УДК 531.38

© 2003 г. А.В. Борисов, И.С. Мамаев

СЛУЧАЙ ГЕССА В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Приводятся обобщения интеграла Гесса для различных форм уравнений движения твердого тела. Указаны общие условия существования этого интеграла, обусловленного наличием дополнительных явных симметрий уравнений движения. Рассмотрены вопросы понижения порядка, явного интегрирования и качественного анализа движения твердого тела при этих условиях. Впервые указаны аналоги случаев Гесса для гироскопа в кардановом подвесе и уравнений Чаплыгина, описывающих падение твердого тела в жидкости.

1. Случай Гесса в уравнениях Эйлера – Пуассона. Уравнения Эйлера – Пуассона, описывающие движение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, в гамильтоновой форме имеют вид

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma}\times\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma}\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} \tag{1.1}$$

Гамильтониан можно представить в форме

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) - \mu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma})$$

где $\mathbf{M}$ – вектор кинетического момента в системе координат, связанной с телом, $\boldsymbol{\gamma}$ – орт вертикали в той же системе, $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1}$ – обратный тензор инерции, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор центра масс тела в подвижной системе.

Скобки Пуассона для переменных $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$ следующие:

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk}M_k \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk}\gamma_k \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \tag{1.2}$$

Уравнения (1.1) при всякой функции Гамильтона допускают интеграл площадей и геометрический интеграл вида

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = \boldsymbol{\gamma}^2 = 1 \tag{1.3}$$

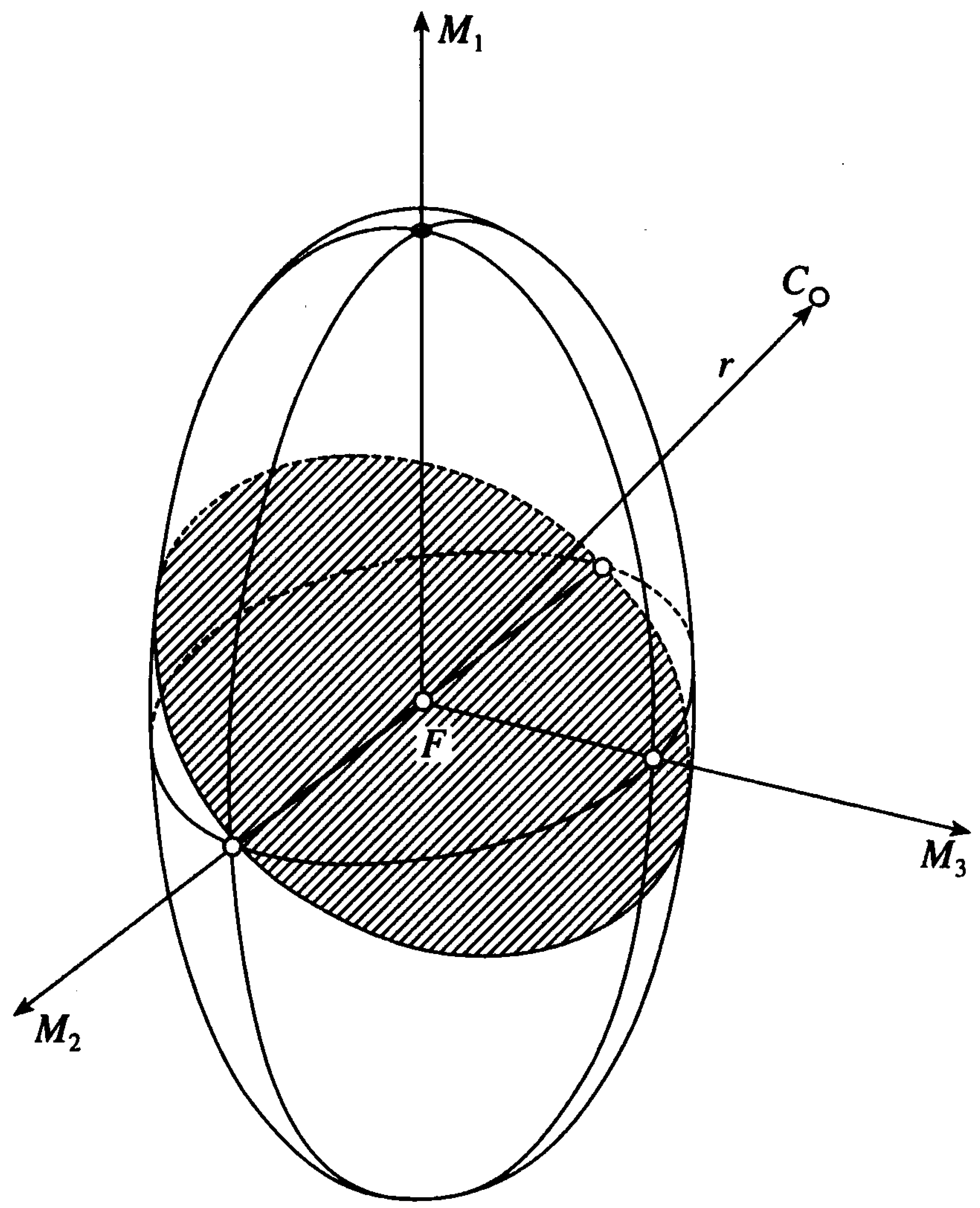
Известно лишь несколько общих и частных случаев интегрируемости уравнений (1.1), при которых кроме этих интегралов существует еще один дополнительный общий (частный) интеграл, они реализуются при дополнительных ограничениях на параметры системы и на начальные условия. Это случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Горячева – Чаплыгина. В общем случае уравнения (1.1) оказываются неинтегрируемыми [1].

Кроме интегрируемых случаев для уравнений (1.1) известны несколько частных решений, большинство из которых приведено, например, в [2]. Наиболее известно решение Гесса, которое определяется линейным по моменту $\mathbf{M}$ инвариантным соотношением.

Гамильтониан уравнений Эйлера – Пуассона для случая Гесса имеет вид [3]

$$H = \frac{1}{2}(a_1M_1^2 + a_2M_2^2 + a_3M_3^2) - \mu(\sqrt{a_2 - a_1}\gamma_1 \pm \sqrt{a_3 - a_2}\gamma_3) \tag{1.4}$$

$$a_1 < a_2 < a_3$$



Фиг. 1

т.е. центр масс тела в этом случае лежит на оси, перпендикулярной круговому сечению гирационного эллипсоида (фиг. 1).

Указанное Гессом инвариантное соотношение имеет вид

$$F = \sqrt{a_2 - a_1} M_1 \pm \sqrt{a_3 - a_2} M_3 = 0 \tag{1.5}$$

Разные знаки соответствуют разным круговым сечениям.

Аналитическое исследование движения Гесса выполнено Некрасовым [4], вместо эллиптических квадратур для одной переменной получается уравнение Риккати. Его несложно получить (для переменной l), если воспользоваться переменными Андуайе – Деприи [5]. Геометрическая интерпретация в качестве "локсодромического маятника" дана Жуковским [6]. Впоследствии при помощи метода Ковалевской инвариантное соотношение Гесса было указано Аппельротом [7], который пытался восполнить некоторые пробелы в работе Ковалевской об однозначности общего решения уравнений Эйлера – Пуассона.

Замечания. 1°. Решение в случае Гесса ветвится на комплексной плоскости времени.

2°. В зависимости от циклической переменной, по которой выполняется редукция (угол собственного вращения или угол прецессии), динамика приведенной системы может быть разной [5].

Динамика приведенной системы (1.4) в переменных ($\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\gamma}$) при больших энергиях описана ранее [1]. В этих переменных интеграл (1.5) определяет особый тор, на котором находятся неустойчивые периодические решения, которые при $\mu \to 0$ соответствуют перманентным вращениям вокруг средней оси. Сам тор заполнен в этом случае траекториями, асимптотически приближающимися к этим решениям. При возмущении задачи Эйлера – Пуансо, для которого выполняются условия Гесса, оказывается, что пара сепаратрис, соответствующих неустойчивым перманентным вращениям, не расщепляется.

Такое описание динамики приведенной системы (с асимптотическим поведением) не противоречит результату Жуковского, согласно которому центр масс тела совершает квазипериодическое движение по закону сферического маятника, так как в отличие от уравнений (1.1) система, описывающая движение центра масс, получается редукцией не по углу прецессии, а по углу собственного вращения вокруг оси, перпендикулярной круговому сечению [5].

2. Аналогия со случаем Лагранжа, циклическая переменная. Случай Гесса во многом аналогичен случаю Лагранжа и связан с наличием у системы циклической переменной (явная симметрия гамильтониана относительно вращений) на одном из уровней некоторого "циклического" интеграла. Для того чтобы показать это явно, запишем гамильтониан (1.4) в системе координат, для которой одна из осей – ось Ox_3 (фиг. 1) совпадет с осью, перпендикулярной круговому сечению гирационного эллипсоида (ср. с другим подходом [8])

$$H = \frac{1}{2}(a_1'(M_1^2+M_2^2)+a_3'M_3^2+2bM_3M_1)-\mu'\gamma_3 \tag{2.1}$$

Слагаемые вида M_3M_2 могут быть исключены из гамильтониана поворотом осей Ox_1, Ox_2. Матрица перехода определяется формулой (3.8). Интеграл Гесса (1.5) при этом принимает вид

$$M_3 = 0 \tag{2.2}$$

Гамильтониан (2.1) на уровне $M_3 = 0$ совпадает с гамильтонианом Лагранжа [5], поэтому для описания приведенной системы, описывающей динамику угла нутации центра масс $\gamma_3 = \cos\theta$, можем воспользоваться переменными (см. подробнее [9])

$$\begin{gathered}\mathbf{K} = (K_1, K_2), \quad K_1 = (M_1\gamma_1+M_2\gamma_2)/\tilde\gamma, \quad K_2 = (M_1\gamma_2-M_2\gamma_1)/\tilde\gamma\\ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2), \quad \sigma_1 = \tilde\gamma, \quad \sigma_2 = \gamma_3, \quad \tilde\gamma = \sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\end{gathered} \tag{2.3}$$

На уровне $M_3 = 0$ они образуют замкнутую систему уравнений

$$\begin{gathered}\dot K_1 = -a_1'K_1K_2\sigma_2/\sigma_1, \quad \dot K_2 = a_1'K_1^2\sigma_2/\sigma_1-\mu'\sigma_1\\ \dot\sigma_1 = a_1'K_2\sigma_2, \quad \dot\sigma_2 = -a_1'K_2\sigma_1\end{gathered} \tag{2.4}$$

Гамильтониан (2.1) можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{K}^2-\mu\sigma_2+\frac{1}{2}M_3(a_3'M_3+2bM_1)$$

Уравнение для σ_2 совпадает с квадратурой для вертикальной координаты сферического маятника [6]

$$\dot\sigma_2 = 2mR^2a_2(1-\sigma_2^2)\left(h-\mu\sigma-\frac{1}{2}c^2/(1-\sigma_2^2)\right)$$

где R – расстояние от центра масс до точки закрепления, $a_2^{-1} = I_2$ – средний главный момент инерции, $H = h$, $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = c$ – постоянные интегралов.

Угол прецессии ψ в этом случае (как и в случае Лагранжа) целиком определяется решением приведенной системы (2.4)

$$\dot\psi = a_1'K_1/\sigma_1$$

и не зависит от решения для угла собственного вращения $\varphi(t)$.

Замечание. Понижение порядка при наличии линейных по импульсам инвариантных соотношений подробно изучал Леви-Чивита, его основные результаты содержатся в известном учебнике [10]. Однако при применении своих результатов к динамике твердого тела он не обратил внимания на случай Гесса, сосредоточившись на более частном классе инвариантных соотношений, определяющих вращения Штауде.

3. Условия существования интеграла Гесса для обобщенно потенциального поля. Рассмотрим обобщение интеграла Гесса на случай, когда потенциал зависит от трех полей и в гамильтониане присутствует обобщенный потенциал

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}'\mathbf{M}) + (\mathbf{M}, \mathbf{W}(\alpha, \beta, \gamma)) + U(\alpha, \beta, \gamma) \tag{3.1}$$

где $\mathbf{A}' = \|a'_{ij}\|$ – постоянная, не обязательно диагональная матрица, α, β, γ – проекции ортов неподвижной системы координат на оси, связанные с телом.

Естественным обобщением интеграла Гесса (1.5) в специальной системе координат (для которой центр масс лежит на оси Oz) является частный интеграл вида

$$M_3 - c = 0, \quad c = \text{const} \tag{3.2}$$

Условия его существования можно представить в общей форме

$$a'_{11} = a'_{22}, \quad a'_{12} = 0$$

$$\begin{gathered} \hat{L}(U + cW_3) = 0, \quad \hat{L}W_1 + W_2 + ca'_{23} = 0, \quad \hat{L}W_2 - W_1 - ca'_{13} = 0 \\ \hat{L} = (\hat{L}_\alpha + \hat{L}_\beta + \hat{L}_\gamma) \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$\hat{L}_\delta = \delta_1\frac{\partial}{\partial\delta_2} - \delta_2\frac{\partial}{\partial\delta_1}, \quad \delta = \alpha, \beta, \gamma$$

Укажем также в явном виде условия существования интеграла Гесса (3.2) для частного вида системы (3.1), для которой

$$\mathbf{W} = \mathbf{K} + \sum_{i=1}^{3}\mathbf{B}^{(i)}\mathbf{e}_i, \quad U = \sum_{i=1}^{3}(\mathbf{r}_i, \mathbf{e}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{e}_i, \mathbf{C}^{(i)}\mathbf{e}_i) \tag{3.4}$$

где $\mathbf{K}$, $\mathbf{r}_i$ – постоянные векторы, $\mathbf{e}_1 = \alpha$, $\mathbf{e}_2 = \beta$, $\mathbf{e}_3 = \gamma$, $\mathbf{C}^{(i)}$ – симметричные $\mathbf{B}^{(i)}$ – произвольные (3×3)-матрицы ($i = 1, 2, 3$).

Были приведены [11, 12] условия существования интеграла Гесса для некоторых случаев системы (3.1) с потенциалом (3.4).

Используя соотношения (3.2) и (3.3), находим

$$b_{11}^{(i)} = b_{22}^{(i)}, \quad b_{12}^{(i)} = -b_{12}^{(i)}, \quad b_{13}^{(i)} = b_{23}^{(i)} = 0$$

$$\mathbf{C}^{(i)} = \operatorname{diag}(c_{11}^{(i)}, c_{11}^{(i)}, c_{33}^{(i)}), \quad \mathbf{K} = (-ca'_{13}, -ca'_{23}, k_3a'_{33}), \mathbf{r}_i = (cb_{31}^{(i)}, cb_{32}^{(i)}, r_3^i)$$

где k_3, $r_3^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) – произвольные постоянные. Гамильтониан можно представить в явном виде

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2}(a'_{11}(M_1^2 + M_2^2) + a'_{33}(M_3 + k_3)^2) + (M_3 - c)(a'_{13}M_1 + a'_{23}M_2) + \\ + b_{11}^{(1)}(M_1\alpha_1 + M_2\alpha_2) + b_{12}^{(1)}(M_1\alpha_2 - M_2\alpha_1)b_{33}^{(1)}M_3\alpha_3 + \\ + (M_3 - c)(b_{31}^{(1)}\alpha_1 + b_{32}^{(1)}\alpha_2) + \frac{1}{2}(c_{11}^{(1)}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + c_{33}^{(1)}\alpha_3^2) + r_3^{(1)}\alpha_3 + \ldots \end{gathered} \tag{3.5}$$

где опущены аналогичные слагаемые, содержащие β, γ.

При помощи вектора кинетического момента в неподвижных осях $\mathbf{N} = ((\mathbf{M}, \alpha), (\mathbf{M}, \beta), (\mathbf{M}, \gamma))$ и вектора $\mathbf{p} = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$ [5] гамильтониан (3.5) можно представить в явном виде

$$H = \frac{1}{2}a'_{11}\mathbf{N}^2 + (\mathbf{b}_1, \mathbf{N}) + (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{p}, \mathbf{N}) + (\mathbf{r} + c\mathbf{b}_3 - c\mathbf{b}_1, \mathbf{p}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\mathbf{p}, \mathbf{C}\mathbf{p}) + (M_3 - c)f(\mathbf{M}, \alpha, \beta, \gamma) \tag{3.6}$$

где

$$\mathbf{b}_1 = (b_{11}^{(1)}, b_{11}^{(2)}, b_{11}^{(3)}), \quad \mathbf{b}_2 = (b_{12}^{(1)}, b_{12}^{(2)}, b_{12}^{(3)}), \quad \mathbf{b}_3 = (b_{33}^{(1)}, b_{33}^{(2)}, b_{33}^{(3)})$$
$$\mathbf{C} = \operatorname{diag}(c_{33}^{(1)} - c_{11}^{(1)}, c_{33}^{(2)} - c_{11}^{(2)}, c_{33}^{(3)} - c_{11}^{(3)}), \quad \mathbf{r} = (r_3^{(1)}, r_3^{(2)}, r_3^{(3)})$$

причем функция $f(\mathbf{M}, \alpha, \beta, \gamma)$ не может быть выражена через переменные $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$, в противном случае возможна редукция на произвольном уровне интеграла $F = M_3$, что соответствует случаю Лагранжа.

Скобка Пуассона для переменных N_i, p_i, $(i = 1, 2, 3)$ имеет вид

$$\{N_i, N_j\} = \varepsilon_{ijk}N_k, \quad \{N_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk}p_k \quad \{p_i, p_j\} = 0 \tag{3.7}$$

Поскольку векторы $\mathbf{N}$, $\mathbf{p}$ коммутируют с величиной $M_3 = (\mathbf{N}, \mathbf{p})$, уравнения движения для них на уровне $M_3 = c$ отделяются и описываются гамильтоновой системой на алгебре $e(3)$ с гамильтонианом (3.6), взятом при условии $M_3 - c = 0$, т.е. описываются системой с двумя степенями свободы.

Таким образом, получаем следующий результат: фазовый поток системы (3.5) при условии Гесса изоморфен потоку шарового волчка (3.6) на фиксированном уровне постоянной площадей $(\mathbf{N}, \mathbf{p}) = M_3 = c$; следовательно, условия интегрируемости на уровне интеграла Гесса определяются случаями интегрируемости шарового волчка.

Так, при $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 = \mathbf{r} = 0$ получаем интегрируемую систему случая Клебша (которая при $c = 0$ совпадает также с системой Неймана), а при $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 = 0$ и $\mathbf{C} = 0$ получаем случай Лагранжа для одного поля.

Замечание. Общая система (3.6) имеет три степени свободы, поэтому для ее интегрируемости на уровне интеграла Гесса необходим еще один дополнительный интеграл. В общем случае он не существует.

Выше была использована специальная система координат, оси которой не совпадают с главными осями тела, и в ней матрица $\mathbf{A}$ недиагональна. Преобразование к диагональной матрице $\mathbf{A}$ может быть выполнено при помощи матрицы

$$\begin{gathered}\mathbf{U} = \|u_{ij}\|; \quad u_{11} = u_{33} = \sqrt{\frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}}, \quad u_{22} = 1 \\ u_{13} = -u_{31} = -\sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}}, \quad u_{12} = u_{21} = u_{23} = u_{32} = 0\end{gathered} \tag{3.8}$$

Условия, накладываемые на постоянные в гамильтониане (3.6) в этой системе координат для случая одного поля, указаны Гессом [3].

В системе координат, для которой тензор инерции диагонален ($\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$), интеграл Гесса (3.2) можно представить в форме [13]

$$\begin{gathered}F = \sqrt{a_2 - a_1}\sqrt{a_3 - a_2}(M_1\sqrt{a_2 - a_1} \pm M_3\sqrt{a_3 - a_2}) - \\ -(K_1\sqrt{a_3 - a_2} \pm K_3\sqrt{a_2 - a_1}) = 0\end{gathered} \tag{3.9}$$

Приведем известные случаи Гесса в уравнениях динамики твердого тела с гамильтонианом (3.1).

Случай одного силового поля: $U = U(\boldsymbol{\gamma})$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\gamma})$.

1°. $U(\boldsymbol{\gamma})$, $\mathbf{W}(\boldsymbol{\gamma}) = 0$ – частный случай Гесса уравнений Эйлера – Пуассона (см. выше).

2°. $U(\boldsymbol{\gamma}) = \mu\gamma_3$, $\mathbf{W} = (ca'_{13}, ca'_{23}, k_3)$, $k_3 = \mathrm{const}$ – частный случай интегрируемости Сретенского [13].

3°. $U(\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\gamma})$, $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(c_1, c_1, c_3)$, $\mathbf{W} = 0$ – частный случай интегрируемости уравнений Кирхгофа, впервые указанный Чаплыгиным [14] из анализа условий существования линейных по моментам инвариантных соотношений; впоследствии этот же результат был получен [11] с помощью метода расщепления сепаратрис.

Случай двух силовых полей при $\mathbf{W} = 0$ [12]. Были рассмотрены [12] два частных случая системы (3.5), вопрос об интегрируемости не обсуждался. Интеграл Гесса записывается в виде $M_3 = 0$.

$$1°.\ U = \frac{1}{2}(c_{11}^{(1)}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + c_{33}^{(1)}\alpha_3^2) + \frac{1}{2}(c_{11}^{(2)}(\beta_1^2 + \beta_2^2) + c_{33}^{(2)}\beta_3^2)$$

Гамильтониан приведенной системы (3.6) в этом случае можно представить в форме

$$H = \frac{1}{2}a'_{11}\mathbf{N}^2 + \frac{1}{2}(c_{33}^{(1)} - c_{11}^{(1)})p_1^2 + \frac{1}{2}(c_{33}^{(2)} - c_{11}^{(2)})p_2^2$$

Вследствие соотношения $(\mathbf{N}, \mathbf{p}) = M_3 = 0$ этот случай изоморфен системе Неймана, которая интегрируема.

$$2°.\ U = r_3\alpha_3 + \frac{1}{2}(c_{11}(\beta_1^2 + \beta_2^2) + c_{33}\beta_3^2)$$

Гамильтониан приведенной системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}a'_{11}\mathbf{N}^2 = r_3p_1 + \frac{1}{2}(c_{33} - c_{11})p_2^2$$

и соответствует сферическому маятнику в поле тяжести и в перпендикулярном ему поле Бруна. Данная система, по-видимому, неинтегрируема.

Замечания. 1°. Интеграл Гесса, как и интеграл Лагранжа, имеется в более сложной системе с пятью степенями свободы [15]: тело, подвешенное на невесомом жестком стержне (струне), движется в поле тяжести. Для интегрируемости этой системы даже при наличии указанных интегралов не хватает еще трех инволютивных интегралов. Они неизвестны, а единственный случай интегрируемости связан с полным разделением движений, когда точка закрепления тела на струне совпадает с центром масс [16].

2°. Были изучены [17] обобщения инвариантного соотношения Гесса на движение гирлянды тяжелых шарнирно связанных твердых тел и указаны условия существования полурегулярных прецессий.

4. Движение твердого тела по гладкой плоскости. Уравнения движения твердого тела по гладкой плоскости также могут быть представлены в гамильтоновой форме на алгебре $e(3)$ (1.2) с функцией Гамильтона [9]

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{2}(\mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{K}), \mathbf{I}\mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{K})) + \frac{1}{2}m(\mathbf{a}, \mathbf{A}(\mathbf{M} - \mathbf{K})) + U(\boldsymbol{\gamma}) \\ \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{A} = (\mathbf{I} + m\mathbf{a} \otimes \mathbf{a})^{-1} \end{gathered} \tag{4.1}$$

где $\mathbf{K}$ – постоянный в теле вектор гиростатического момента, $\boldsymbol{\gamma}$ – вектор нормали к плоскости, $\mathbf{M}$ – вектор кинетического момента, который связан с угловой скоростью по формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{a}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) \tag{4.2}$$

$\mathbf{I}$ – постоянная матрица моментов инерции тела относительного центра масс, m – масса тела.

Вектор $\mathbf{r}(\boldsymbol{\gamma})$ может быть найден из уравнения

$$\boldsymbol{\gamma} = -\operatorname{grad} F(r)/|\operatorname{grad} F(r)|$$

где $F(r) = 0$ – уравнение поверхности тела.

Теорема [12]. Пусть тело ограничено осесимметричной поверхностью, ось симметрии которой перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида вида

$$(\mathbf{M}, \mathbf{I}^{-1}\,\mathbf{M}) = \mathrm{const}$$

Выберем систему координат, одна из осей которой (Ox_3) перпендикулярна круговому сечению, а другая (Ox_2) направлена вдоль средней оси инерции. Тогда, если потенциальная энергия зависит лишь от γ_3 и выполнены соотношения

$$K_2 = 0, \quad a_{11}^{(0)}K_1 + a_{13}^{(0)}K_3 = ca_{13}^{(0)}$$

где $\mathbf{A}^{(0)} = \|a_{ij}^{(0)}\| = \mathbf{I}^{-1}$, то инвариантное соотношение Гесса принимает вид

$$M_3 - c = 0$$

Замечание. В выбранной системе координат $a_{11}^{(0)} = a_{22}^{(0)}$, $a_{13}^{(0)} \neq 0$, $a_{12}^{(0)} = a_{23}^{(0)} = 0$, и уравнение поверхности тела и вектор $\mathbf{a}$ имеют вид

$$F = F(x_1^2 + x_2^2, x_3) = 0, \quad \mathbf{a} = (-f(\gamma_3)\gamma_2, f(\gamma_3)\gamma_1, 0)$$

где функция f зависит лишь от γ_3.

Для твердого тела на гладкой поверхности гамильтониан в случае Гесса отличается от гамильтониана в случае Лагранжа наличием дополнительного слагаемого вида $(M_3 - c)f(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$. Это слагаемое обращается в нуль на уровне интеграла Гесса, на котором также возможен переход к редуцированной системе, определяемой переменными (2.3).

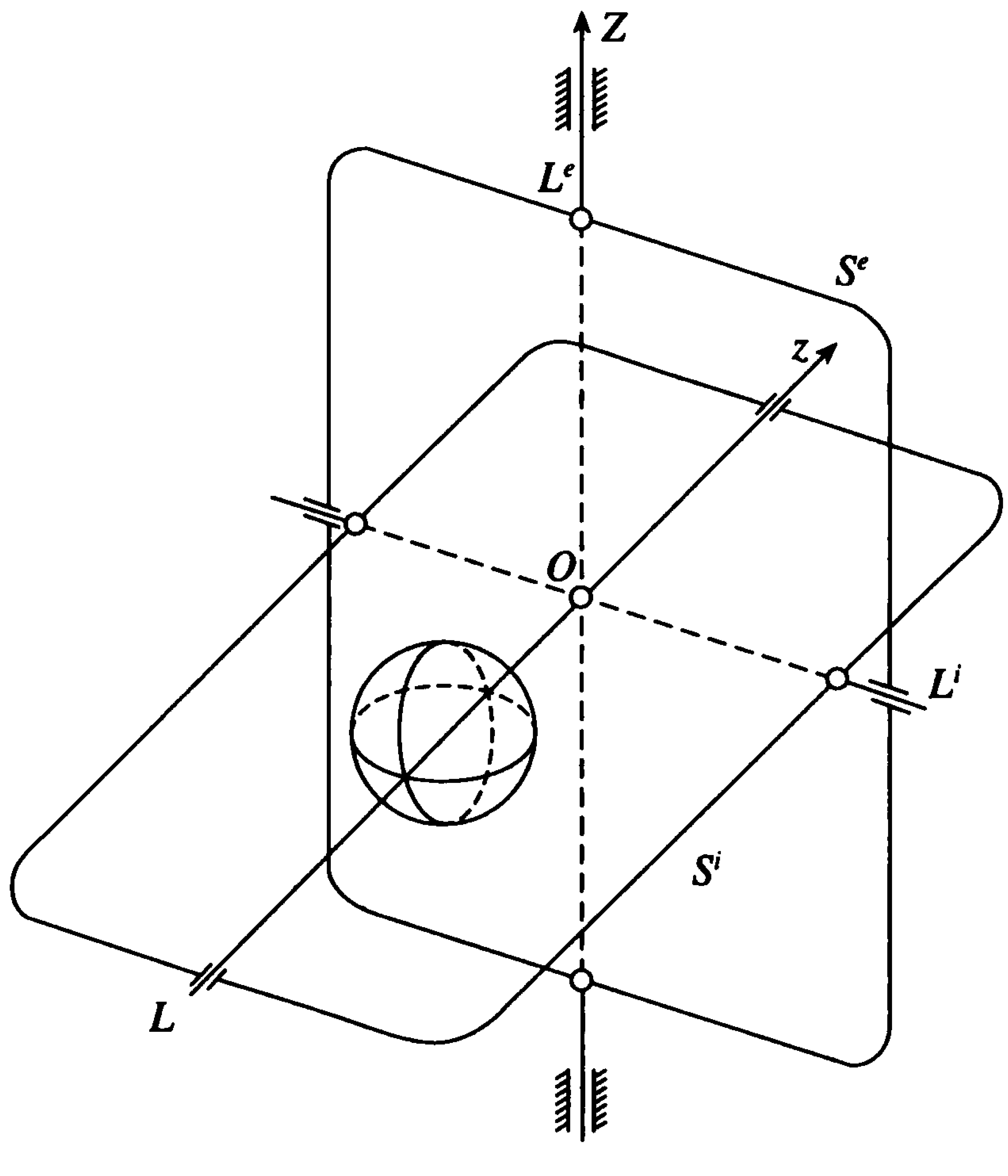
5. Гироскоп в кардановом подвесе. Гироскоп в кардановом подвесе представляет собой систему нескольких тел, соединенных между собой цилиндрическими шарнирами (фиг. 2) [18, 19].

Рассмотрим наиболее часто встречающийся в технике случай, когда оси L^e и L^i, L и L^i взаимно перпендикулярны и пересекаются в одной точке O. Выберем неподвижную систему координат с началом в точке O и осью OZ, направленной вдоль оси вращения L^e, свяжем с телом подвижную систему координат с началом в точке O и осью Oz, направленной вдоль оси L. Пусть α, β, γ – проекции ортов неподвижного пространства на оси, связанные с телом, причем вектор $\boldsymbol{\gamma}$ соответствует оси OZ.

Функция Лагранжа для гироскопа в потенциальном поле может быть записана в виде

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}I^e\left(\frac{\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2}{\tilde{\gamma}_2}\right)^2 + \frac{1}{2\tilde{\gamma}_2}\left[I_1^i(\omega_1\gamma_2 - \omega_2\gamma_1)^2 + \right. \\ \left. + (\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2)^2\left(I_2^i + I_3^i\frac{\gamma_3^2}{\tilde{\gamma}^2}\right)\right] - U(\alpha, \beta, \gamma), \quad \tilde{\gamma}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \end{gathered} \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – проекции угловой скорости на оси, связанные с телом, $\mathbf{I}$ – тензор моментов инерции твердого тела относительно точки O, I^e – момент инерции



Фиг. 2

рамки S^e относительно оси L^e, I_1^e, I_2^i, I_3^i – главные моменты инерции внутренней рамки.

Гамильтонова форма системы (5.1) может быть получена при помощи преобразования Лежандра

$$\mathbf{M} = \partial L/\partial \boldsymbol{\omega}, \quad H = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) - L|_{\boldsymbol{\omega} \to \mathbf{M}}$$

При этом функция Гамильтона системы в общем случае имеет громоздкий вид. Приведем ее при условии, что тело динамически симметрично относительно оси L $(a_2 = a_1)$

$$H = \frac{1}{2}a_3M_3^2 + \frac{1}{2}a_1k(M_1^2 + M_2^2) + \frac{1}{2}a_1^2k\left[I_1^i(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(I^e + (I_3^i - I_2^i)\frac{\gamma_3^2}{\tilde{\gamma}^2}\right)(M_1\gamma_2 - M_2\gamma_1)^2\right] + U(\alpha, \beta, \gamma) \tag{5.2}$$

$$k = \left((1 + a_1I_1^i)\left(1 + a_1I^e + a_1(I_3^i - I_2^i)\frac{\gamma_3^2}{\tilde{\gamma}^2}\right)\right)^{-1}, \quad \tilde{\gamma}^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$$

У этой системы также существует инвариантное соотношение типа Гесса при условии, что ось закрепления динамически несимметричного твердого тела во внутренней рамке S^i (фиг. 2) совпадает с перпендикуляром к круговому сечению гирационного эллипсоида и потенциальная энергия имеет вид $U = U(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Выбирая эту ось в качестве оси Ox_3 подвижной системы координат, интеграл Гесса можно представить в форме

$$M_3 = 0 \tag{5.3}$$

При этом гамильтониан отличается от гамильтониана в случае Лагранжа (5.2) наличием слагаемого вида $M_3 f(\mathbf{M}, \alpha, \beta, \gamma)$. В этом случае также возможна редукция системы при помощи переменных (2.3).

6. Случай Гесса в уравнениях Чаплыгина. Укажем еще один случай существования инвариантного соотношения Гесса для системы, описывающей падение твердого тела в жидкости без начального импульса [20]. Пусть поверхность, ограничивающая тело, осесимметрична, а ось симметрии перпендикулярна круговому сечению гирационного эллипсоида, аналогично условиям задачи о динамике тела на гладкой плоскости. Гамильтониан можно представить в форме

$$H = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + aM_3^2 + 2a_{13}M_1M_3) + \frac{1}{2}\mu t^2\gamma_3^2 \tag{6.1}$$

Инвариантное соотношение в этом случае также имеет вид (5.3). Как и выше, динамика угла нутации та же, что и в случае Лагранжа. Учитывая инвариантное соотношение (5.3), находим

$$-\sin\theta\ddot{\theta} = -c\cos\theta/\sin^2\theta - \mu t^2\sin^2\theta\cos\theta, \quad c = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{6.2}$$

При $c = 0$ получается известное уравнение, изучавшееся Чаплыгиным [14] и Стекловым [21].

Тем не менее угол собственного вращения в этом случае не может быть получен единственной квадратурой и определяется системой

$$\dot{\varphi} = -\frac{c\cos\theta}{\sin^2\theta} + a_{13}M_1, \quad \dot{M}_1 = a_{13}M_1M_2 + \mu t^2\gamma_2\gamma_3$$

где

$$\gamma_3 = \cos\theta, \quad \gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi$$

а величина M_2 может быть найдена из соотношения

$$M_1^2 + M_2^2 = c^2 + \dot{\gamma}_3^2/(1-\gamma_3^2)$$

Для этого случая справедливы результаты проведенного ранее качественного анализа для плоскопараллельного движения пластинки [22].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: РХД, 2000. 256 с.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Киев: Наук. думка, 1978. 294 с.
3. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers un einen festen Punkt // Math. Ann. 1890. Bd. 37. H2. S. 178–181.
4. *Некрасов П.А.* Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сб. кружка люб. мат. наук. 1896. Т. 18. Вып. 2. С. 161–274.
5. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. Ижевск: РХД, 2001. 384 с.

6. *Жуковский Н.Е.* Локсодромический маятник Гесса // Тр. отд. физ. наук О-ва любителей естествознания. 1892. Т. 5. Вып. 2. С. 21–29.
7. *Аппельрот Г.Г.* По поводу § 1 мемуара С.В. Ковалевской "Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe" // Мат. сб. Кружка люб. мат. наук. 1892. Т. 16. Вып. 3. С. 483–507.
8. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера – Пуассона. Киев: Наук. думка, 1992. 167 с.
9. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд. дом "Удмурт. ун-т", 1999. 460 с.
10. *Levi-Civita T., Amaldi V.* Lezioni di meccanica razionale. Bologna: Zanichelli. 1927 = *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2. Ч. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
11. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266. № 6. С. 1298–1300.
12. *Буров А.А., Субханкулов Г.И.* О существовании дополнительных интегралов уравнений движения намагничивающегося твердого тела в идеальной жидкости при наличии магнитного поля // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 745–749.
13. *Сретенский Л.Н.* О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата / Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. № 2. С. 292–294.
14. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости // Мат. сб. 1897, Т. 20, Магистр. диссертация; Собр. соч. М., Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 194–311.
15. *Буров А.А.* О частном интеграле в задаче о движении тяжелого твердого тела, подвешенного на стержне // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 93–95.
16. *Румянцев В.В.* К динамике твердого тела, подвешенного на струне // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 5–15.
17. *Горр Г.В., Рубановский В.Н.* Об одном новом классе движений системы тяжелых шарнирно связанных твердых тел // ПММ. 1988. Т. 52. № 5. С. 707–712.
18. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971. = Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.
19. *Буров А.А.* О неинтегрируемости уравнений движения гиростата в кардановом подвесе // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 3–10.
20. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. Т. 1. С. 312–336.
21. *Стеклов В.А.* О движении твердого тела в жидкости // Харьков: Тип. Дарре, 1893. 234 с.
22. *Козлов В.В.* О падении тяжелого твердого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 10–17.

Ижевск
e-mail: borisov@rcd.ru

Поступила в редакцию
2.IX.2002