УДК 531.36

© 2003 г. А.А. Буров

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ, РЕАЛИЗУЕМЫМИ БОЛЬШИМИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ СИЛАМИ

Для систем, стесненных односторонними связями, реализованными большими потенциальными силами, исследуется модификация теоремы Рауса, которая дает возможность отыскивать установившиеся движения и исследовать достаточные условия их устойчивости. В качестве примера рассматривается задача об орбитальном "обезьяньем мосте".

Как известно, метод Рауса [1, 2] и его модификации [3, 4] позволяют эффективно решать не только задачу о существовании установившихся движений механических систем, стесненных двусторонними связями или обладающих первыми интегралами, но и исследовать достаточные условия их устойчивости и неустойчивости.

Были получены [5] и впоследствии обобщены [6] (см. также [7]) достаточные условия устойчивости равновесий системы, стесненных односторонними связями как с обращающимися в нуль, так и с не обращающимися в нуль реакциями. Предложен [8] эффективный метод анализа этих условий в рамках упомянутого подхода. Развитые методы исследования устойчивости периодических движений для систем, стесненных односторонними связями, а также теория бифуркаций таких движений [9], проиллюстрированы [9–11] на многочисленных примерах.

Было показано [12], что для корректного описания динамики механических систем, стесненных связями, в ряде случаев необходимы сведения о механическом происхождении сил, реализующих эти связи. В рамках идеи, предложенной Каратеодори, системы, стесненные односторонними связями, можно рассматривать как системы, находящиеся под действием больших потенциальных сил. Обоснование этой гипотезы, начатое в 1950-х годах [13], было продолжено [12, 14] (см. также [10], где даны систематические пояснения). В частности, с помощью таких сил были обоснованы известные результаты по устойчивости периодических движений систем, стесненных односторонней связью. Многочисленные ссылки на другие публикации по данной теме могут быть найдены в монографиях [9–11, 15].

Рассмотренная в качестве примера задача об орбитальном "обезьяньем мосте" принадлежит к большому классу практически важных задач о движении орбитальных тросовых систем [16–21], для каждой из которых требуется особый анализ той роли, которую играют в них неудерживающие связи. Некоторые особенности существования и устойчивости установившихся движений орбитальной тросовой системы с массивным тросом исследованы ранее [22].

1. Основная идея теории Рауса для систем, стесненных двусторонними связями. Для исследования установившихся движений (УД) механической системы, стесненной двусторонней связью

$$f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{1.1}$$

и находящейся под действием сил с потенциалом $U = U(\mathbf{x})$, в рамках метода Рауса составляют функцию Рауса

$$W(\mathbf{x}, \lambda) = U(\mathbf{x}) + \lambda f(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

и из уравнений (индекс $\mathbf{x}$ означает частную производную по $\mathbf{x}$)

$$W_{\mathbf{x}} = U_{\mathbf{x}} + \lambda f_{\mathbf{x}} = 0 \tag{1.3}$$

дополненных равенством (1.1), определяют их критические точки, которым и отвечают УД. Если решение уравнений (1.3) представлено в параметрическом виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\lambda)$,то отвечающее ему значение параметра λ_0 определяется из уравнения

$$f(\mathbf{x}_0(\lambda)) = 0 \tag{1.4}$$

Исследование достаточных условий устойчивости найденных таким образом УД сводится к определению типа этих критических точек с помощью анализа знакоопределенности ограничения функции U на поверхность (1.1) в их малой окрестности. Для невырожденных критических точек условия устойчивости могут быть получены из исследования знакоопределенности ограничения квадратичной формы

$$\delta^2 W = \delta^2 U + \lambda\delta^2 f = \tfrac{1}{2}((U_{\mathbf{xx}} + \lambda f_{\mathbf{xx}})\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) \tag{1.5}$$

на линейное многообразие

$$\delta I = \{\delta\mathbf{x}\colon (f_{\mathbf{x}}, \delta\mathbf{x}) = 0\} \tag{1.6}$$

Здесь и далее все производные вычисляются на обследуемом УД $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$.

Если число отрицательных собственных значений (ОСЗ) полученной таким образом квадратичной формы равно нулю, то говорят, что степень неустойчивости равна нулю. При этом УД устойчиво по Ляпунову, или, по терминологии из небесной механики, имеет место вековая устойчивость. Если число ОСЗ нечетно, имеет место неустойчивость. Если же число ОСЗ четно и не менее двух, теорема Рауса не дает возможности сделать вывод об устойчивости решения по Ляпунову, однако имеется возможность гироскопической стабилизации.

Исследование устойчивости вырожденных критических точек осуществляется с помощью форм более высокого порядка, возникающих при разложении функции W в окрестности критической точки $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ в ряд по степеням возмущений $\delta\mathbf{x}$. Имеются восходящии к Пуанкаре общие теоремы, позволяющие исследовать вопрос об устойчивости в вырожденных случаях.

2. Установившиеся движения системы, освобожденной от связи. Предположим теперь, что рассматриваемая система освобождена от связи, но на нее действует дополнительная сила с потенциалом (ср. со случаем, рассмотренным ранее [23])

$$U_N = \tfrac{1}{2} N\varphi(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

зависящим от положительного параметра N, причем либо

$$\varphi(\mathbf{x}) = f^2(\mathbf{x}) \tag{2.2}$$

либо

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} f^2(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathscr{E}_+ \cup \mathscr{E} \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathscr{E}_+ \end{cases} \tag{2.3}$$

Области $\mathscr{E}_\pm$ и поверхность $\mathscr{E}$ определены соотношениями

$$\mathscr{E}_- = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \mathscr{E}_+ = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \mathscr{E} = \{\mathbf{x}\colon f(\mathbf{x}) = 0\} \tag{2.4}$$

соответственно. Будем рассматривать общую ситуацию, когда гладкая поверхность $\mathscr{E}$ разделяет $(n-1)$-мерные области $\mathscr{E}_-$ и $\mathscr{E}_+$.

Будем считать, что при при достаточно больших значениях параметра N сила с потенциалом (2.1), (2.2) реализует двустороннюю связь (1.1), а сила с потенциалом (2.1), (2.3) реализует одностороннюю связь

$$f(\mathbf{x}) \le 0, \quad \mathbf{x} \in R^n \tag{2.5}$$

Установившиеся движения рассматриваемой системы находятся как критические точки потенциала

$$W(\mathbf{x}; N) = U(\mathbf{x}) + U_N(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

Они определяются соотношениями

$$W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; N) = U_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) + Nf(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.7}$$

имеющими место как для потенциала вида (2.1), (2.2), так и для потенциала (2.1), (2.3) в области $\mathscr{C} \cup \mathscr{C}_+$. Для потенциала (2.1), (2.3) в области $\mathscr{C}_-$ имеют место уравнения

$$W_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}; N) = U_{\mathbf{x}} = 0$$

Пусть

$$\lambda = Nf(\mathbf{x})$$

Тогда система (2.7), состоящая из n уравнений относительно n переменных $\mathbf{x}$, эквивалентна системе

$$U_{\mathbf{x}} + \lambda f_{\mathbf{x}} = 0, \quad f(\mathbf{x}) = \varepsilon\lambda, \quad \varepsilon = N^{-1} \tag{2.8}$$

состоящей из $n + 1$ уравнения относительно $n + 1$ неизвестной $(\mathbf{x}, \lambda)$. Первая подсистема (2.8) совпадает с уравнением (1.3). Вторая подсистема (2.8) при $\varepsilon \mapsto 0$ переходит в уравнение (1.1) поверхности $\mathscr{C}$.

Будем искать решение этой системы в виде разложения в ряд по степеням ε

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{x}_1 + \ldots, \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots$$

Подстановка этих разложений в уравнения (2.8) и приравнивание членов при одинаковых степенях параметра ε дает в нулевом и первом приближениях

$$U_{\mathbf{x}}^0 + \lambda_0 f_{\mathbf{x}}^0 = 0, \quad f^0 = 0 \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + f_{\mathbf{x}}^0\lambda_1 = 0, \quad (f_{\mathbf{x}}^0, \mathbf{x}_1) = \lambda_0, \quad \mathbf{A} = U_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 f_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0) \\ f^0 = f(\mathbf{x}_0), \quad f_{\mathbf{x}}^0 = f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0), \quad U_{\mathbf{x}}^0 = U_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \end{gathered} \tag{2.10}$$

Уравнения (2.9) в точности совпадают с уравнениями (1.3), (1.1), описывающими установившиеся движения в случае двусторонней связи.

Уравнения (2.10) в случае, когда определитель матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля и $f_{\mathbf{x}}^0 \neq 0$, т.е. $\mathbf{x}_0$ – неособая точка поверхности $\mathscr{C}$, позволяют найти установившиеся движения с точностью до первого приближения по формулам

$$\mathbf{x}_1 = \lambda_0(\mathbf{A}^{-1}f_{\mathbf{x}}^0, f_{\mathbf{x}}^0)^{-1}\mathbf{A}^{-1}f_{\mathbf{x}}^0, \quad \lambda_1 = -\lambda_0(\mathbf{A}^{-1}f_{\mathbf{x}}^0, f_{\mathbf{x}}^0)^{-1} \tag{2.11}$$

Тогда, так как

$$f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{x}_1 + \ldots) = f^0 + \varepsilon(f_{\mathbf{x}}^0, \mathbf{x}_1) + \ldots = \varepsilon\lambda_0 + \ldots \tag{2.12}$$

и $\varepsilon > 0$, то для $\lambda_0 > 0$ критическая точка располагается внутри области $\mathscr{C}_+$, т.е. при реализации односторонней связи – в области стесненного движения. При $\lambda_0 < 0$ критическая точка располагается внутри области $\mathscr{C}_-$, чего при реализации односторонней связи быть не может. Случай $\lambda_0 = 0$ требует рассмотрения более высоких приближений.

Иными словами, для систем с односторонней связью установившиеся движения, для которых соответствующая критическая точка располагается на границе связи, имеют место лишь в случае, когда активные силы, определяемые потенциалом U, прижимают систему к границе связи, или во всяком случае не отталкивают от нее.

Замечание. Уравнения (2.10) допускают представление в виде

$$\mathbf{A}_f\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}_f = \begin{Vmatrix} \mathbf{A} & f_{\mathbf{x}}^0 \\ f_{\mathbf{x}}^{0T} & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \lambda_1 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \lambda_0 \end{Vmatrix}$$

Если $\lambda_0 \neq 0$, то эта система, линейная относительно неизвестных $\mathbf{y}$, неоднородна и допускает единственное решение, если определитель матрицы $\mathbf{A}_f$ отличен от нуля. Если $\lambda_0 = 0$, то эта система однородна, и ее решение отлично от нуля, лишь если определитель матрицы $\mathbf{A}_f$ обращается в нуль.

Расширенная матрица вида $\mathbf{A}_f$ появляется в общей теории условных экстремумов (см., например, [4]).

3. Достаточные условия устойчивости. Для нахождения достаточных условий устойчивости рассматриваемого УД при $N \mapsto \infty$ проанализируем вторую вариацию потенциала (2.6) на этом УД. Она имеет вид

$$\begin{aligned} 2\delta^2 W &= ((U_{\mathbf{xx}} + Nf_{\mathbf{xx}} \otimes f_{\mathbf{xx}} + Nf(\mathbf{x})f_{\mathbf{xx}}) \cdot \delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \\ &= U_{x_ix_j}\delta x_i\delta x_j + Nf_{x_i}f_{x_j}\delta x_i\delta x_j + Nf(\mathbf{x})f_{x_ix_j}\delta x_i\delta x_j \end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставим решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{x}_1 + \ldots$ в это выражение, разложим его правую часть в ряд по малому параметру ε и приравняем члены при одинаковых степенях ε. Получаем

$$2\delta^2 W = 2N\delta^2 W_0 + 2\delta^2 W_1 + \ldots$$

где

$$\delta^2 W_0 = (f_{\mathbf{x}}^0, \delta\mathbf{x})^2 \tag{3.2}$$

$$\delta^2 W_1 = (U_{\mathbf{xx}}^0\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) + (f_{\mathbf{x}}^0, \mathbf{x}_1) \cdot (f_{\mathbf{xx}}^0\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) + 2(f_{\mathbf{x}}^0, \delta\mathbf{x})(f_{\mathbf{xx}}^0\mathbf{x}_1, \delta\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Слагаемое наинизшего порядка (3.2) неотрицательно. Оно обращается в нуль, если вариации $\delta\mathbf{x}$ принадлежат линейному многообразию

$$\delta I^0 = \{\delta\mathbf{x}\colon (f_{\mathbf{x}}^0, \delta\mathbf{x}) = 0\} \tag{3.4}$$

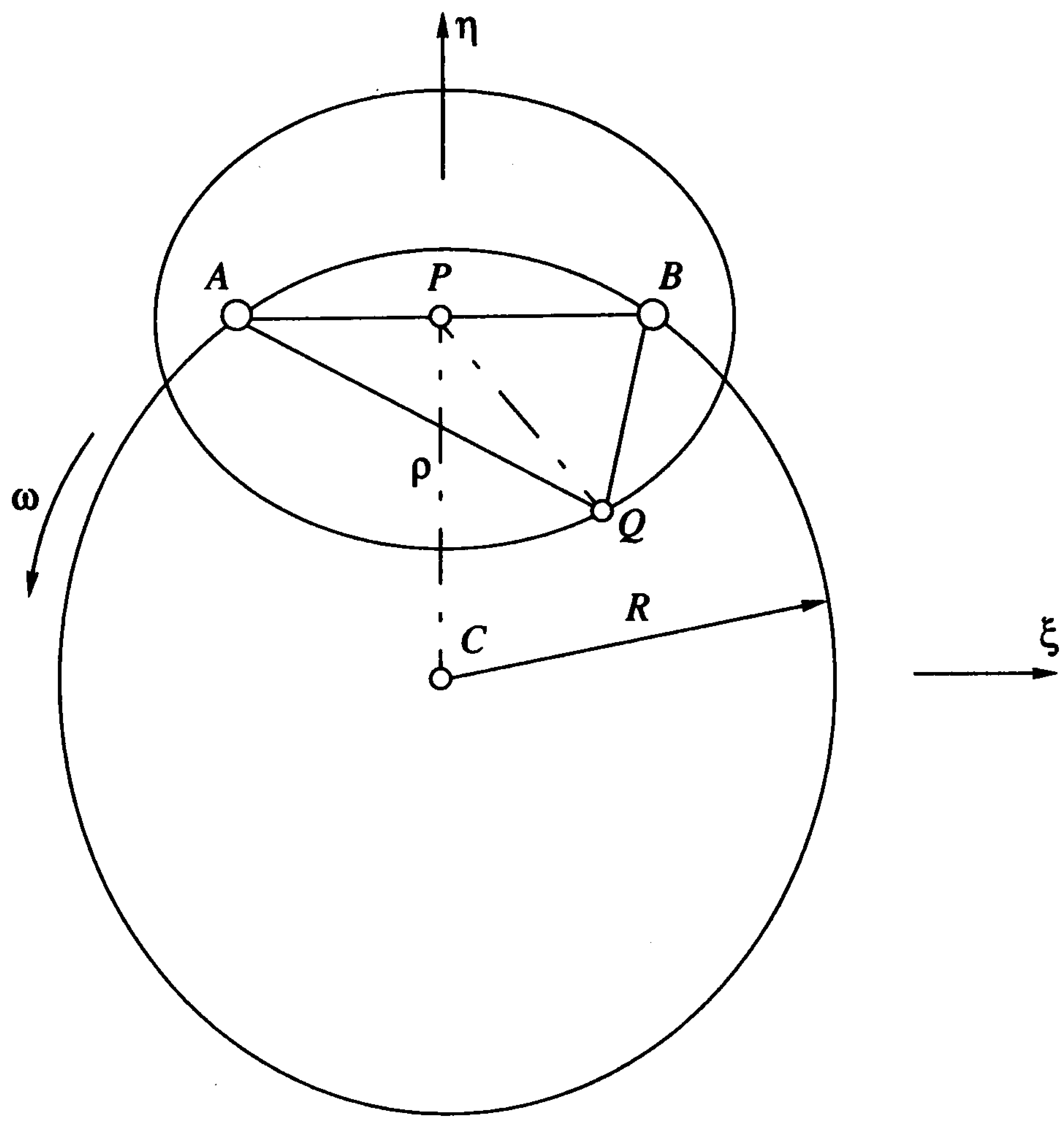
т.е. выполнение достаточного условия устойчивости будет обеспечено, если ограничение слагаемого следующего порядка на это линейное многообразие будет положительно определено.

Слагаемое следующего порядка (3.3) теперь можно представить в виде

$$2\delta^2 W_1 = (U_{\mathbf{xx}}^0, \delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) + \lambda_0(f_{\mathbf{xx}}^0, \delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

Таким образом, положительная определенность ограничения квадратичной формы (3.5) на линейное многообразие (3.4) обеспечивает положительную определенность второй вариации $\delta^2 W$ для достаточно малых значений параметра ε.

Доказанные выше положения по существованию и устойчивости УД системы, стесненной односторонней связью, могут быть сформулированы в виде утверждения.



Фиг. 1

Утверждение. Пусть $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ – неособая критическая точка функции Рауса (1.2), такая, что

$$f^0 = 0, \quad f^0_{\mathbf{x}} \neq 0, \quad \lambda_0 > 0$$

Тогда для односторонней связи (2.5), допускающей реализацию с помощью больших потенциальных сил, существует установившееся движение, нулевое приближение которого определяется этой критической точкой.

Если ограничение квадратичной формы

$$2\delta^2 W = (W^0_{\mathbf{xx}}\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

на линейное многообразие (3.4) положительно определено, то при достаточно больших значениях N УД устойчиво по Ляпунову.

Грубо говоря, механический смысл условий устойчивости состоит в том, что если активная сила "прижимает" систему к связи, то неустойчивость может развиваться лишь в направлениях, расположенных в касательной плоскости к ее границе.

4. Задача о космическом "обезьяньем мосте". Рассмотрим движение грузика (материальной точки) Q массы m в поле ньютоновского притяжения с центром притяжения в точке C. Предположим, что грузик Q движется в той же плоскости, что и пара спутников A и B, движущихся друг за другом по общей круговой кеплеровой орбите радиуса R. Обозначим через ω их орбитальную угловую скорость, неизменное расстояние между ними обозначим через $2l$. Расстояние между точкой P, расположенной в середине отрезка AB, и центром притяжения C также не меняется, обозначим его через ρ, так что $l^2 + \rho^2 = R^2$ (фиг. 1).

Предположим, что грузик Q может скользить без трения по безмассовому нерастяжимому тросу длины $2a$, соединяющему спутники A и B. Предполагая, что грузик

Q не может покидать плоскость орбиты, можно сделать вывод, что он располагается внутри эллипса с фокусами в точках A и B. Большая полуось этого эллипса равна a, меньшая полуось $b = (a^2 - l^2)^{1/2}$.

Уравнения движения. Введем подвижную систему координат $C\xi\eta$, равномерно вращающуюся с орбитальной угловой скоростью ω вокруг перпендикуляра к плоскости орбиты, проходящего через точку C. Предположим, что ось $C\xi$ параллельна отрезку AB. Тогда ось $C\eta$ перпендикулярна отрезку AB и проходит через его середину P. Таким образом, уравнение эллипса может быть записано в виде

$$f(\xi, \eta) = \xi^2/a^2 + (\eta - \rho)^2/b^2 - 1 = 0 \tag{4.1}$$

Его положение изображено на фиг. 1.

Обозначим через (ξ, η) координаты точки Q во введенной орбитальной системе координат. Тогда измененный потенциал системы представим в виде

$$U_a = -m\omega^2[r^2/2 + R^3/r], \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

Чтобы воспользоваться предложенной выше модификацией метода Рауса, выпишем функцию Рауса

$$W = U_a + \chi f(\xi, \eta)/2$$

Относительные равновесия совпадают с критическими точками этой функции. Они могут быть найдены из уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial W}{\partial \xi} = \xi\Lambda_a = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \eta\Lambda_b - \frac{\chi\rho}{b^2} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \chi} = 0\\ \Lambda_c = -m\omega^2(1 - R^3/r^3) + \chi/c^2, \quad c \in \{a, b\}\end{gathered} \tag{4.2}$$

Обратим внимание на знак множителя χ. Если этот множитель положителен, то трос натянут. Если этот множитель равен нулю, но выполнено соотношение (4.1), то, хотя система и находится на связи, реакция связи равна нулю. В оставшемся случае трос не натянут, и грузик Q не удерживается связью.

Прежде всего найдем из первого уравнения (4.2) частное решение, для которого $\xi = 0$. Тогда в силу последнего уравнения (4.2) получаем $\eta = \rho + \varepsilon b$, $\varepsilon = \pm 1$, причем множитель χ может быть найден из второго уравнения (4.2). Он имеет вид

$$\chi = m\omega^2(1 - R^3/|\rho + \varepsilon b|^3)\varepsilon b$$

Пусть $\varepsilon = -1$. Тогда трос натянут, если $b < \rho$ т.е. точка Q располагается между точками P и С (фиг. 2). Для $\varepsilon = 1$ множитель χ положителен только в том случае, когда точка Q располагается вне круговой орбиты точек A и B. Эти относительные равновесия назовем ***вертикальными***.

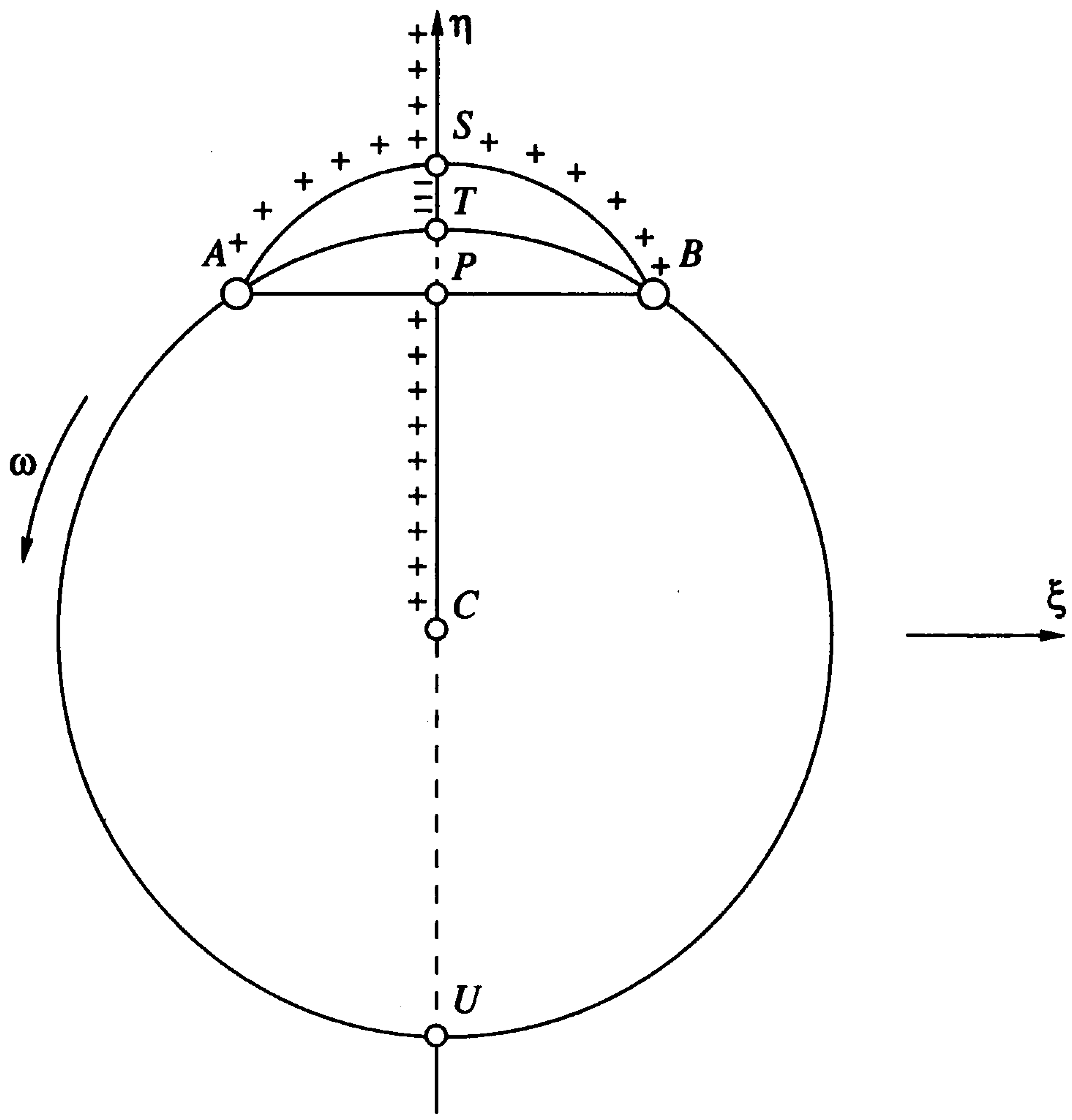
Предположим теперь, что $\Lambda_a = 0$, т.е. в нуль обращается второй множитель левой части первого уравнения (4.2). Тогда, выражая из этого уравнения величину χ и подставляя ее значение во второе соотношение (4.2), получаем

$$\chi(\eta[1/b^2 - 1/a^2] - \rho/b^2) = 0 \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) обращается в верное числовое равенство при $\chi = 0$, т.е. точка Q располагается на той же круговой орбите, что и точки A и B. Эти относительные равновесия не изолированны.

Уравнение (4.3) имеет также решение

$$\eta = \rho a^2/(a^2 - b^2) = \rho a^2/l^2$$



Фиг. 2

Из уравнения эллипса находим, что на относительных равновесиях, соответствующих этому решению,

$$\eta = \varepsilon a[(1-\rho b/l^2)(1+\rho b/l^2)]^{1/2}$$

Такие равновесия (назовем их *наклонными*) существуют при условии

$$a < lR/\rho$$

Множество вертикальных и наклонных равновесий пересекаются, если $\xi = 0$, т.е. если

$$a = lR/\rho$$

Эта точка бифуркации, обозначенная S, и точка P сопряжены друг другу в смысле преобразования инверсии по отношению к окружности орбиты.

Для наклонных равновесий

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 = a^2 + a^2\rho^2/l^2 = a^2R^2/l^2$$

Так как $a > l$, то $r > R$, и в силу соотношения (4.3) на наклонных равновесиях трос натянут.

Устойчивость относительных равновесий. Хотя для исследования устойчивости можно пользоваться переменными (ξ, η), удобнее ввести угловую переменную φ, такую, что

$$\xi = a\sin\varphi, \quad \eta = \rho + b\cos\varphi$$

предполагая, что реакция связи не обращается в нуль Измененный потенциал при этом имеет вид

$$U_a(\varphi) = -m\omega^2(\tfrac{1}{2}\Phi(\varphi) + R^3\Phi^{-1/2}(\varphi)), \quad \Phi(\varphi) = a^2\sin^2\varphi + (\rho + b\cos\varphi)^2$$

Тогда

$$\partial U_a/\partial\varphi = -m\omega^2\sin\varphi Q(\varphi)(1-R^3/r^3), \quad Q(\varphi) = [a^2\cos\varphi - b(\rho + b\cos\varphi)]^{1/2}$$

Это выражение обращается в нуль, если выполнены равенства

$$\sin\varphi = 0, \quad \cos\varphi = \varepsilon$$

т.е. на паре вертикальных равновесий, а также если

$$\cos\varphi = b\rho/(a^2-b^2)$$

т.е. на паре наклонных равновесий, симметричных относительно вертикали, или если

$$r = R$$

т.е. на семействе неизолированных равновесий, расположенных на кеплеровой орбите.

Для исследования устойчивости найдем вторую производную измененного потенциала

$$\partial^2 U_a/\partial\varphi^2 = -m\omega^2[\cos\varphi Q(\varphi) - \sin^2\varphi(a^2-b^2)](1-R^3/r^3)$$

Для вертикальных относительных равновесий достаточные условия устойчивости имеют вид

$$-m\omega^2\varepsilon(\varepsilon(a^2-b^2)-b\rho)(1-R^3/r^3)>0$$

Это означает, что при $\varepsilon = -1$ относительное равновесие устойчиво, если точка Q располагается между точкой P и притягивающим центром. Если $\varepsilon = 1$, то относительные равновесия устойчивы, если точка Q располагается над точкой бифуркации S. Относительные равновесия, принадлежащие отрезку ST, всегда неустойчивы.

Для наклонных равновесий достаточное условие устойчивости имеет вид

$$m\omega^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi[1-R^3/r^3]>0$$

Это условие выполнено для наклонных относительных равновесий, так как на них точка Q располагается вне орбиты точек A и B.

Работа выполнена при поддержке Института механики Венского технического университета (Institut fuer Mechanik, Technische Universitaet Wien), Юбилейного фонда Высшей Школы города Вены (Hochschule Jubliläumsstiftung der Stadt Wien), Австрийской службы внешних связей (Oesterreichische Austaschendienst), а также Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-02001, 02-01-00261) и Федеральной целевой программы “Интеграция”.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion. L.: MacMillan, 1877. 108 p.
2. *Routh E.J.* The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. L.: MacMillan, 1884. 343 p.
3. *Salvadori L.* Un'osservazione su di un criterio di stabilita del Routh // Rend. Accad. Sci. fis. e math. Soc. naz. lett. ed arti. Napoli. 1953. V. 20. № 1–2. P. 269–272.
4. *Рубановский В.Н., Степанов С.Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 904–912.
5. *Иванов А.П.* Об устойчивости в системах с неудерживающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725–732.

6. *Иванов А.П.* Моделирование систем с механическими соударениями. М.: Изд-во Моск. ин-та приборостроения, 1992. 83 с.
7. *Виннер Г.М.* Устойчивость равновесия механической системы с неудерживающей связью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 4. С. 54–57.
8. *Рапопорт Л.Б.* Устойчивость равновесия систем с неудерживающими связями и знакоопределенность пучка квадратичных форм в конусе // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 597–603.
9. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.
10. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 168 с.
11. *Beletskii V.V.* Reguläre und chaotische Bewegung starrer Körper. Stuttgart: Teubner, 1995. 148 S.
12. *Козлов В.В.* Реализация неинтегрируемых связей в классической механике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272. № 3. С. 550–554.
13. *Rubin H., Ungar P.* Motions under a strong constraining force // Communs Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. № 1. P. 65–87.
14. *Козлов В.В.* Конструктивный метод обоснования теории систем с неудерживающими связями // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 883–894.
15. *Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А.* Механика систем с неудерживающими связями. М.: Наука, 1993. 240 с.
16. *Banerjee A.K., Kane T.R.* Pointing control, with tethers as actuators, of a space station supported platform // J. Guid., Control and Dynamics. 1993. V. 16. № 2. P. 396–399.
18. *Lorenzini E.C.* Three-mass tethered system for micro-*g* / variable-*g* applications // J. Guid., Control and Dynamics. 1987. V. 10. № 3. P. 242–249.
19. *Misra A.K., Amier Z., Modi V.J.* Attitude dynamics of three body tethered systems // Acta Astronaut. 1988. V. 17. № 10. P. 1059–1068.
20. *Misra A.K., Diamond G.S.* Dynamics of a subsatellite system supported by two tethers // J. Guid., Control and Dynamics. 1986. V. 9. № 1. P. 12–16.
21. *Beletsky V.V., Levin E.M.* Dynamics of Space Tether System. San Diego: Amer. Astronaut. Soc., Publ. Univelt Inc., 1993. 499 p.
22. *Krupa M., Schagerl M., Steindl A., Szmolyan P., Troger H.* Relative equilibria of tethered satellite systems and their stability for very stiff tethers // Dynam. Syst. 2001. V. 16. № 3. P. 253–278.
23. *Дерябин М.В., Козлов В.В.* К теории систем с односторонними связями // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 531–539.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию
11.II.2002