

УДК 531.36

© 2003 г. В.М. Буданов, Е.А. Девянин¹**О ДВИЖЕНИИ КОЛЕСНЫХ РОБОТОВ**

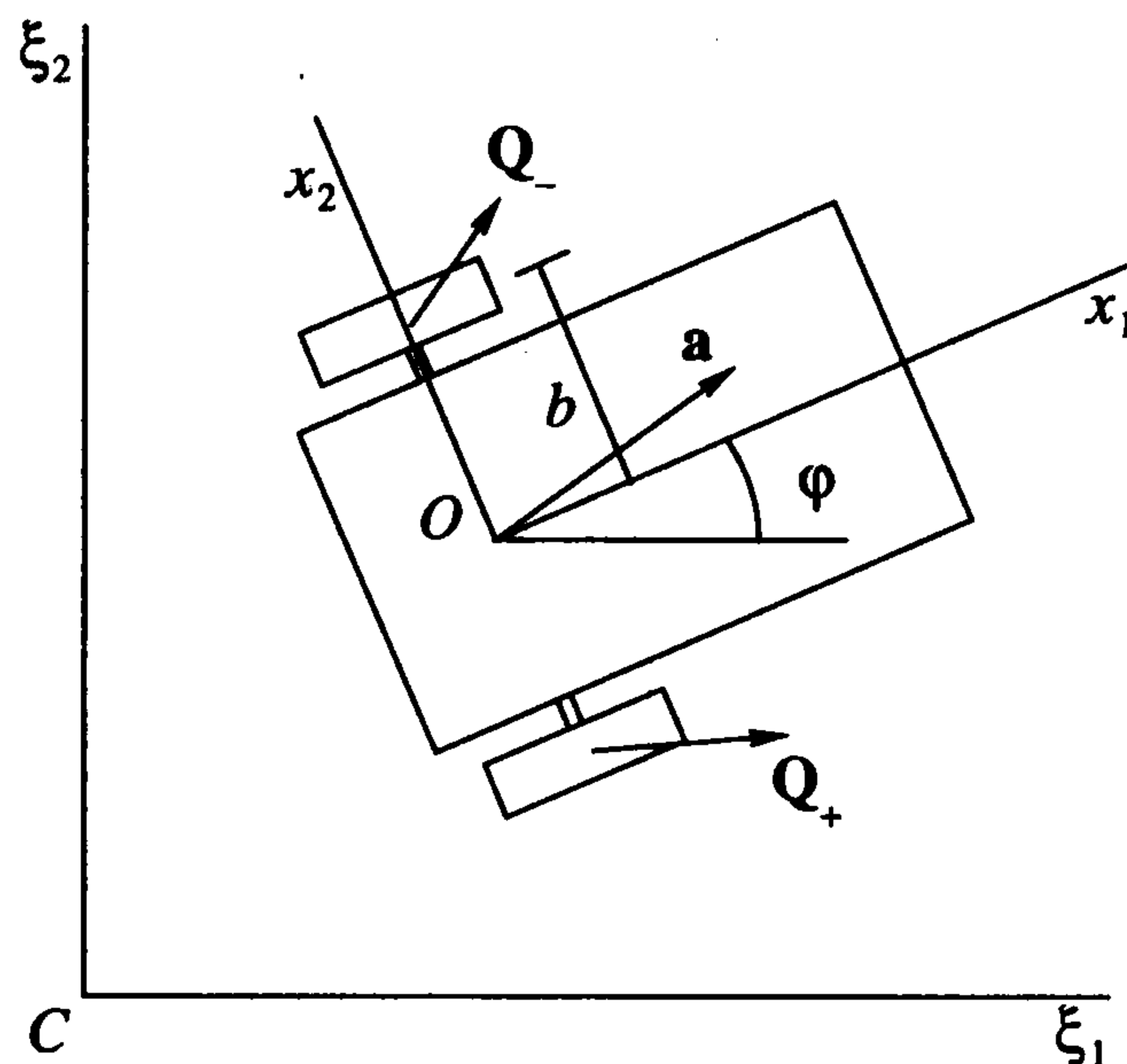
Выводятся и исследуются уравнения движения трехколесных роботов с двумя ведущими и пассивным роульным колесами. Управление продольным движением и поворотами такого робота осуществляется формированием соответствующих управлений независимыми двигателями ведущих колес. Исследование проводится в предположениях, что робот движется по горизонтальной плоскости, и что его колеса не проскальзывают. Для рассматриваемой неголономной системы получена система двух нелинейных уравнений с двумя управлениями. Изучена зависимость фазового портрета от значений постоянных управлений и параметров системы с учетом несимметрии робота. Полученные результаты представляют как теоретический, так и практический интерес.

1. Уравнения движения. Будем считать, что робот движется по ровной горизонтальной площадке – полигону. Введем абсолютную систему координат $S\xi_1\xi_2\xi_3$, связанную с полигоном, орты ξ_1, ξ_2 расположены в горизонтальной плоскости, ξ_3 направлен по вертикали и составляет с ними правую тройку (фиг.1). С корпусом робота свяжем систему координат $Ox_1x_2x_3$, так что точка O расположена на оси ведущих колес, орт X_3 параллелен ξ_3 , орты X_1, X_2 составляют с ним правую тройку, орт X_1 направлен вдоль корпуса вперед. Вектор $a = a_1X_1 + a_2X_2$ задает положение центра масс корпуса, b – половина расстояния между колесами, φ – угол курса робота. Будем рассматривать движение робота в связанных осях $Ox_1x_2x_3$ и примем гипотезу непроскальзывания колес. Тогда абсолютная скорость точки O и абсолютная угловая скорость робота записываются в виде

$$V = VX_1, \quad \omega = \omega X_3$$

То что вектор линейной скорости направлен вдоль оси x_1 , представляет собой неинтегрируемое ограничение на скорость, что соответствует определению неголономной связи.

¹ Девянин Евгений Андреевич (1931–2002), заведующий лабораторией общей механики Института механики МГУ, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета МГУ, лауреат Государственной премии СССР, академик РАЕН. Крупный ученый в области механики, управления, робототехники. Основные направления научной деятельности – теория инерциальных навигационных систем и робототехнические системы с элементами искусственного интеллекта. С 1957 по 1963 гг. Е.А. Девянин работал в промышленности в коллективе, создавшем первую отечественную астроинерциальную систему для крылатой ракеты. Был одним из лидеров разработки и построения астронавигационной системы, обеспечившей мягкую посадку космического аппарата на Луну. Автор более 100 научных работ. Е.А. Девянин известен и как блестящий педагог: им созданы и прочитаны на механико-математическом факультете МГУ курсы лекций по теории гироскопов, теории инерциальных навигационных систем, механике робототехнических систем. Под руководством Е.А. Девянина подготовлено 20 кандидатских диссертаций, среди его учеников 4 доктора наук.



Фиг. 1

Рассматриваемый робот, конечно, имеет третье пассивное рояльное колесо, однако, пользуясь тем, что обычно его влияние на характер движения невелико, для упрощения уравнений заменим его “скользящей” подпоркой.

Определим абсолютные линейные скорости V_m , V_+ , V_- центра масс корпуса и центров правого и левого ведущих колес

$$V_m = (V - a_2\omega)X_1 + a_1\omega X_2, \quad V_{\pm} = (V \pm b\omega)X_1$$

Если ω_{\pm} – осевые угловые скорости колес и r – радиус колеса, то для непроскальзывающих колес

$$\omega_{\pm} = V_{\pm}/r = (V \pm b\omega)/r \tag{1.1}$$

Введем массу m_0 корпуса, массу m_w колеса, центральный момент инерции J_0 корпуса относительно вертикальной оси, центральные осевой J'_w и экваториальный J''_w моменты инерции колеса. Импульсы и моменты количества движения относительно центров масс корпуса и колес имеют вид

$$P_0 = m_0[(V - a_2\omega)X_1 + a_1\omega X_2], \quad K_0 = J_0\omega X_3 \tag{1.2}$$

$$P_{\pm} = m_w(V \pm b\omega)X_1, \quad K_{\pm} = J'_w\omega_{\pm}X_2 + J''_w\omega X_3$$

Отметим, что для принятого плоского горизонтального движения силы тяжести элементов робота войдут только в выражения для вертикальных составляющих сил, которые в дальнейшем исключаются из уравнений и поэтому могут не учитываться с самого начала.

Обозначим через

$$S_{\pm} = -a_1X_1 - (a_2 \pm b)X_2 \tag{1.3}$$

радиус-векторы центров колес по отношению к центру масс корпуса, F_{\pm} , M_{\pm} – силы и моменты, действующие на колеса со стороны корпуса (точки приведения – центры колес), Q_{\pm} – силы, действующие на колеса со стороны полигона в точках контакта.

Теперь, применяя основные теоремы механики, можно записать уравнения движения для каждого из рассматриваемых трех твердых тел

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dt} &= -F_+ - F_-, & \frac{dK_0}{dt} &= -S_+ \times F_+ - S_- \times F_- - M_+ - M_- \\ \frac{dP_{\pm}}{dt} &= Q_{\pm} + F_{\pm}, & \frac{dK_{\pm}}{dt} &= M_{\pm} - rX_3 \times Q_{\pm} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Исключая из первых двух уравнений \mathbf{F}_\pm , \mathbf{M}_\pm и обозначая

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = [(m_0 + 2m_w)V - m_0a_2\omega]\mathbf{X}_1 + m_0a_1\omega\mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_+ + \mathbf{K}_- = \frac{2}{r}J'_wV\mathbf{X}_2 + (J_0 + 2J''_w)\omega\mathbf{X}_3$$

получаем два векторных уравнения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{Q}_+ + \mathbf{Q}_- \quad (1.5)$$

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \mathbf{S}_+ \times \frac{d\mathbf{P}_+}{dt} + \mathbf{S}_- \times \frac{d\mathbf{P}_-}{dt} = (\mathbf{S}_+ - r\mathbf{X}_3) \times \mathbf{Q}_+ + (\mathbf{S}_- - r\mathbf{X}_3) \times \mathbf{Q}_-$$

Теперь, принимая во внимание правило дифференцирования в подвижных осях, учитывая соотношения (1.1–1.3) и обозначая точкой производную по времени, запишем первое уравнение (1.5) в проекциях на оси x_1 , x_2 , второе – в проекции на ось x_3 и последнее уравнение (1.4) для обоих колес – в проекции на ось x_2

$$(m_0 + 2m_w)V\dot{} - m_0a_2\dot{\omega} - m_0a_1\omega^2 = Q_{1+} + Q_{1-}$$

$$m_0a_1\dot{\omega} + (m_0 + 2m_w)V\omega - m_0a_2\omega^2 = Q_{2+} + Q_{2-}$$

$$(J_0 + 2J''_w + 2m_wb^2)\dot{\omega} + 2m_wa_2V\dot{} - 2m_wa_1V\omega = \\ = -a_1(Q_{2+} + Q_{2-}) + a_2(Q_{1+} + Q_{1-}) + b(Q_{1+} - Q_{1-})$$

$$r^{-1}J'_w(V \pm b\dot{\omega}) = M_\pm - rQ_{1\pm}$$

Уравнения содержат два осевых управляющих момента $M_\pm = M_{2\pm}$, приложенных к колесам со стороны корпуса. Очевидным образом исключая комбинацию $Q_{2+} + Q_{2-}$ и реакции Q_{1+} , Q_{1-} , приходим к системе двух нелинейных динамических уравнений

$$\left(m_0 + 2m_w + \frac{2}{r^2}J'_w\right)V\dot{} - m_0a_2\dot{\omega} - m_0a_1\omega^2 = \frac{1}{r}(M_+ + M_-)$$

$$\left(J_0 + 2J''_w + 2m_wb^2 + m_0a_1^2 + \frac{2}{r^2}J'_wb^2\right)\dot{\omega} + 2\left(m_w + \frac{J'_w}{r^2}\right)a_2V\dot{} + \quad (1.6)$$

$$+ m_0a_1V\omega - m_0a_1a_2\omega^2 = \frac{b}{r}(M_+ - M_-) + \frac{a_2}{r}(M_+ + M_-)$$

Пусть управляющие моменты M_+ , M_- формируются следующим образом, стандартным при описании приводов с двигателями постоянного тока:

$$M_\pm = c_{1\pm}u_\pm - c_{2\pm}\omega_\pm$$

где $c_{1\pm}$, $c_{2\pm}$ – параметры различающихся приводов, u_\pm – управляющие напряжения. С учетом соотношений (1.1), имеем

$$M_+ \pm M_- = c_{1\pm}u_\pm \pm c_{1-}u_- - (c_{1+} \pm c_{2-})\frac{V}{r} - (c_{2+} \mp c_{2-})\frac{b\omega}{r} \quad (1.7)$$

Введем вместо V новую переменную, а также новые параметры

$$v = \frac{V}{b}; \quad \theta = \frac{2}{m_0} \left(m_w + \frac{1}{r^2} J'_w \right), \quad m = m_0(1 + \theta), \quad a = \frac{m_0 a_1}{mb}, \quad e = \frac{m_0 a_2}{mb}$$

$$J = \frac{1}{mb^2} [J_0 + 2J''_w + b^2 m_0 \theta + m_0 a_1^2], \quad \sigma = \frac{c_{2+} + c_{2-}}{mr^2}, \quad \gamma = \frac{c_{2+} - c_{2-}}{c_{2+} + c_{2-}} \quad (1.8)$$

$$p = \frac{1}{mrb} (c_{1+} u_+ + c_{1-} u_-), \quad q = \frac{1}{mrb} (c_{1+} u_+ - c_{1-} u_-)$$

В этих обозначениях уравнения (1.6) с подстановкой (1.7) преобразуются к виду

$$v \dot{} - e \omega \dot{} - a \omega^2 + \sigma v + \gamma \sigma \omega = p \quad (1.9)$$

$$(J + \theta e^2) \omega \dot{} + a v \omega - e a \omega^2 + \sigma \omega + \gamma \sigma v + e \sigma v + e \gamma \sigma \omega = q + e p$$

Параметры $J > 0$, $\theta > 0$ определяются инерционно-массовыми характеристиками системы, a , e задают положение центра масс корпуса относительно колес, $\sigma \geq 0$ – нормированное вязкое трение в осях колес, γ ($|\gamma| < 1$) – параметр, определяющий несимметрию трения, p , q – управления продольной скоростью и вращением корпуса. В дальнейшем будем считать $a > 0$, поскольку обратная ситуация эквивалентна изменению знака скорости.

Будем изучать поведение системы в случае, когда управляющие сигналы p , q постоянны. Тогда система (1.9) автономна и использование фазовой плоскости ω , v очень удобно для исследования движений при разных значениях параметров.

2. Простые случаи. При определенных значениях параметров уравнения (1.9) превращаются в уравнения неавтономных систем, рассмотренных классиками в работах [1–4]. Приведем здесь эти результаты.

Сани Чаплыгина. При $p = q = e = \sigma = \gamma = 0$ система (1.9) принимает вид

$$v \dot{} - a \omega^2 = 0, \quad J \omega \dot{} + a v \omega = 0 \quad (2.1)$$

и совпадает с системой, полученной и исследованной Чаплыгиным [1] и Каратеодори [3], которые изучали движение по инерции по горизонтальной плоскости “саней Чаплыгина” – неавтономной механической системы, представляющей собой твердое тело, опирающееся на плоскость двумя “скользящими” точками и точкой лезвия конька. Положение контактной точки конька при этом соответствует середине отрезка, соединяющего точки крепления колес мобильного робота.

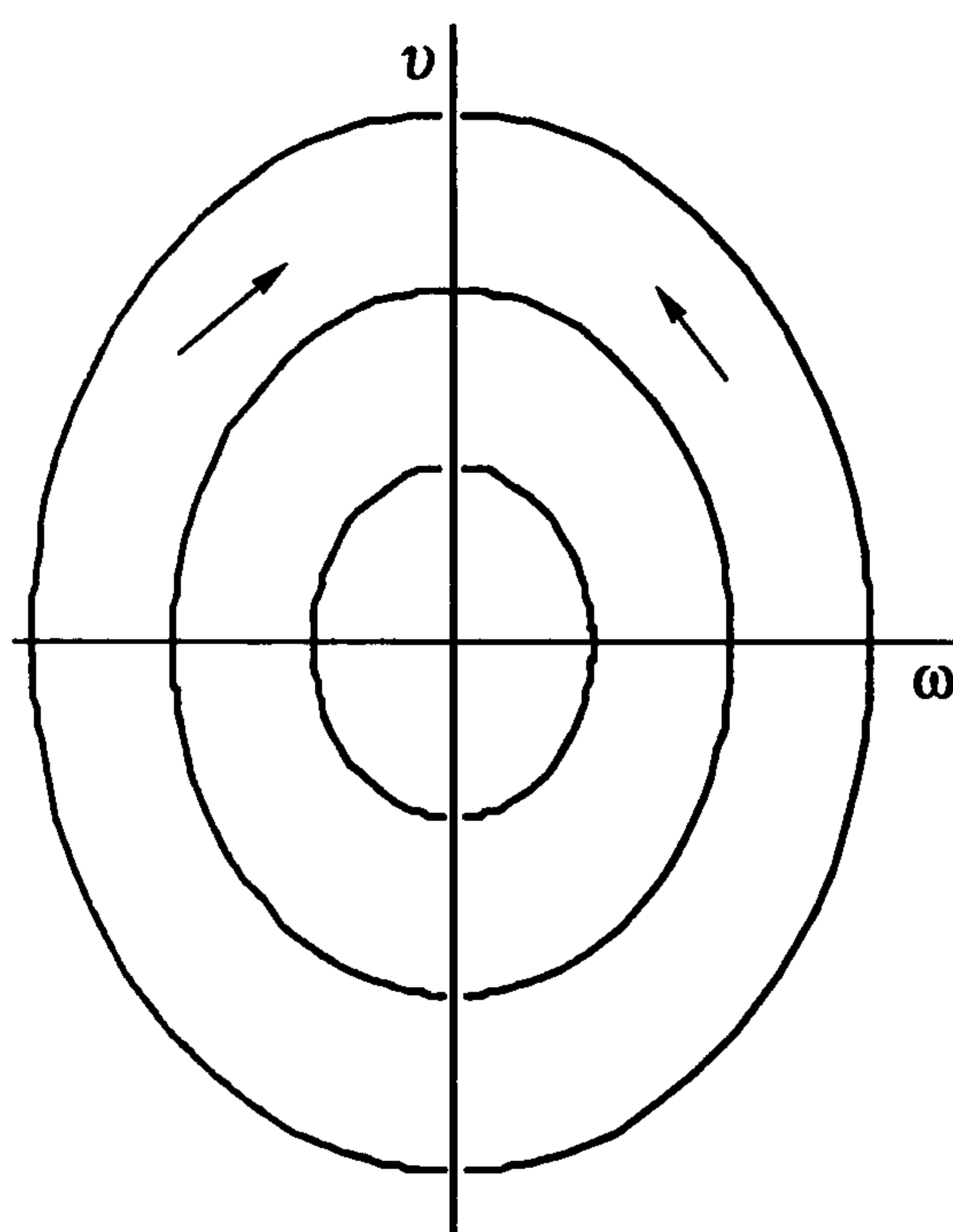
Фазовая плоскость для рассматриваемого случая показана на фиг. 2. Стационарные точки $\omega_0 = 0$, $v_0 = \text{const}$ системы (2.1) заполняют всю ось ординат. Очевидно, этим стационарным точкам соответствуют движения робота с постоянной скоростью по прямым. Система (2.1) имеет интеграл

$$v^2 + J \omega^2 = \text{const}$$

который определяет семейство эллипсов ($J > 0$) – фазовых траекторий на плоскости ω , v . При $a > 0$ изображающая точка движется по фазовой траектории снизу вверх; следовательно, стационарные точки $v_0 < 0$ неустойчивы, $v_0 > 0$ – устойчивы. Таким образом, движения робота с центром масс корпуса позади колес неустойчивы, впереди – устойчивы. Пересечению фазовой траекторией оси абсцисс соответствует точка возврата траектории движения робота.

Механизм Анпеля. При $q = e = \sigma = \gamma = 0$ система (1.9) принимает вид

$$v \dot{} - a \omega^2 = p, \quad J \omega \dot{} + a v \omega = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 2

Эти уравнения совпадают с уравнениями, полученными и исследованными Аппелем [2] и позднее Гамелем [4] для неголономной механической системы, которая отличается от “саней Чаплыгина” тем, что имеет вместо конька колесо, на которое действует постоянный вращающий момент, создаваемый посредством груза на нити, перекинутой через укрепленный на корпусе блок и намотанной на соосный с колесом шкив.

Приведем некоторые результаты этих работ. Если $p > 0$, то стационарных точек нет; если $p < 0$, то имеем две стационарные точки

$$v_0 = 0, \quad \omega_0 = \pm\sqrt{-p/a} \quad (2.3)$$

Автономные уравнения (2.2), исключая время, можно привести к виду

$$(p/\omega^2 + a)d(\omega^2) = -(a/J)d(v^2) \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4), очевидно, имеет интеграл

$$a\omega^2 + p \ln(\omega^2) + (a/J)v^2 = C$$

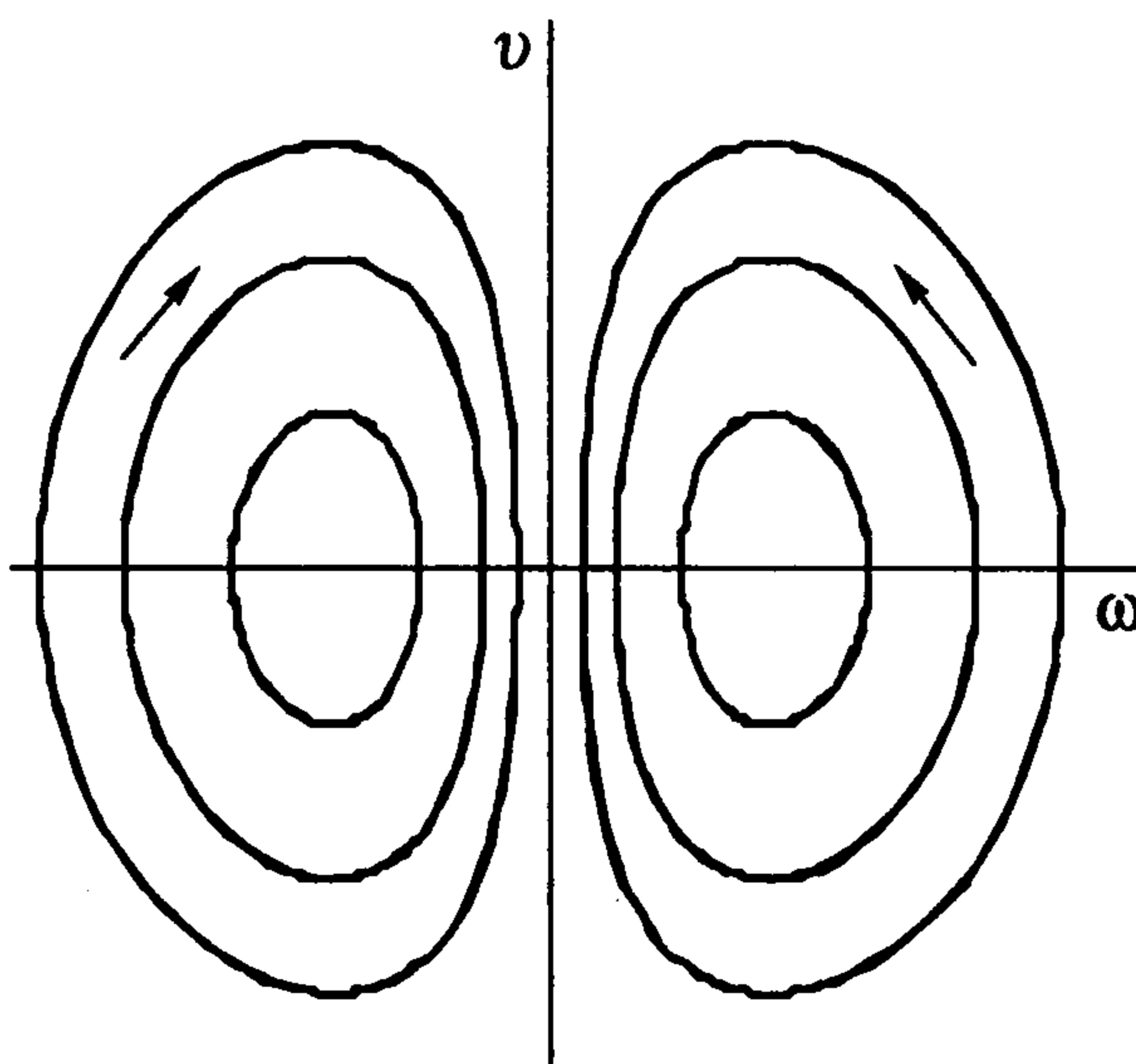
где C – произвольная постоянная. Фазовые траектории для случая $p < 0$ показаны на фиг. 3. Стационарные точки в этом случае являются центрами. Видно, что стационарное движение (2.3) – вращение корпуса с постоянной скоростью относительно неподвижной точки – реализуется при условии, когда момент p на колесе уравновешивает центробежную силу $a\omega^2$.

Случай $a = 0$. При $a = 0$ уравнения (1.9) имеют вид

$$\begin{aligned} v\dot{} - e\omega\dot{} + \sigma v + \gamma\sigma\omega &= p \\ (J + \theta e^2)\omega\dot{} + \sigma\omega + \gamma\sigma v + e\sigma v + e\gamma\sigma\omega &= q + ep \end{aligned} \quad (2.5)$$

При постоянных значениях управляющих параметров p, q линейная система (2.5) имеет единственную стационарную точку типа устойчивый узел

$$v_0 = \frac{p - \gamma q}{\sigma(1 - \gamma^2)}, \quad \omega_0 = \frac{q - \gamma p}{\sigma(1 - \gamma^2)}$$



Фиг. 3

3. Стационарные решения и их устойчивость при постоянных управлениях. Рассмотрим теперь общий случай при постоянных p, q . Как отмечено выше, не нарушая общности, будем считать $a > 0$. Сделаем в системе (1.9) следующие замены переменных и введем обозначения:

$$x = a\omega/\sigma, \quad y = a\nu/\sigma, \quad \tau = \sigma t; \quad \tilde{p} = ap/\sigma^2, \quad \tilde{q} = aq/\sigma^2, \quad \Xi = J + \theta e^2 > 0 \quad (3.1)$$

В этих обозначениях система (1.9) принимает вид (штрихом обозначена производная по τ)

$$y' - ex' - x^2 + y + \gamma x = \tilde{p} \quad (3.2)$$

$$\Xi x' + xy + (1 + \gamma e)x - ex^2 + (\gamma + e)y = \tilde{q} + e\tilde{p}$$

Напомним, что здесь переменная x – нормированная угловая скорость связанных с корпусом осей, y – нормированная линейная скорость их начала – средней точки между колесами. Стационарные точки системы (3.2) являются решениями системы алгебраических уравнений

$$-x^2 + y + \gamma x = \tilde{p}, \quad xy + x + \gamma y = \tilde{q} \quad (3.3)$$

которая, очевидно, сводится к кубическому уравнению

$$x^3 + (\tilde{p} + 1 - \gamma^2)x + \tilde{p}\gamma - \tilde{q} = 0$$

всегда имеющему хотя бы один вещественный корень.

Пусть найдена некоторая стационарная точка x_0, y_0 . Построим уравнения в отклонениях

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0 \quad (3.4)$$

для системы (3.2) вблизи этой точки. Подставляя выражения (3.4) в систему (3.2) и учитывая уравнения (3.3), получим

$$\Delta y' + \Delta y - e\Delta x' - (2x_0 - \gamma)\Delta x = \Delta x^2 \quad (3.5)$$

$$\Xi \Delta x' + (1 + y_0 - 2ex_0 + \gamma e)\Delta x + (x_0 + e + \gamma)\Delta y = e\Delta x^2 - \Delta x\Delta y$$

Пренебрежем нелинейными членами и запишем характеристическое уравнение линейной системы

$$\Xi \lambda^2 + A(x_0, y_0)\lambda + B(x_0, y_0) = 0 \quad (3.6)$$

где

$$A(x, y) = \Xi + 1 + e^2 + y - ex + 2\gamma e, \quad B(x, y) = 1 + y + 2x^2 - \gamma^2 + \gamma x \quad (3.7)$$

Прямая и парабола (3.7) выделяют на плоскости x, y соответствующие области. Так как $\Xi > 0$, то если стационарная точка оказывается в области $A > 0, B > 0$, то она устойчива, а если в области $B < 0$, то является седлом.

Характеристическое уравнение (3.6) имеет вещественные корни при

$$C = A^2 - 4\Xi B \geq 0 \quad (3.8)$$

В противном случае – корни комплексные. Следовательно, кривая $C(x, y) = 0$ делит фазовую плоскость на области, в одной из которых стационарные точки – узлы или седла, в другой – фокусы. Подставляя в условие (3.8) выражения (3.7) для A, B , имеем следующее выражение для этой кривой:

$$C = (y - ex + 1 - \Xi + e^2 + 2\gamma e)^2 - 8\Xi \left(x + \frac{e + \gamma}{4} \right)^2 + \frac{9}{2}\Xi(e + \gamma)^2 = 0 \quad (3.9)$$

Очевидно, что кривая (3.9) – гипербола, а ее ветви располагаются вне интервала значений x , определяемых неравенством

$$[2x - (e + \gamma)][x + (e + \gamma)] < 0$$

Нетрудно показать, что эта гипербола касается параболы $B(x, y) = 0$ в точках пересечения последней с прямой $A(x, y) = 0$. При $e + \gamma = 0$ гипербола превращается в пару прямых, пересекающихся в точке $x = 0, y = -1 + \Xi - e^2$.

На фиг. 4 показано расположение на плоскости x, y кривых $A = 0, B = 0$ (3.7), $C = 0$ (3.9) для следующих значений параметров: $\Xi = 1.0, \gamma = 0.2, e = 0.3$. Функции A, B положительны над соответствующими кривыми, функция C положительна между ветвями гиперболы. Там же приведены имеющие очевидный смысл условные обозначения типа особых точек в разных областях.

Техническая сложность аналитического исследования характера стационарных точек рассматриваемой системы (3.2) в зависимости от значений ее параметров и управлений p, q определяется тем, что координаты этих точек вычисляются как корни кубического уравнения, а коэффициенты (3.7) характеристического уравнения, знаки которых определяют устойчивость, находятся как функции координат. Для того чтобы обойти эту сложность, зададим координаты x_0, y_0 одной стационарной точки, тогда определяются \tilde{p}, \tilde{q} из системы (3.3), а координаты двух других точек, если они имеются, находятся решением квадратного уравнения, после чего можно найти явные выражения A, B и аналитически исследовать устойчивость всех стационарных решений.

Пусть x_0, y_0 – координаты некоторой стационарной точки, тогда из системы (3.3) находятся соответствующие управления

$$\tilde{p}_0 = -x_0^2 + y_0 + \gamma x_0, \quad \tilde{q}_0 = x_0(y_0 + 1) + \gamma y_0 \quad (3.10)$$

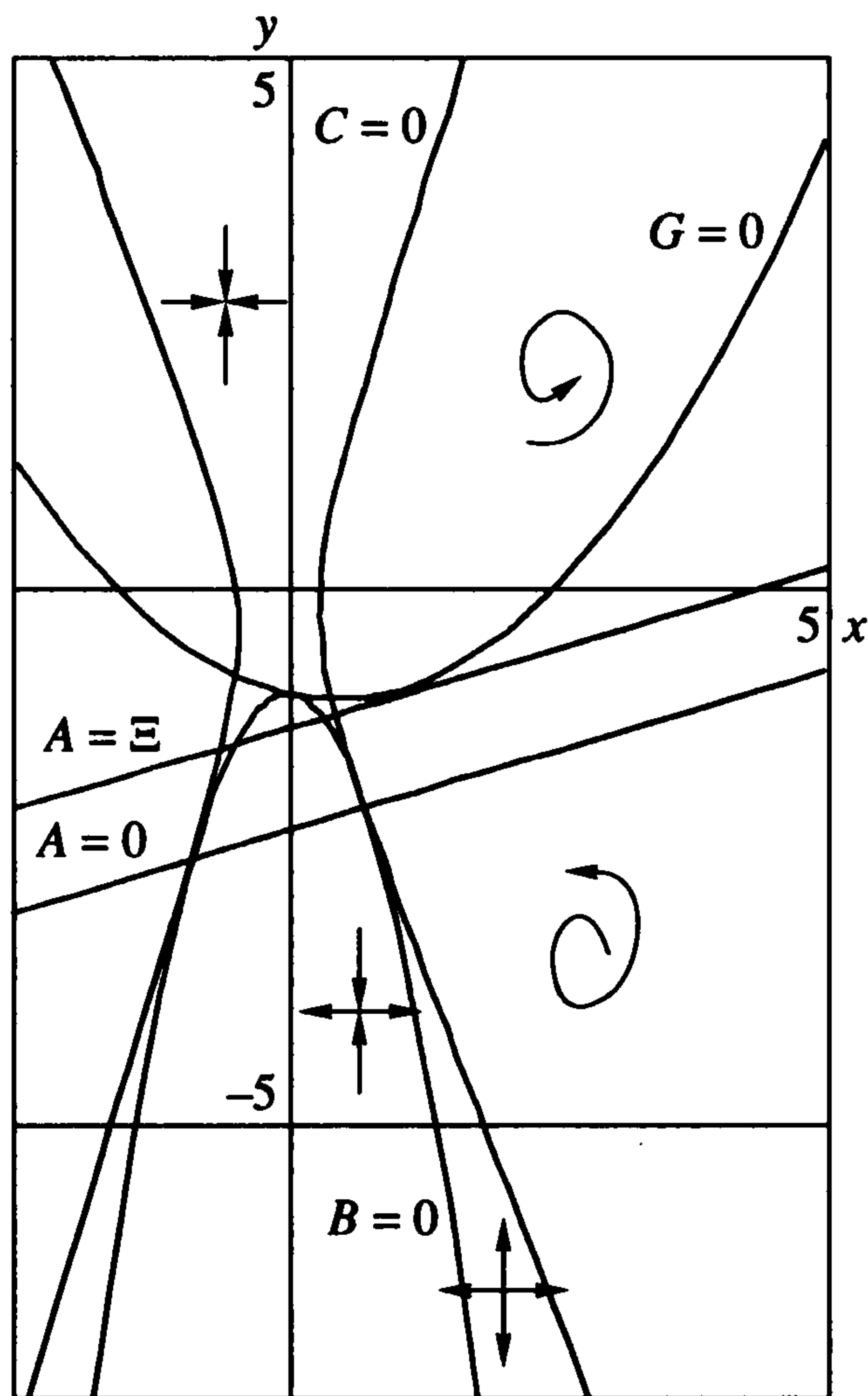
а кубическое уравнение, эквивалентное системе (3.3), получаемое подстановкой (3.10), записывается в виде

$$(x - x_0)(x^2 + x_0x + y_0 + 1 - \gamma^2 + \gamma x_0) = 0 \quad (3.11)$$

Если

$$G(x_0, y_0) = -x_0^2 + 4(y_0 + 1 - \gamma^2 + \gamma x_0) > 0 \quad (3.12)$$

то стационарная точка единственна, в противном случае имеется еще две стационарные точки.



Фиг. 4

Кривая $G = 0$ показана на фиг. 4 при указанных выше значениях параметров. Функция G положительна над соответствующей кривой. Так как $\Xi > 0$, можно показать, что прямая $A = 0$ всегда расположена ниже параболы $G = 0$. Легко убедиться также в том, что параболы $B = 0$ и $G = 0$ всегда имеют единственную общую точку $x = 0, y = -1 + \gamma^2$, в которой имеют общую касательную.

Следовательно, если задать стационарную точку x_0, y_0 в области $G > 0$, то она будет единственной, для нее $A > 0, B > 0$ и, значит, она устойчива в малом. Более того, в этом случае имеет место устойчивость в большом.

Действительно, рассмотрим точные нелинейные уравнения (3.5) и построим функцию Ляпунова (ее конкретный вид предложил В.М. Морозов)

$$L = \frac{1}{2}[\Xi \Delta x^2 + (\Delta y - e \Delta x)^2] \tag{3.13}$$

производная которой в силу уравнений (3.5) имеет вид

$$dL/d\tau = -[(1 + y_0)\Delta x^2 + (-x_0 + 2\gamma)\Delta x \Delta y + \Delta y^2] \tag{3.14}$$

Функция (3.13) – положительно-определенная, ее производная (3.14) имеет противоположный знак, если выполнено условие

$$1 + y_0 - (x_0 - 2\gamma)^2/4 > 0$$

которое совпадает с условием $G > 0$ (3.12) единственности стационарной точки. Таким образом, единственная стационарная точка устойчива в большом во всей фазовой плоскости.

Пусть теперь стационарная точка x_0, y_0 располагается в области $G < 0$, тогда кроме нее система имеет еще две стационарные точки. Изучим их расположение и устойчивость, для чего удобно ввести специальную параметризацию. Построим параболу

$$y = \frac{1}{4}(1 - h^2)x^2 - \gamma x - 1 + \gamma^2 \tag{3.15}$$

проходящую через точку $x = 0, y = -1 + \gamma^2$, общую для $B = 0, G = 0$ и имеющую в ней ту же касательную. Очевидно, при $h = 0$ она совпадает с $G = 0$, при $h = 3 - \epsilon$ с $B = 0$. Ясно, что при $-\infty < x_0 < \infty, 0 < h < 3$ имеем область $G < 0, B > 0$, для $-\infty < x_0 < \infty, 3 < h < \infty$ – область $G < 0, B < 0$. Будем теперь задавать стационарную точку параметром $h > 0$ и координатой x_0 , определяя y_0 из уравнения (3.15).

Квадратное уравнение – множитель в (3.11) – для координат $x_{1,2}$ двух других стационарных точек имеет в этих параметрах корни

$$x_{1,2} = x_0/2(-1 \pm h) \quad (3.16)$$

Соответствующие им координаты $y_{1,2}$ определяются из уравнений (3.10)

$$\tilde{p}_0 = -x_0^2 + y_0 + \gamma x_0 = -x_1^2 + y_1 + \gamma x_1 = -x_2^2 + y_2 + \gamma x_2 \quad (3.17)$$

и выражаются через x_0, h следующим образом:

$$y_{1,2} = -\frac{x_0^2}{2}(1 \pm h) + \frac{x_0}{2}\gamma(1 \mp h) - 1 + \gamma^2 \quad (3.18)$$

Найдем теперь $B(x_0, y_0), B(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ из условия (3.8). Их выражения через x_0, h имеют следующую простую форму:

$$B(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{4}(9 - h^2), \quad B(x_1, y_1) = \frac{x_0^2}{2}h(-3 + h) \quad (3.19)$$

$$B(x_2, y_2) = \frac{x_0^2}{2}h(3 + h)$$

Очевидно, при любых x_0 и $h > 0$ одна из точек оказывается в области $B < 0$, две – вне этой области. Не нарушая общности, будем далее считать $0 < h < 3$, задавая тем самым начальную стационарную точку в области $G < 0, B > 0$. Тогда $B(x_0, y_0) > 0, B(x_1, y_1) < 0, B(x_2, y_2) > 0$; следовательно, стационарная точка x_1, y_1 – седло.

Перейдем к изучению функций $A(x_0, y_0), A(x_1, y_1), A(x_2, y_2)$. Из соотношений (3.7), (3.15), (3.16), (3.18) можно получить

$$\begin{aligned} A(x_0, y_0) &= \left(\epsilon - \frac{1-h}{2}x_0\right)\left(\epsilon - \frac{1+h}{2}x_0\right) + \Xi \\ A(x_1, y_1) &= (\epsilon + x_0)\left(\epsilon - \frac{1+h}{2}x_0\right) + \Xi \\ A(x_2, y_2) &= (\epsilon + x_0)\left(\epsilon - \frac{1-h}{2}x_0\right) + \Xi; \quad \epsilon = \gamma + e \end{aligned} \quad (3.20)$$

Рассматривая знаки сомножителей в выражениях для $A(x_0, y_0), A(x_2, y_2)$ (исследовать $A(x_1, y_1)$ не требуется), можно установить, что при любых x_0, ϵ и $0 < h < 3$ одно из этих произведений положительно, другое отрицательно. Так как $\Xi > 0$, то либо положительны обе функции $A(x_0, y_0), A(x_2, y_2)$, либо одна из них. Следовательно, стационарные точки $(x_0, y_0), (x_2, y_2)$ либо обе устойчивы, либо устойчива одна из них.

Отдельно рассмотрим случай, когда точка x_0, y_0 лежит на прямой $A = \Xi$. При этом из выражений (3.20) видно, что на этой же прямой лежит еще одна точка: x_2, y_2 при $x_0 > 2\epsilon$ или x_1, y_1 при $x_0 < 2\epsilon$. Здесь полагаем $\epsilon = e + \gamma > 0$, что соответствует фиг. 4. С другой стороны в соответствии с выражениями (3.7) в рассматриваемом случае $y_0 = \epsilon x_0 - 1 - e^2 - 2\gamma e$. С учетом этой зависимости можно выписать выражения (3.10) для

\tilde{p} , \tilde{q} и убедиться в том, что прямая $x = -\epsilon$ – решение динамических уравнений (3.2) и что на ней находится третья особая точка. При $x_0 < 2\epsilon$ прямая $x = -\epsilon$ проходит через устойчивую особую точку (узел) x_2, y_2 , а седловая точка x_1, y_1 лежит на прямой $A = \Xi$. При $x_0 = 2\epsilon$ обе точки сливаются. При $x_0 > 2\epsilon$ устойчивая точка x_2, y_2 лежит на прямой $A = \Xi$, а седловая точка x_1, y_1 принадлежит прямой $x = -\epsilon$, которая является, таким образом, вертикальной сепаратриссой, разделяющей области притяжения двух устойчивых особых точек. Отметим, что в симметричном случае $e = \gamma = 0$ реализуется только последний вариант.

Итак, изучаемая неголономная механическая система может иметь либо одну, либо три стационарные точки; единственная стационарная точка устойчива, причем устойчива в большом; если стационарных точек три, то одна из них – седло, а две другие – узлы или фокусы, причем по крайней мере одна из них устойчива.

4. Фазовые траектории. После того как число, расположение и характер стационарных точек системы изучены, в значительной мере ясен и фазовый портрет системы. Приведем здесь (фиг. 5) типичные расположения фазовых траекторий для тех же, что и ранее, значений параметров $\Xi = 1.0$, $\gamma = 0.2$, $e = 0.3$ при изменении расположения задаваемой стационарной точки. При этом качественные особенности не зависят от выбора конкретных параметров механической системы. Выбор стационарной точки в полуплоскости $y > 0$ соответствует положительным линейным скоростям, когда центр масс смещен относительно оси колес вперед по направлению движения. Штрихами изображены характерные линии, показанные на фиг. 4.

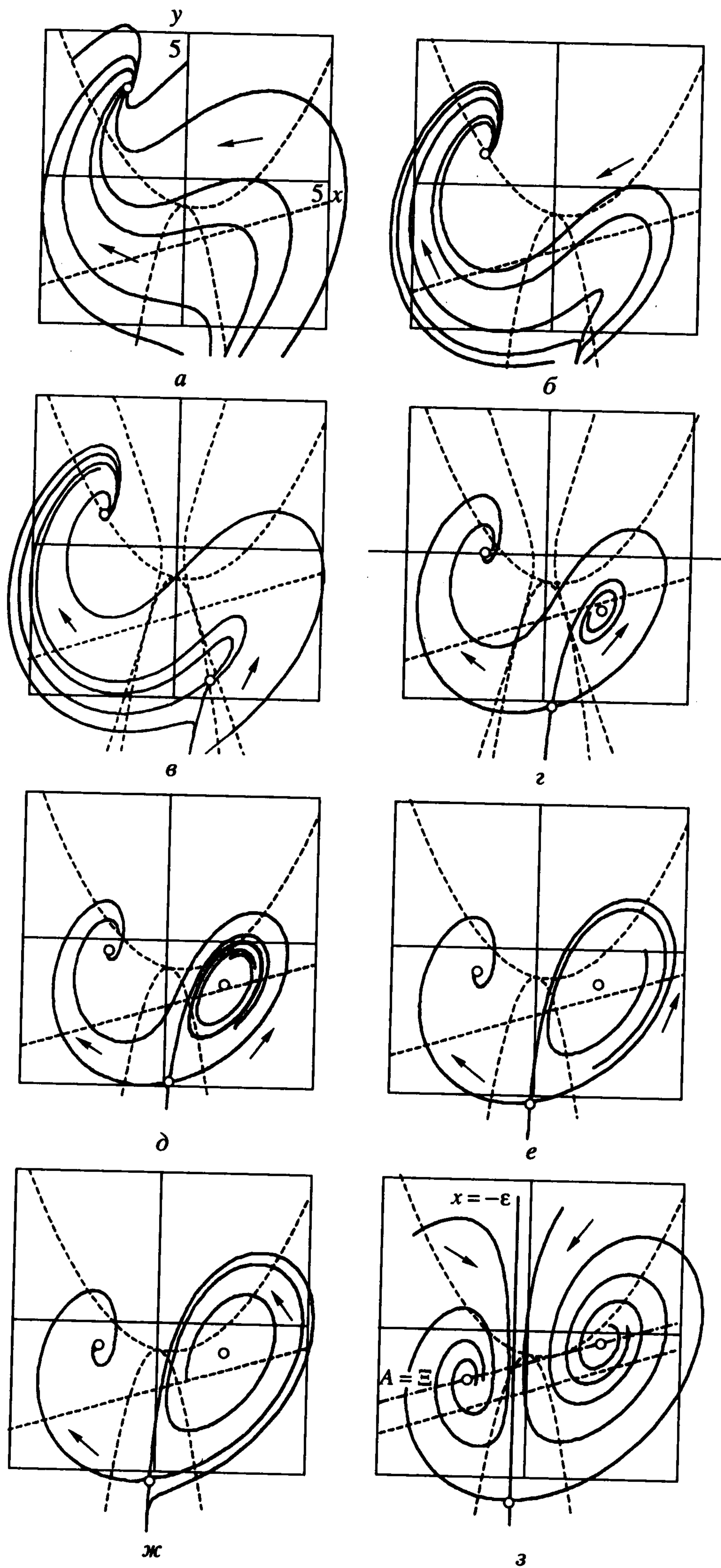
На фиг. 5,а стационарная точка выбрана в области $G > 0$ и соответственно, является единственной и устойчивой в большом. При смещении этой точки вниз происходят изменения в фазовой плоскости, которые показаны на фиг. 5,б–з. При приближении к границе $G = 0$ области единственности стационарной точки происходит деформация фазовых траекторий (фиг. 5,б), а при попадании стационарной точки на границу $G = 0$ (фиг. 5,в) на кривой $B = 0$ возникает новая кратная стационарная точка. Далее эта кратная особая точка распадается на две, одна из них далее остается седлом, а вторая сначала является неустойчивым узлом, а затем неустойчивым фокусом (фиг. 5,г).

При дальнейшем движении левого фокуса вниз, правый, неустойчивый фокус перемещается вверх, при пересечении прямой $A = 0$ превращается в центр и далее в устойчивый фокус. При этом вокруг него возникает неустойчивый предельный цикл (фиг. 5,д). Предельный цикл увеличивается в размере, и в некоторый момент в нем замыкаются две сепаратриссы седла (фиг. 5,е), после чего он исчезает, а область притяжения правого фокуса становится неограниченной (фиг. 5,ж) вдоль нижней сепаратриссы седла. Далее при движении левого фокуса вниз его область притяжения уменьшается за счет правого, а при попадании на прямую $A = \Xi$ второй фокус оказывается также на этой прямой. При этом области притяжения представляют собой полуплоскости, разделенные вертикальной прямой $x = -\epsilon = -(e + \gamma)$, на которой находится седло (фиг. 5,з).

Дальнейшие изменения происходят в обратном порядке: область притяжения левого фокуса уменьшается, вокруг него образуется неустойчивый предельный цикл и т.д.

Описанная эволюция относится к случаю, когда кратная особая точка образуется в области $A < 0$ и распадается на неустойчивый узел и седло. Если кратная точка возникает в области $A > 0$, то она распадается на устойчивый узел и седло, причем область притяжения узла сразу становится неограниченной.

Отметим следующую особенность рассматриваемой системы. В случае двух устойчивых стационарных режимов (фиг. 5,д–з) они реализуются при одном и том же управлении, и переход из одного режима в другой однократным изменением управления становится невозможным.



Фиг. 5

5. Выводы.

1°. Если вектор заданной линейной скорости робота направлен в ту же сторону, куда смещен центр масс робота относительно оси ведущих колес, то при соответствующих постоянных управлениях движение робота устойчиво. В противном случае устойчивость заданного движения сохраняется лишь при существенных ограничениях на величины линейных и угловых скоростей. Нарушение этих ограничений приводит к тому, что заданное движение становится неустойчивым и робот выходит на устойчивый режим движения, отличный от заданного. Конечно, если колеса робота снабжены датчиками их угловых скоростей, то, используя показания этих датчиков, можно сформировать сигналы управления, стабилизирующие любое движение, однако очевидно, что затраты на стабилизацию естественно устойчивого движения существенно меньше, чем неустойчивого.

2°. Кроме множественности стационарных решений, при постоянных управлениях в системе возможно существование таких особых решений, как неустойчивые предельные циклы.

3°. На основании полученных соотношений и графиков легко интерпретировать влияние несимметрии, связанной с положением центра масс и разными параметрами двигателей. При этом следует отметить, что несимметрия не приводит к качественному изменению поведения системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федеральной целевой программы “Интеграция”, программы “Университеты России” и Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00403 и 00-15-96135).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. К теории движения неголономных систем, теорема о приводящем множителе // Мат. сб. 1911. Т. 28. Вып. 2. С. 303–314.
2. Appell P. Exemple du mouvement d'un systeme assujetti à une liason exprimée par une relation non linéaires entre des composantes de la vitesse // Rend. circ. mat. di Palermo. 1911. V. 32. P. 1–3.
3. Carateodory C. *Der Schlitten* // ZAMM. 1933. Bd. 13. H. 2. S. 71–76.
4. Hamel G. *Theoretische Mechanik*. Berlin: Springer, 1949. 796 S.

Москва
e-mail: budanov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию
14.III.2002