УДК 531.36

© 2003 г. А.Х. Гелиг

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Рассматривается импульсная система, описываемая нелинейным функционально-дифференциальным уравнением, и "эквивалентная" непрерывная нелинейная система, полученная из исходной системы заменой импульсного модулятора его статической характеристикой. Показано, что при достаточно высокой частоте импульсации из устойчивости по первому приближению эквивалентной системы вытекает асимптотическая устойчивость состояния равновесия импульсной системы.

Широкий класс нелинейных импульсных систем описывается функционально-дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\xi, \quad \xi = M\sigma, \quad \sigma = \mathbf{c}^*\mathbf{x} \tag{1}$$

где $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, – постоянные вещественные m-мерные векторы-столбцы, звездочка означает транспонирование, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – непрерывная m-мерная вектор-функция, M – нелинейный оператор, который каждой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $\sigma(t)$ ставит в соответствие функцию $\xi(t)$ и последовательность $t_n (n = 0, 1, 2, \ldots; t_0 = 0)$, обладающие следующими свойствами:

существуют положительные постоянные ν_0 и T, при которых для всех n справедлива оценка

$$\nu_0 T \le t_{n+1} - t_n \le T \tag{2}$$

функция $\xi(t)$ кусочно-непрерывна на каждом промежутке $[t_n, t_{n+1}]$ и не меняет знака на нем,

t_n зависит лишь от значений $\sigma(\tau)$ при $\tau \le t_n$, $\xi(t)$ зависит лишь от значений $\sigma(\tau)$ при $\tau \le t$,

существует такая непрерывная функция $\varphi(\sigma)$, что при каждом n найдется $\tilde{t}_n \in \in [t_n, t_{n+1})$, при котором среднее значение n-го импульса

$$\upsilon_n = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} \xi(t)dt \tag{3}$$

удовлетворяет соотношению

$$\upsilon_n = \varphi(\sigma(\tilde{t}_n)) \tag{4}$$

Перечисленным условиям удовлетворяет большинство из известных видов импульсной модуляции (широтная, частотная, амплитудная, комбинированная и др. [1–4]), при этом $\varphi(\sigma)$ – статическая характеристика импульсного модулятора (т.е. зависимость среднего значения импульса (3) от модулирующего сигнала σ в предположении, что последний постоянен).

Простейший пример – широтно-импульсная модуляция первого рода (ШИМ-1), при которой $t_n = nT$

$$\xi(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\sigma(nT), & nT \le t < nT + \tau_n \\ 0, & nT + \tau_n \le t < (n+1)T \end{cases} \tag{5}$$

$$\tau_n = TF(|\sigma(nT)|)$$

$F(\lambda)$ – непрерывная неубывающая на $[0, +\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям $F(0) = 0$, $0 < F(\lambda) \le 1$ при $\lambda > 0$. Широтно-импульсная модуляция второго рода (ШИМ-2) отличается от ШИМ-1 тем, что τ_n вычисляется не по последней формуле (5), а является первым положительным корнем уравнения

$$\tau_n = F(|\sigma(nT + \tau_n)|)$$

если таковой имеется на $[0, T]$, и $\tau_n = T$ в противном случае. Существенное отличие ШИМ-1 от ШИМ-2 заключается в том, что если при ШИМ-1 τ_n – непрерывный функционал от $\sigma(t)$ при всех $\sigma(t) \in C[0, +\infty)$, то в случае ШИМ-2 этот функционал не является непрерывным во всем пространстве $C[0, +\infty)$. Очевидно, что при обоих видах широтной модуляции условие (4) выполнено при $\varphi(\sigma) = F(|\sigma|)\operatorname{sign}\sigma$, причем в случае ШИМ-1 $\tilde{t}_n = nT$, а в случае ШИМ-2 $\tilde{t}_n = nT + \tau_n$.

Рассмотрим наряду с (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\varphi(\sigma), \quad \sigma = \mathbf{c}^*\mathbf{x} \tag{6}$$

которую назовем "эквивалентной". Поскольку устойчивость непрерывной системы (6) изучена значительно лучше, чем устойчивость импульсной системы (1), то интерес представляет гипотеза о том, что при достаточно высокой частоте импульсации (при достаточно малом T) устойчивость системы (1) вытекает из устойчивости системы (6). Если речь идет об устойчивости в целом, то эта гипотеза была опровергнута [5, 6] и на примере системы первого порядка с ШИМ-1 было показано, что, хотя эквивалентная система устойчива в целом при любых значениях параметров, импульсная система может иметь бесконечное множество периодических режимов, сколь бы высокой ни была частота импульсации. В данной статье доказано, что эта гипотеза справедлива, если речь идет об асимптотической устойчивости ("в малом"). Именно если асимптотически устойчива система первого приближения [7] для непрерывной системы (6), то асимптотически устойчиво состояние равновесия $\mathbf{x} = 0$ импульсной системы (1).

Предположим, что в системах (1) и (6)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{7}$$

где $\mathbf{A}$ – постоянная $(m \times m)$-матрица, а вектор-функция $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\| / \|\mathbf{x}\| \to 0, \quad \|\mathbf{x}\| \to 0 \tag{8}$$

Пусть $\varphi(0) = 0$, в некоторой окрестности точки $\sigma = 0$ функция $\varphi(\sigma)$ дважды непрерывно дифференцируема и выполнены неравенства

$$|\varphi'(\sigma)| \le l, \quad |\varphi''(\sigma)| \le \varphi_+ \tag{9}$$

Пусть λ_- и λ_+ – минимальное и максимальное собственное число матрицы $\mathbf{H}$, являющейся решением уравнения Ляпунова

$$\mathbf{B}^*\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{B} = -\mathbf{I}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{A} + k\mathbf{b}\mathbf{c}^*; \quad k = \varphi'(0) \tag{10}$$

Введем обозначения

$$c_1(0) = \frac{24l^2}{\pi^2}\|\mathbf{c}^*\mathbf{A}\|^2,$$

$$c_2(0) = \frac{24l^2}{\pi^2}(|\kappa| + |\kappa_1|T)^2 + 8l^2\kappa^2$$

$$d_1(0) = \frac{4l^2\|\mathbf{c}\|^2 + 2c_1(0)T^2}{1-(4l^2\|\mathbf{c}\|^2 + 2c_2(0))T^2},$$

$$d_2(0) = [c_1(0) + c_2(0)d_1(0)]T^2$$

$$p = \frac{2}{\lambda_-}[\|\mathbf{b}\|^2 d_2(0) + \|\mathbf{Ab} - k\kappa\mathbf{b}\|^2 d_1(0)]$$

$\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора либо матрицы, $\kappa = -\mathbf{c}^*\mathbf{b}$, $\kappa_1 = \mathbf{c}^*\mathbf{Ab}$.

Теорема. Пусть выполнены условия (8), (9), матрица **B** гурвицева, и T столь мало, что справедливы неравенства

$$4l^2T^2\left[\frac{12}{\pi^2}(|\kappa| + |\kappa_1|T)^2 + 5\kappa^2\right] < 1 \tag{11}$$

$$4\lambda_+^3 pT^2 < 1 \tag{12}$$

$$l|\kappa|T + lT\|\mathbf{c}\|(\|\mathbf{b}\| + T\|\mathbf{Ab}\|)\exp(\|\mathbf{A}\|T) < 1 \tag{13}$$

Тогда состояние равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Замечание. При проверке условий теоремы полезно иметь в виду неравенства [8]

$$\lambda_+ \le \frac{1}{\min\limits_k|\nu_k(\mathbf{B}^* + \mathbf{B})|}, \quad \lambda_- \ge \frac{1}{2\sqrt{\max\limits_k \mu_k(\mathbf{B}^*\mathbf{B})}}$$

где $\nu_k(\mathbf{B}^* + \mathbf{B})$ и $\mu_k(\mathbf{B}^*\mathbf{B})$ – собственные числа матриц $\mathbf{B}^* + \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^*\mathbf{B}$ соответственно.

Доказательство. Воспользуемся методом усреднения [4, 9]. Введем функции

$$\upsilon(t) = \upsilon_n, \quad t \in [t_n, t_{n+1}), \quad u(t) = \int_0^t [\xi(\lambda) - \upsilon(\lambda)]d\lambda$$

Сделав в системе (1) замену Льенара

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{b}u \tag{14}$$

получим в силу равенства (7) уравнения

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay} + \mathbf{a}(\mathbf{y} + \mathbf{b}u) + \mathbf{b}\upsilon + \mathbf{Ab}u \tag{15}$$

$$\sigma = \mathbf{c}^*\mathbf{y} - \kappa u \tag{16}$$

Равенство (15) можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{By} + \mathbf{g} \tag{17}$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3$$

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{b}(\upsilon - \varphi) + (\mathbf{Ab} - k\kappa\mathbf{b})u, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{b}(\varphi - k\sigma), \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}(\mathbf{y} + \mathbf{b}u)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*\mathbf{H}\mathbf{y}$, где положительно определенная матрица $\mathbf{H}$ – решение уравнения (10). Производная по времени от V, взятая в силу системы (15), имеет вид

$$\dot{V} = -\|\mathbf{y}\|^2 + L_1 + L_2 + L_3; \quad L_i = 2(\mathbf{H}\mathbf{y}, \mathbf{g}_i), \quad i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

Очевидны неравенства

$$\lambda_-\|\mathbf{y}\|^2 \le V \le \lambda_+\|\mathbf{y}\|^2, \quad \|\mathbf{H}\mathbf{y}\|^2 \le \lambda_+ V \tag{19}$$

В силу второго неравенства (19)

$$|L_1| \le \varepsilon\lambda_+ V + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{g}_1\|^2 \le \varepsilon\lambda_+ V + \frac{2}{\varepsilon}(\upsilon - \varphi)^2\|\mathbf{b}\|^2 + \frac{2}{\varepsilon}u^2\|\mathbf{A}\mathbf{b} - k\kappa\mathbf{b}\|^2 \tag{20}$$

где ε – положительный параметр, выбором которого распорядимся ниже.

Предположим сначала, что условие (9) выполняется при всех σ. Ввиду этого условия и уравнения (16) имеет место оценка

$$|\varphi(\sigma) - k\sigma| \le \varphi_+\sigma^2/2 \le \varphi_+(\|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 + \kappa^2 u^2)$$

Поэтому, согласно второму неравенству (19), справедливо соотношение

$$|L_1| \le 2\sqrt{\lambda_+ V}\varphi_+\|\mathbf{b}\|[\|\mathbf{c}\|^2 V/\lambda_- + \kappa^2 u^2] \tag{21}$$

Наконец, из второго неравенства (19) вытекает неравенство

$$|L_3| \le 2\sqrt{\lambda_+ V}\|\mathbf{a}\|$$

Из этого неравенства и второго неравенства (19) получаем оценку

$$|L_3| \le \sqrt{\lambda_+}\mu(\mathbf{y} + \mathbf{b}u)[V + 2(\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 u^2)] \tag{22}$$

где

$$\mu(\mathbf{y} + \mathbf{b}u) = \|\mathbf{a}(\mathbf{y} + \mathbf{b}u)\|/\|\mathbf{y} + \mathbf{b}u\|$$

В силу соотношений (18)–(22) имеет место неравенство

$$\dot{V} \le \left[\varepsilon\lambda_+ - \frac{1}{\lambda_+} + \sqrt{\lambda_+}\mu(\mathbf{y} + \mathbf{b}u)\right]V + \frac{2}{\varepsilon}[\|\mathbf{b}\|^2(\upsilon - \varphi)^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{b} - k\kappa\mathbf{b}\|^2 u^2] +$$

$$+ 2\sqrt{\lambda_+}\left\{\frac{1}{\lambda_-}\|\mathbf{b}\|\varphi_+\|\mathbf{c}\|^2 V^{3/2} + \|\mathbf{b}\|\varphi_+\kappa^2 u^2\sqrt{V} + \mu(\mathbf{y} + \mathbf{b}u)[\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 u^2]\right\} \tag{23}$$

Воспользовавшись свойством (9) и равенством (16), получим

$$\Phi \doteq \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\upsilon(t) - \varphi(\sigma(t)))^2 dt \le l^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\sigma(\tilde{t}_n) - \sigma(t)|^2 dt \le$$

$$\le 2l^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} [|\mathbf{c}^*\mathbf{y}(\tilde{t}_n) - \mathbf{c}^*\mathbf{y}(t)|^2 + \kappa^2|u(\tilde{t}_n) - u(t)|^2] dt$$

Известно [4, 9], что для любой абсолютно непрерывной функции $\zeta(t)$ с $\dot{\zeta} \in L_2[\alpha, \beta]$ и любого $\tilde{t} \in [\alpha, \beta]$ справедливо неравенство Виртингера

$$\int_\alpha^\beta |\zeta(\tilde{t}) - \zeta(t)|^2 dt \le \frac{4(\beta - \alpha)^2}{\pi^2}\int_\alpha^\beta |\dot{\zeta}(t)|^2 dt$$

Поэтому

$$\Phi \le \frac{8l^2T^2}{\pi^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\mathbf{c}^*\dot{\mathbf{y}}|^2 dt + 4l^2\kappa^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} [u^2(\tilde{t}_n) + u^2(t)]dt$$

Подставив в правую часть этого неравенства выражение (15) и воспользовавшись оценкой [4, 9]

$$|u(t)| \le T|\upsilon(t)| \tag{24}$$

получаем цепочку соотношений

$$\Phi \le \frac{8l^2T^2}{\pi^2}\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\mathbf{c}^*\mathbf{A}\mathbf{y} - \kappa\upsilon + \kappa_1 u + \mathbf{c}^*\mathbf{a}|^2 dt + 8l^2\kappa^2T^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \upsilon^2(t)dt \le$$

$$\le \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{\frac{8l^2T^2}{\pi^2}[\|\mathbf{c}^*\mathbf{A}\|\|\mathbf{y}\| + (|\kappa| + |\kappa_1|T)|\upsilon| + \|\mathbf{c}\|\|\mathbf{a}\|]^2 + 8l^2\kappa^2T^2\upsilon^2\right\}dt \le$$

$$\le \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{\frac{24l^2T^2}{\pi^2}[\|\mathbf{c}^*\mathbf{A}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 + (|\kappa| + |\kappa_1|T)^2\upsilon^2 + \|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{a}\|^2] + 8l^2\kappa^2T^2\upsilon^2\right\}dt$$

Предположим, что

$$\mu(\mathbf{y} + \mathbf{b}u) < \delta_1 \tag{25}$$

Тогда

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{y} + \mathbf{b}u)\|^2 \le 2\delta_1^2(\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2u^2)$$

и полученную для Φ оценку можно представить в виде

$$\Phi \le c_1(\delta_1)T^2Y + c_2(\delta_1)T^2X \tag{26}$$

где

$$Y = \int_{t_n}^{t_{n=1}} \|\mathbf{y}(t)\|^2 dt, \quad X = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \upsilon^2(t)dt$$

$$c_1(\delta_1) = \frac{24l^2}{\pi^2}[\|\mathbf{c}^*\mathbf{A}\|^2 + 2\delta_1^2\|\mathbf{c}\|^2]$$

$$c_2(\delta_1) = \frac{24l^2}{\pi^2}[(|\kappa| + |\kappa_1|T)^2 + 2\delta_1^2\|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2\kappa^2T^2] + 8l^2\kappa^2$$

Оценим X через Y. Из соотношений (9), (25) вытекают неравенства

$$|\varphi(\sigma)| \le l|\mathbf{c}^*\mathbf{y} - \kappa u|, \quad \varphi^2(\sigma) \le 2l^2(\|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 + \kappa^2T^2\upsilon^2)$$

Поскольку $\nu = \varphi + (\upsilon - \varphi)$, то

$$\upsilon^2 \le 2\varphi^2 + 2(\upsilon + \varphi)^2 \le 4l^2\|\mathbf{c}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 + 4l^2\kappa^2T^2\upsilon^2 + 2(\upsilon - \varphi)^2$$

Поэтому справедливо соотношение

$$X \le 4l^2\|\mathbf{c}\|^2 Y + 4l^2\kappa^2 T^2 X + 2\Phi$$

Оценив правую часть этого неравенства с помощью неравенства (26), приходим к оценке

$$X \le [4l^2\|\mathbf{c}\|^2 + 2c_1(\delta_1)T^2]Y + [4l^2\kappa^2 T^2 + 2c_2(\delta_1)T^2]X \tag{27}$$

Если коэффициент при X в правой части этого неравенства меньше единицы (что в силу предположения (11) выполняется при достаточном малом δ_1), то из оценки (27) следует соотношение

$$X \le d_1(\delta_1)Y, \quad d_1(\delta_1) = \frac{4l^2\|\mathbf{c}\|^2 + 2c_1(\delta_1)T^2}{1 - [4l^2\kappa^2 + 2c_2(\delta_1)]T^2} \tag{28}$$

Из соотношений (26), (28) вытекает неравенство

$$\Phi \le d_2(\delta_1)Y, \quad d_2(\delta_1) = [c_1(\delta_1) + c_2(\delta_1)d_1(\delta_1)]T^2 \tag{29}$$

Рассмотрим область $D = \{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) \le \delta^2\}$. В этой области, согласно оценкам (23), (24), справедливо соотношение

$$\dot{V} \le -\nu(\delta, \delta_1)V + F \tag{30}$$

$$\nu(\delta, \delta_1) = \frac{1}{\lambda_+} - \varepsilon\lambda_+ - \frac{2}{\lambda_-}\sqrt{\lambda_+}\|\mathbf{b}\|\varphi_+\|\mathbf{c}\|^2\delta - \sqrt{\lambda_+}\delta_1$$

$$F = \frac{2}{\varepsilon}\|\mathbf{b}\|^2(\upsilon - \varphi)^2 + \frac{2T^2}{\varepsilon}\|\mathbf{Ab} - k\kappa\mathbf{b}\|^2\upsilon^2 + 2T^2\sqrt{\lambda_+}\|\mathbf{b}\|\varphi_+\kappa^2\upsilon^2\delta + 2\sqrt{\lambda_+}\delta_1[\|\mathbf{y}\|^2 + T^2\|\mathbf{b}\|^2\upsilon^2]$$

В силу соотношений (28), (29) имеет место оценка

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F\,dt \le d_3(\delta, \delta_1)\int_{t_n}^{t_{n+1}} V\,dt \tag{31}$$

$$d_3(\delta, \delta_1) = \frac{1}{\lambda_-}\Big[\frac{2T^2}{\varepsilon}\|\mathbf{b}\|^2 d_2(\delta_1) + \frac{2T^2}{\varepsilon}\|\mathbf{Ab} - k\kappa\mathbf{b}\|^2 d_1(\delta_1) +$$

$$+ 2T^2\sqrt{\lambda_+}\|\mathbf{b}\|\varphi_+\kappa^2\delta d_1(\delta_1) + 2\sqrt{\lambda_+}\delta_1 + 2\sqrt{\lambda_+}\delta_1 T^2\|\mathbf{b}\|^2 d_1(\delta_1)\Big]$$

Из соотношений (30), (31) вытекают неравенства

$$V(\mathbf{y}(t_{n+1})) - V(\mathbf{y}(t_n)) \le -\lambda(\delta, \delta_1)\int_{t_n}^{t_{n+1}} V(\mathbf{y}(t))\,dt$$

$$\lambda(\delta, \delta_1) = \nu(\delta, \delta_1) - d_3(\delta, \delta_1)$$

Просуммировав эти неравенства по n от 0 до $N - 1$, получим соотношение

$$V(\mathbf{y}(t_N)) + \lambda(\delta, \delta_1)\int_0^{t_N} V(\mathbf{y}(t))\,dt \le V(\mathbf{y}(0)) \tag{32}$$

Потребуем, чтобы $\lambda(0, 0) > 0$. Имеем

$$\lambda(0,0) = \nu(0,0) - d_3(0,0) = \frac{1}{\lambda_+} - \varepsilon\lambda_+ - \frac{T^2}{\varepsilon}p$$

Поэтому соотношение $\lambda(0, 0) > 0$ эквивалентно неравенству

$$\lambda_+^2\varepsilon^2 - \varepsilon + T^2 p\lambda_+ < 0$$

которое в силу условия (12) выполняется при

$$\varepsilon_- < \varepsilon < \varepsilon_+, \quad \varepsilon_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda_+^3 pT^2})/(2\lambda_+^2)$$

Очевидно, что $\mu(\delta, \delta_1) > 0$ при достаточно малых δ и δ_1. Из неравенства (32) вытекает, что при всех n $\mathbf{y}(t_n) \in$ D, если $y(0) \in D$.

Убедимся, что $\mathbf{y}(t) \in D$ при всех $t > 0$, если величина $\|\mathbf{y}(0)\|$ достаточно мала. Поскольку $|\varphi(\sigma)| \le l|\sigma|$, то

$$|\upsilon_n| \le l|\sigma(\tilde{t}_n)| \le l\|\mathbf{c}\|\delta_2 + l|\kappa||\upsilon_n|T, \quad \delta_2 = \max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \|\mathbf{y}(t)\|$$

Отсюда ввиду условия (13) получаем оценку

$$|\upsilon_n| \le d_4\delta_2, \quad d_4 = l\|\mathbf{c}\|/(1 - l|\kappa|T) \tag{33}$$

Поэтому в неравенстве (25)

$$\lim_{\delta_2 \to 0} \delta_1 = 0 \tag{34}$$

Проинтегрировав уравнение (15), получим представление

$$\mathbf{y}(t) = \exp(\mathbf{A}(t - t_n))\mathbf{y}(t_n) +$$
$$+ \int_{t_n}^{t} \exp(\mathbf{A}(t - \lambda))\{\mathbf{a}(\mathbf{y}(\lambda) + \mathbf{b}u(\lambda)) + \mathbf{b}\upsilon(\lambda) + \mathbf{Ab}u(\lambda)\}d\lambda$$

Отсюда для $t_n < t \le t_{n+1}$ в силу оценки (33) и первого неравенства (19) вытекает оценка

$$\begin{gathered}\delta_2 \le \exp(\|\mathbf{A}\|T)\sqrt{V(\mathbf{y}(0))/\lambda_-} + \delta_2 s \\ s = \{(\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{Ab}\|T)d_4 + (1 + \|\mathbf{b}\|Td_4)\delta_1\}\exp(\|\mathbf{A}\|T)\end{gathered} \tag{35}$$

Если

$$s < 1 \tag{36}$$

то из неравенства (35) вытекает оценка

$$\delta_2 \le \exp(\|\mathbf{A}\|T)\sqrt{V(\mathbf{y}(0))}/[(1 - s)\sqrt{\lambda_-}]$$

и, следовательно, $\mathbf{y}(t) \in D$ при достаточно малой величине $\|\mathbf{y}(0)\|$. Ввиду условия (13) и свойства (34) неравенство (36) выполняется при достаточно малом δ. Поскольку $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0)$ и в силу соотношений (14), (24), (33)

$$\max_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \|\mathbf{x}(t)\| \le \delta_2(1 + |\kappa|Td_4)$$

то устойчивость по Ляпунову состояния равновесия $x = 0$ доказана.

Убедимся, что $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, если величина $\|\mathbf{x}(0)\|$ достаточно мала. Согласно соотношению (32), $\|y(t)\| \in L_2[0, +\infty)$. Поскольку в силу уравнения (15) величина $\|\dot{\mathbf{y}}(t)\|$ ограничена равномерно по t, то $\|\mathbf{y}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. А тогда ввиду соотношений (14), (24), (33) $\|\mathbf{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, и теорема доказана при дополнительном предположении, что условия (9) выполнены при $-\infty < \sigma < +\infty$. Убедимся, что это предположение излишне. Пусть условия (9) выполнены при $|\sigma| \le \sigma_*$. Обозначим через $\varphi_*(\sigma)$ функцию, которая дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию (9) при всех $\sigma \in (-\infty, +\infty)$, а при $|\sigma| \le \sigma_*$ совпадает с $\varphi(\sigma)$. Определим оператор M_*, отображающий $\sigma(t)$ в $\xi_*(t)$ и $\{ t_n^* \}$ следующим образом. Пусть $|\sigma(t)| < \sigma_*$ при $0 \le t < t_*$ и $|\sigma(t_*)| = \sigma_*$. При $t \le t_*$ имеем $\xi_*(t) = \xi(t)$ и $t_n^* = t_n$ при $t_n \le t_*$. Пусть

$$N = \max_{t_m \le t_*} n$$

Тогда положим $t_{n+1}^* = t_n^* + T$ при $n \ge N$ и $\xi_*(t) = \varphi_*(\sigma(t_n^*))$ при $t_n^* \le t < t_{n+1}^*$. Очевидно, что для $n \ge N$ свойство (4) выполнено при $\tilde{t}_n^* = t_n^*$. Пусть $\mathbf{x}_*(t)$ – удовлетворяющее условию $\mathbf{x}_*(0) = \mathbf{x}(0)$ решение системы (1), в которой оператор M заменен на M_*. Тогда в силу доказанного $|\mathbf{c}^*\mathbf{x}_*(t)| < \sigma_*$ при всех $t > 0$, если величина $|\mathbf{x}(0)|$ достаточно мала. Следовательно, на этом решении M совпадает с M_* и $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_*(t)$. Поэтому $|\mathbf{c}^*\mathbf{x}(t)| < \sigma_*$ при всех $t > 0$, и предположение о справедливости условия (9) при всех $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ можно снять. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00542).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Vidal P.* Systèmes échantillonns non Linéares. Paris, etc.: Gordon and Breach, 1968 = *Видаль П.* Нелинейные импульсные системы. М: Энергия, 1974. 336 с.
2. *Кунцевич В.М., Чеховой Ю.Н.* Нелинейные системы управления с частотно- и широтно-импульсной модуляцией. Киев: Техника, 1970. 339 с.
3. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 414 с.
4. *Гелиг А.Х., Чурилов А.Н.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1993. 265 с.
5. *Кипнис М.М.* Символическая и хаотическая динамика широтно-импульсной системы управления // Докл. РАН. 1992. Т. 324. № 2. С. 273–276.
6. *Кипнис М.М.* Хаотические явления в детерминированной одномерной широтно-импульсной системе управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 108–112.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
8. *Зубер И.Е.* Оценка спектра решения матричного уравнения Ляпунова // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 2002. Вып. 1. С. 3–5.
9. *Gelig A.Kh., Churilov A.N.* Stability and Oscillations of Nonlinear Pulse-Modulated Systems. Boston: Birkhäuser, 1998. 362 p.

Санкт-Петербург
e-mail: ark@gelig.usr.pu.ru

Поступила в редакцию
28.II.2002