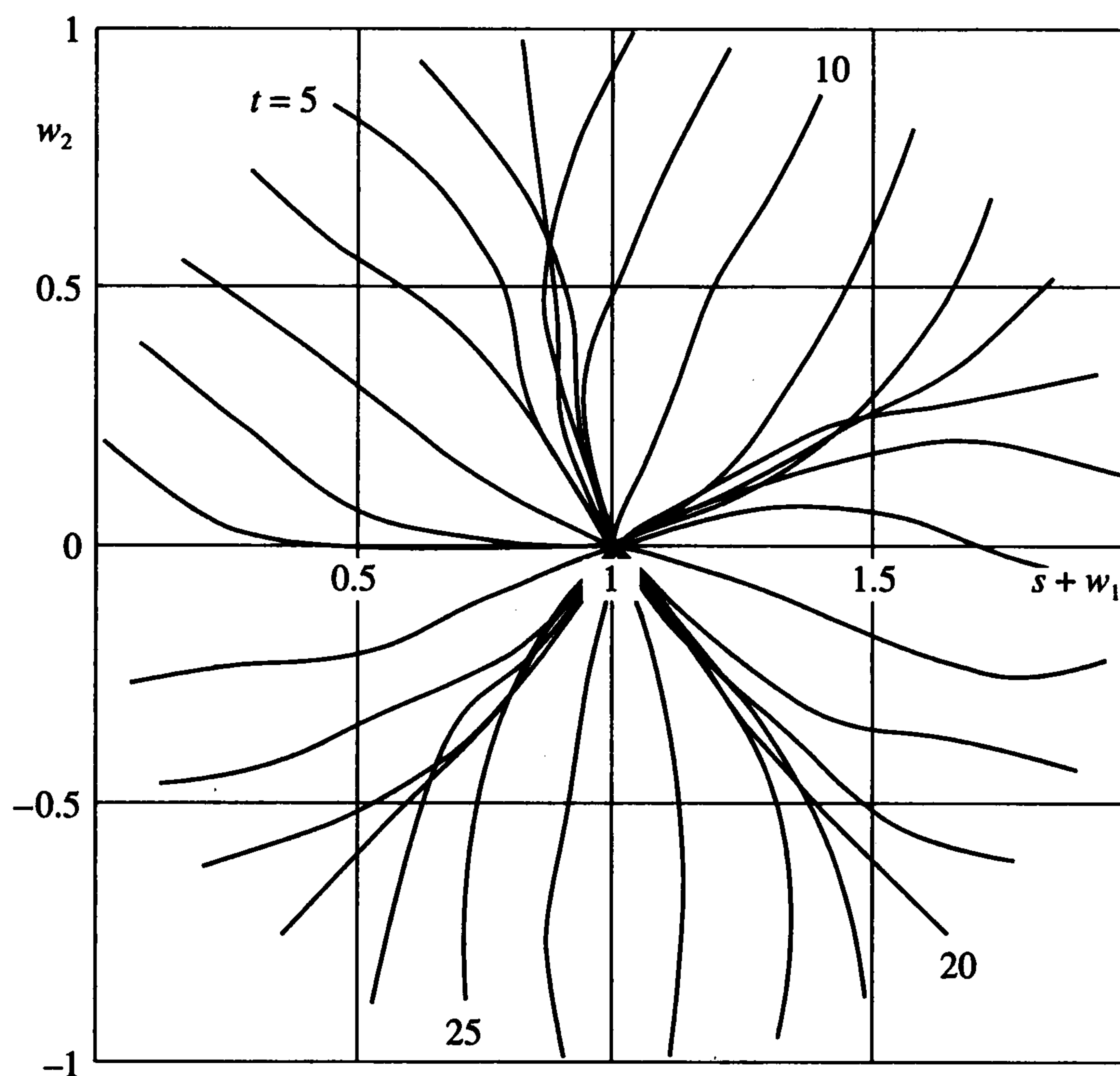
$$n_s = 5, \quad n_t = 3, \quad h_t = 0.025$$

На фиг. 1 представлена форма нити в разные моменты времени. В начале движения нить искривляется под действием инерционных сил, а затем во время вращения вокруг правой неподвижной точки совершает колебания, период которых для первой моды $T_1 \approx 3.35$.

Результаты этого примера подтверждают достаточно высокую эффективность предлагаемого подхода при изучении произвольно больших перемещений и деформаций эластичных объектов, простейшим примером которых является деформируемая нить.

2.3. Нить закреплена по концам (при $s = 0$ и $s = 1$). Параметры нити: $T_0 = 1$, $\lambda = 2$, $m_0 = 20$. На нить действует внешняя сила

$$\mathbf{F} = 60(1 - x_1/2)\exp(-5t)\mathbf{e}_2$$



Фиг. 1

Сопротивление среды учитывается только при поперечном обтекании, причем принято

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{0}, \quad \varphi = 0, \quad \psi = k|\mathbf{v}_{0n}|^2$$

Выражения для квадрата скорости и орта нормали получаются на основе соотношений (1.5)

$$|\mathbf{v}_{0n}|^2 = |\mathbf{v} - (\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}|^2 = (A^2 + B^2)/|\mathbf{g}|^4 \quad (2.7)$$

$$A = \dot{w}_1 w_2'^2 - \dot{w}_2 (1 + w_1') w_2', \quad B = \dot{w}_2 (1 + w_1')^2 - \dot{w}_1 (1 + w_1') w_2'$$

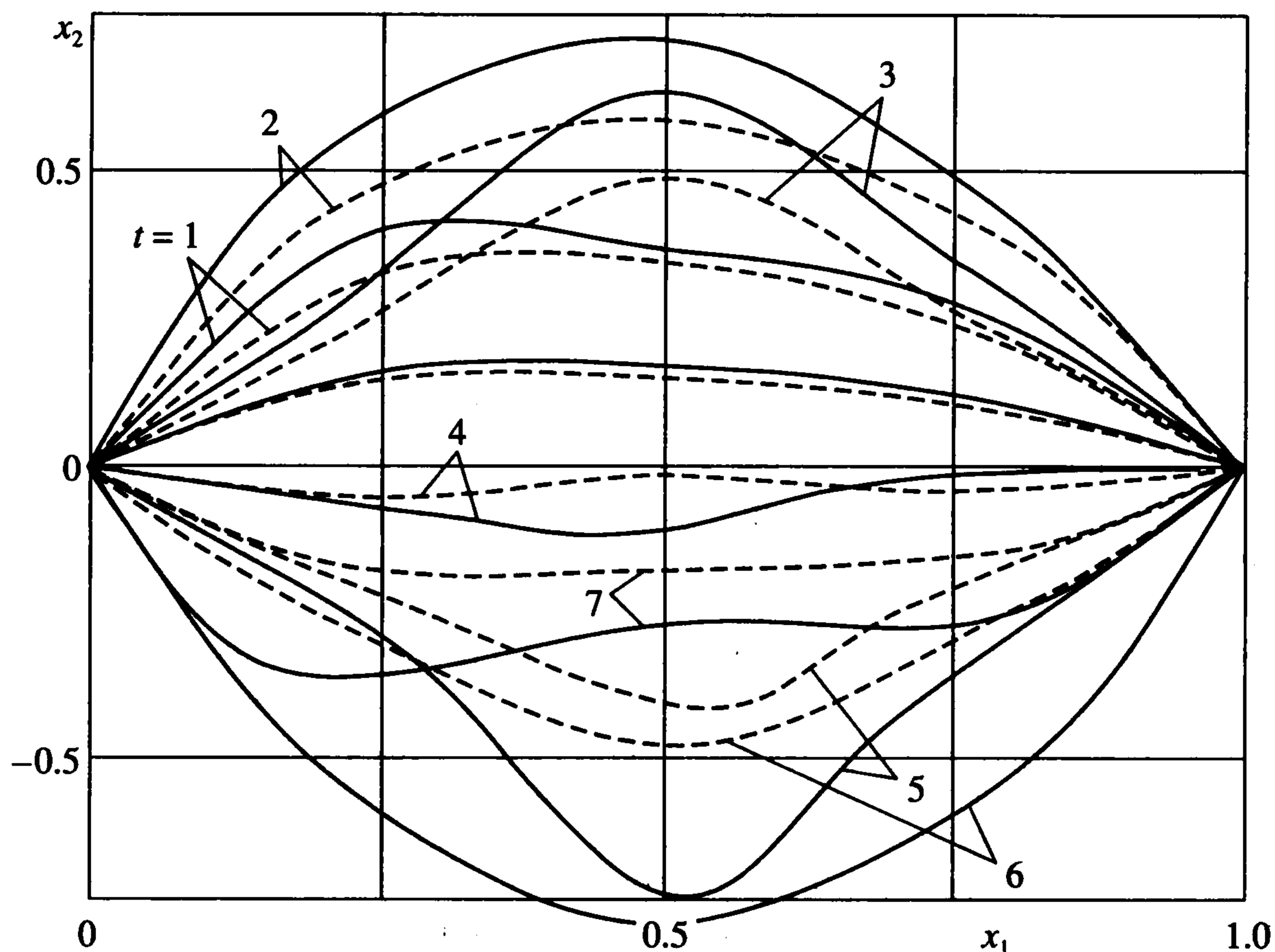
$$\mathbf{n} = (A^2 + B^2)^{-1/2} (A\mathbf{e}_1 + B\mathbf{e}_2)$$

Теперь систему уравнений (1.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda\alpha(1 + w_1') + (T_0 + \lambda l)[|\mathbf{g}|w_1'' - \alpha|\mathbf{g}|^{-1}(1 + w_1')] + [-m_0|\mathbf{g}|^2\ddot{w}_1 - kB(A^2 + B^2)^{-2}] = 0 \\ \lambda\alpha w_2' + (T_0 + \lambda l)[|\mathbf{g}|w_1'' - \alpha|\mathbf{g}|^{-1}w_2'] + [-m_0|\mathbf{g}|^2\ddot{w}_2 + \\ + 60(1 - (s + w_1)/2)\exp(-5t) - kB(A^2 + B^2)^{-2}] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\alpha = (1 + w_1')w_1'' + w_2'w_2''$$

Краевые и начальные условия отличаются от условий (2.2) лишь тем, что в данном случае последнее условие также однородное: $\dot{w}_2(s, 0) = 0$.



Фиг. 2

На сетках $n_x = 5$, $n_t = 3$, $h_t = 0.05$ и $n_x = 7$, $n_t = 3$, $h_t = 0.025$ получены практически одинаковые результаты, которые представлены на фиг. 2, где сплошными линиями показаны положения нити в разные моменты времени t без учета действия среды ($k = 0$), штриховыми линиями – с учетом этого действия при $k = 15$. Видно, что нить получает большие деформации и перемещения: в моменты наибольшего отклонения от положения статического равновесия ее длина увеличивается на 84%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е. Об изгибе троса змеевого аэростата под действием ветра. // Собр. соч. Т. 2. Л.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 536–548.
2. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 329 с.
3. Дигнат Ф., Шилен В. Управление колебаниями орбитальной тросовой системы // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 747–754.
4. Шаповалов В.М. Движение гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 2. С. 144–153.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
6. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1980. 408 с.
7. Бахвалов Н.С. Численные методы. Ч. 1. М.: Наука, 1973. 631 с.
8. Бандурин Н.Г. Новый численный метод порядка n для решения интегродифференциальных уравнений общего вида // Вычислительные технологии. 2002. Т. 7. № 2. С. 3–10.