УДК 531.36

© 2003 г. С.А. Агафонов

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ И ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ

Исследуется устойчивость механических систем, на которые действуют диссипативные, гироскопические, потенциальные и позиционные неконсервативные силы. С помощью функции Ляпунова получено условие асимптотической устойчивости, а также в терминах рассматриваемой системы найдена оценка области притяжения. Рассмотрена также прецессионная система. Показано, что условие асимптотической устойчивости исходной системы является условием приемлемости в смысле устойчивости прецессионной системы. Полученные результаты применяются к задаче стабилизации с помощью внешних моментов стационарного движения уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе.

Результаты настоящей работы обобщают и развивают утверждения об устойчивости рассматриваемой системы, полученные ранее [1–8] как с помощью анализа характеристического уравнения, так и с помощью построения функции Ляпунова. Отметим также, что была развита [9] методика структурных преобразований динамических систем, позволяющая в ряде случаев исключить из уравнений движения члены, характеризующие гироскопические и неконсервативные позиционные силы; этот подход оказался эффективным и позволил решить ряд задач стабилизации движения механических систем с помощью вибрации.

1. Устойчивость системы общего вида. Оценка области притяжения. Уравнения движения механической системы, на которую действуют диссипативные, гироскопические, потенциальные и позиционные неконсервативные силы могут быть приведены к виду

$$\ddot{x} + B\dot{x} + hG\dot{x} + Kx + Fx = X(x, \dot{x}), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T \tag{1.1}$$

Здесь $B^T = B$, $G^T = -G$, $K^T = K$, $F^T = -F$ – постоянные матрицы, характеризующие соответственно диссипативные, гироскопические и потенциальные силы; $h > 0$ – скалярный параметр, $X(x, \dot{x})$ – совокупность членов не ниже второго порядка относительно x, $\dot{x}$.

Исследуется устойчивость равновесия

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0 \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что диссипативные силы обладают полной диссипацией, $\mathrm{get}G \neq 0$, а вектор-функция $X(x, \dot{x})$ удовлетворяет неравенству

$$\|X(x, \dot{x})\| \le a_0(x^T x + \dot{x}^T \dot{x}), \quad a_0 > 0, \quad \|X(x, \dot{x})\| = (X_1^2 + \ldots + X_n^2)^{1/2} \tag{1.3}$$

Предполагается также, что матрица $S = G^T F + F^T G + KG - GK$ положительно определена. Это условие отбросить нельзя [1].

Рассмотрим функцию

$$V = (\dot{x} - h^{-1}P^T x)^T(\dot{x} - h^{-1}P^T x) + x^T(G^T G - h^{-2}PP^T)x, \quad P = (K - F)G^{-1} + G \tag{1.4}$$

Условием ее положительной определенности является неравенство

$$h\rangle(c_0/g_0)^{1/2} \tag{1.5}$$

Здесь $c_0 > 0$ и $g_0 > 0$ соответственно наибольшее и наименьшее собственные значения матриц PP^T и G^TG.

Производная $\dot V$, вычисленная в силу системы (1.1) и взятая с обратным знаком, приводится к виду

$$-\dot V = \dot x^T[2B + h^{-1}(P + P^T)]\dot x + h^{-1}x^TSx - 2h^{-1}x^TPB\dot x - 2(\dot x^T - h^{-1}x^TP)X(x, \dot x) \tag{1.6}$$

Используя оценку (1.3), получим

$$|2(\dot x^T - h^{-1}x^TP)X(x, \dot x)| \le 2\|\dot x^T - hx^TP\|\|X(x, \dot x)\| \le a_0\gamma(h, x, \dot x)(x^Tx + \dot x^T\dot x) \tag{1.7}$$

Здесь

$$\gamma(h, x, \dot x) = 2\|\dot x^T - h^{-1}x^TP\| = 2[(\dot x - h^{-1}P^Tx)^T(\dot x - h^{-1}P^Tx)]^{1/2} \tag{1.8}$$

Очевидно, что

$$\gamma(h, 0, 0) = 0, \quad \gamma(h, x, \dot x) \ge 0$$

В дальнейшем для упрощения записи зависимости γ от h, x, $\dot x$ не указывается.

Введем обозначения:

$$M = \xi E, \quad N = \eta E, \quad L = M^{1/2}\dot x + 1/2M^{-1/2}Q^Tx$$

$$Q = -2h^{-1}PB, \quad \xi = 2b - h^{-1}c_1 - a_0\gamma, \quad \eta = h^{-1}\mu - a_0\gamma$$

где E – единичная матрица, $\mu > 0$ – наименьшее собственное значение матрицы S, $b > 0$ и $b_0 > 0$ – соответственно наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы B, c_1 – наибольшее по модулю собственное значение матрицы $P + P^T$. Учитывая неравенство (1.7), будем иметь

$$\begin{aligned} &-\dot V \ge \xi\dot x^T\dot x + \eta x^Tx + x^TQ\dot x = \\ &= L^TL + x^T[N - \xi^{-1}h^{-2}PB^2P^T]x \ge L^TL + (\eta - \xi^{-1}h^{-2}b_0^2c_0)x^Tx \end{aligned} \tag{1.9}$$

В (1.9) предполагается, что матрица M положительно определена, т.е

$$\xi > 0 \tag{1.10}$$

Условие отрицательной определенности функции $\dot V$ задается неравенством

$$F(\gamma) \equiv a_0^2\gamma^2 - a_0(h^{-1}\mu + 2b - h^{-1}c_1)\gamma + (2b - h^{-1}c_1)h^{-1}\mu - b_0^2c_0h^{-2} > 0 \tag{1.11}$$

Поскольку дискриминант полинома $F(\gamma)$ положителен, то корни уравнения $F(\gamma) = 0$ действительны. В линейном приближении ($a_0 = 0$) условием отрицательной определенности $\dot V$ является положительность свободного члена в выражении (1.11), т.е. неравенство

$$h > h_2 = (c_1\mu + b_0^2c_0)/(2b\mu)$$

Коэффициент при γ в выражении (1.11) не может быть положительным (в противном случае $h < h_1 = (c_1 - \mu)/(2b)$, что противоречит неравенству $h > h_2$, так как $h_2 >$ $> h_1$). Отсюда следует, что корни полинома $F(\gamma)$ положительны.

Обозначив $h_0 = \max\left[\left(\frac{c_0}{g_0}\right)^{1/2}, h_2\right]$, при $h > h_0$ получим $V > 0$, $\dot V < 0$, что означает, на основании теоремы Ляпунова, асимптотическую устойчивость системы (1.1).

Если V – положительно-определенная функция, а в области $V < l$ ($l > 0$) $\dot V < 0$, то область $V < l$ лежит в области притяжения положения равновесия (1.2) [10].

Учитывая выражение (1.8) для γ, а также вид функции V, задаваемой выражением (1.4), заметим, что можно принять $l = \gamma_1^2/4$ (γ_1 – наименьший положительный корень уравнения $F(\gamma) = 0$), поскольку область $V < \gamma_1^2/4$ целиком лежит в области $\gamma < \gamma_1$, где $\dot V < 0$.

Можно показать, что из неравенства $\gamma < \gamma_1$ следует неравенство (1.10). Действительно, если обозначить $a_0\gamma_2 = 2b - h^{-1}c_1$, то условие $\gamma < \gamma_2$ сводится к очевидному неравенству

$$[(h^{-1}(\mu + c_1) - 2b)^2 + 4h^{-2}b_0^2c_0]^{1/2} > h^{-1}(\mu + c_1) - 2b$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема. Если матрица $S = G_TF + F^TG + KG - GK$ положительно определена, то при $h > h_0$ система (1.1) асимптотически устойчива, причем область $V < \gamma_1^2/4$ лежит в области притяжения положения равновесия (1.2).

2.Устойчивость прецессионной системы. Прецессионная система, используемая в прикладной теории гироскопических систем, в первом приближении получается из уравнения (1.1) и имеет вид

$$(B + hG)\dot x + (K + F)x = 0 \qquad (2.1)$$

Рассмотрим положительно определенную функцию

$$V = x^T(B + hG)^T(B + hG)x \qquad (2.2)$$

Производная $\dot V$, вычисленная в силу системы (2.1), приводится к виду

$$\dot V = -x^TS_1x, \quad S_1 = hS + B(K + F) + (K - F)B \qquad (2.3)$$

Из выражения (2.3) следует, что если матрица S_1 будет положительно-определенной, то прецессионная система асимптотически устойчива.

Поскольку при переходе к прецессионной системе предполагается, что параметр h достаточно большой, то матрица S_1 будет положительно определенной, если таковой будет матрица S. Таким образом, если матрица S положительно определена и параметр h – достаточно большой, то системы (1.1) и (2.1) будут одновременно асимптотически устойчивыми.

3. Стабилизация стационарного движения гироскопа в кардановом подвесе. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим задачу о стабилизации стационарного движения уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе посредством внешних моментов. Уравнения движения системы запишем в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = M \qquad (3.1)$$

$$q = (\alpha, \beta, \varphi), \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(A_0 - C_0\sin^2\beta)\dot\alpha^2 + \frac{1}{2}B_0\dot\beta^2 + \frac{1}{2}C(\dot\varphi + \dot\alpha\sin\beta)^2$$

$$A_0 = A + A_1 + A_2, \quad B_0 = A + B_1, \quad C_0 = A + A_1 - B_1$$

Здесь α, β, φ – углы вращения соответственно внешнего, внутреннего колец и ротора; $M = (M_\alpha, M_\beta, M_\varphi)$ – внешний момент; A_1, B_1, C_1 – моменты инерции внутреннего кольца; A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно оси вращения; $A = B$ и C – экваториальный и полярный моменты инерции ротора.

Предполагая $M_\varphi = 0$ и исключив циклическую координату φ, уравнения движения приводятся к виду

$$\begin{aligned} (A_0 - C_0\sin^2\beta)\ddot{\alpha} - C_0\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin 2\beta + H\dot{\beta}\cos\beta &= M_\alpha \\ B_0\ddot{\beta} + C_0\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - H\dot{\alpha}\cos\beta &= M_\beta \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Здесь $H = C(\dot{\varphi} + \dot{\alpha}\sin\beta)$ – циклическая постоянная.

Пусть на систему действуют внешние моменты

$$M_\alpha = -d\dot{\alpha} - f\beta, \quad M_\beta = -d\dot{\beta} + f\alpha$$

где $d > 0, f > 0$ – постоянные. Для удобства введем безразмерное время $\tau = d(A_0B_0)^{-1/2}t$ и параметры

$$a = C_0A_0^{-1}, \quad c = (B_0A_0^{-1})^{1/2}, \quad h = cHd^{-1}$$

После преобразований система (3.2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} (1 - a\sin^2\beta)a'' - a\alpha'\beta'\sin 2\beta + c\alpha' + h\beta'\cos\beta + f\beta &= 0 \\ c^2\beta'' + a\alpha'^2\sin\beta\cos\beta + c\beta' - h\alpha'\cos\beta - f\alpha &= 0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Штрих означает производную по τ, а для параметра f сохранено прежнее обозначение.

Далее систему (3.3) запишем в векторной форме

$$x'' + Bx' + hGx' + Fx = X(x, x') \qquad (3.4)$$

$$x = (x_1, x_2)^T, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = c\beta, \quad X = (X_1, X_2)^T$$

$$B = \operatorname{diag}(c, c^{-1}), \quad G = \begin{Vmatrix} 0 & c \\ -c^{-1} & 0 \end{Vmatrix}, \quad F = \begin{Vmatrix} 0 & fc^{-1} \\ -fc^{-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

$$X_1 = \frac{a}{c}\sin 2\frac{x_2}{c}\left(1 - a\sin^2\frac{x_2}{c}\right)^{-1}x_1'x_2' - ac\sin^2\frac{x_2}{c}\left(1 - a\sin^2\frac{x_2}{c}\right)^{-1}x_1' -$$

$$-\frac{h}{c}\left(1 - a\sin^2\frac{x_2}{c}\right)^{-1}\left[2\sin^2\frac{x_2}{2c} + a\sin^2\frac{x_2}{c}\left(2\cos\frac{x_2}{c} - 1\right)\right]x_2'$$

$$X_2 = -\frac{a}{2c}x_2'^2\sin 2\frac{x_2}{c} - \frac{2}{c}\sin^2\frac{x_2}{2c}x_1'$$

К системе (3.4), имеющей вид системы (1.1) при $K = 0$, применим результаты разд. 1.

Матрица $S = G^TF + F^TG = 2fc^{-2}E$ положительно определена, поскольку $f > 0$, а ее собственное значение $\mu = 2fc^{-2}$. Параметры g_0, c_0, b, b_0 и c_1 имеют вид $g_0 = c^{-2}$, $c_0 = f^2 + c^{-2}$, $b = c$, $b_0 = c^{-1}$, $c_1 = 2f$ (для определенности принято $c < 1$).

Опуская вычисления, связанные с оценкой по норме нелинейных членов X_1, X_2, приведем окончательный результат

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \le a_0(x_1'^2 + x_2'^2 + x_2^2)$$

где

$$a_0 = \max\left\{\frac{a(1+c^2)+c(2-a-a^2)}{2c(1-a)},\ \frac{a+h(2-a)}{2c(1-a)},\ \frac{2ac^2+h(1+a)+c(1-a)}{4c^3(1-a)}\right\}$$

Стационарное движение

$$\alpha = \beta = 0, \quad \alpha' = \beta' = 0$$

при котором плоскости колец ортогональны асимптотически устойчиво при

$$h > h_0, \quad h_0 = (1+5f^2c^2)/(4fc^3)$$

Оценка области притяжения задается неравенством

$$\alpha'^2 + c^2\beta'^2 + c^{-2}\alpha^2 + \beta^2 + 2h^{-1}(\alpha'\beta - \alpha\beta' + f\alpha\alpha' + c^2 f\beta\beta') < \gamma_1^2/4$$

где

$$a_0\gamma_1 = fh^{-1}(c^{-2}-1) + c - [(fh^{-1}(c^{-2}-1)+c)^2 - 4ch^{-2}(h-h_0)]^{1/2}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агафонов С.А.* Об устойчивости движения неконсервативных механических систем // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 212–217.
2. *Карапетян А.В.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вест. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1975. № 4. С. 109–113.
3. *Лахаданов В.М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 246–253.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
5. *Frik M.* Zur Stabilität nichtkonservativer Lineare Sysyteme // ZAMM. 1972. Bd. 52. H. 4. S. 47–49.
6. *Li J.* On the stability of dissipative mechanical systems with circulatory forces // ZAMM. 1997. V. 48. № 1. P. 161–164.
7. *Кошляков В.Н.* К теории устойчивости неконсервативных систем // Навигация и управление. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. С. 3–10.
8. *Гончаренко В.И.* О стабилизации движения неустойчивой механической линейной системы // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 4. С. 79–85.
9. *Кошляков В.Н.* О структурных преобразованиях динамических систем с гироскопическими силами // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 774–780.
10. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

Москва
e-mail: agafonov_s@rambler.ru

Поступила в редакцию
23.VII.2002