

УДК 531.36

© 2003 г. А.П.Иванов

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ДИНАМИКИ СИСТЕМ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Для механических систем с  $k \geq 1$  неидеальными геометрическими связями рассматривается основная задача динамики об определении обобщенных ускорений и реакций связей в зависимости от приложенных сил. Установлена связь этой задачи с анализом особенностей кусочно-гладких отображений пространства  $R^k$  в себя. Для трения кулонова типа получен критерий отсутствия парадоксов и показано, что в случае  $k = 1$  возможные особенности являются складками, а в случае  $k = 2$  они подразделяются на складку, сборку и двойную складку. Подробно рассмотрен известный пример Пэнлеве–Клейна для случаев двусторонних и односторонних контактов; впервые приведен полный перечень возможных парадоксальных ситуаций.

Впервые парадоксальные ситуации несуществования или неединственности решения в системах с одной парой трения были обнаружены Пэнлеве в 1895 г. [1]. В случае  $k \geq 2$  получен [2–6] ряд достаточных условий отсутствия парадоксов.

**1. Построение определяющего отображения.** Введем обобщенные координаты  $q_1, q_2, \dots, q_n$  таким образом, чтобы первые  $k \leq n$  из них равнялись расстояниям между теми телами, между которыми возможен контакт. Таким образом, равенство  $q_j = 0$  ( $j = 1, \dots, k$ ) свидетельствует о наличии контакта в  $j$ -й паре. Будем считать в рассматриваемый момент времени все эти равенства выполненными.

В зависимости от конструктивных особенностей, возможен двусторонний или односторонний характер связи между телами. В первом случае соответствующая координата  $q_j$  тождественно равна нулю, а во втором случае она может принимать положительные значения. На этапе составления уравнений движения мы будем основываться на принципе освобождения от связей и считать, что система имеет  $n$  степеней свободы, не ограничивая возможных значений координат. Уравнения движения запишем в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^k R_i^{(j)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

$$q_1 = \dots = q_l = 0, \quad q_{l+1} \geq 0, \dots, q_k \geq 0$$

$T$  – кинетическая энергия системы,  $Q_i$  – обобщенные силы,  $R_i^{(j)}$  – компоненты реакции  $j$ -й связи (односторонней или двусторонней).

Будем решать основную задачу динамики об определении обобщенных ускорений и реакций связей. Если бы  $j$ -я связь была идеальной, то отличной от нуля была бы лишь компонента  $N_j = R_i^{(j)}$ . Наличие ненулевых величин  $R_i^{(j)}$  ( $i \neq j$ ) свидетельствует о трении. Закон трения описывается как зависимость компонент  $R_i^{(j)}$  ( $i \neq j$ ) от  $N_j$  при данных значениях обобщенных координат и скоростей:

$$R_i^{(j)} = F_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, N_j), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.2)$$

В частности, для вязкого трения функции  $F_{ij}$  не зависят от  $N_j$ , а для кулоновского трения скольжения (скорости проскальзывания считаем отличными от нуля) они линейны относительно модуля нормальной реакции

$$F_{ij} = \alpha_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) |N_j| \quad (1.3)$$

Подставляя выражения (1.2) в уравнения (1.1), получим

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{N} + \mathbf{F}(\mathbf{N}) + \mathbf{\Theta} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T, \quad \mathbf{N} = (N_1, \dots, N_k, 0, \dots, 0)^T$$

где  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(t, \mathbf{q})$  – матрица квадратичной по скоростям части кинетической энергии системы,  $\mathbf{F}(\mathbf{N}) = \|\mathbf{F}_{ij}\|$  – матрица  $n \times n$ , описывающая трение, а вектор-столбец  $\mathbf{\Theta} = \mathbf{\Theta}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  составлен из членов, полученных при раскрытии производных в уравнениях (1.1) и не содержащих обобщенных ускорений.

В системе (1.4) неизвестными являются  $\ddot{\mathbf{q}}$  и  $\mathbf{N}$ . Заметим, что переменные  $\ddot{q}_j$  и  $N_j$  не являются независимыми: для двусторонних связей  $\ddot{q}_j \equiv 0$  ( $j = 1, \dots, l$ ), а для односторонних связей выполняются условия [7, 8]

$$\ddot{q}_i \geq 0, \quad N_i \geq 0, \quad \ddot{q}_i N_i = 0; \quad i = l+1, \dots, k \quad (1.5)$$

Соотношения (1.5) позволяют сопоставить (после перехода в (1.4) к безразмерной форме) с парой  $\ddot{q}_j, N_i$  единственную переменную по формуле

$$z_i = x_i - y_i, \quad x_i = \ddot{q}_i, \quad y_i = N_i; \quad i = l+1, \dots, k \quad (1.6)$$

причем каждому значению  $z_i$  отвечает единственная пара  $\ddot{q}_j, N_i$ , удовлетворяющая условиям (1.5).

Данные соображения позволяют снизить число неизвестных в системе (1.4) до ее порядка  $n$ . Дальнейшего упрощения системы можно достичь за счет исключения из нее величин  $\ddot{q}_s$  ( $s = k+1, \dots, n$ ) при помощи последних  $n - k$  уравнений. Получаемые в итоге уравнения имеют форму, аналогичную (1.4), но с измененными выражениями для  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{\Theta}$ . Для наглядности сохраним прежние обозначения, считая в (1.4)  $n = k$ .

Уравнения (1.4) задают отображение

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{S}(\mathbf{z}) = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{N} - \mathbf{F}(\mathbf{N}) - \mathbf{\Theta}, \quad z_j = N_j, \quad \ddot{q}_j = 0; \quad j = 1, \dots, l \quad (1.7)$$

причем переменные  $z_{l+1}, \dots, z_k$  определены выражениями (1.6). Обсуждаемая основная задача динамики сведена к обращению отображения (1.7). Последнее будет непрерывным, если все функции  $F_{ij}$  в формулах (1.2) непрерывны по  $N_j$ . Однако из дифференцируемости этих функций не следует в случае  $l < k$  дифференцируемости  $\mathbf{S}$ , поскольку наличие односторонних связей приводит, в силу определений (1.6), к излому при  $z_i = 0$ . Кроме того, двусторонним связям с сухим трением вида (1.3) также соответствуют изломы на поверхностях  $N_j = 0$ .

Таким образом, определяющее отображение (1.7) в общем случае кусочно-гладкое, а в наиболее важном частном случае сухого трения оно кусочно-линейное, с изломами на координатных плоскостях пространства  $R^k$ . Если каждая из  $2^k$  матриц этого отображения невырождена, то число решений основной задачи динамики лежит в пределах от нуля до  $2^k$ , а при наличии вырождения это число может быть бесконечным. Для проверки невырожденности непосредственно в системе (1.4) можно использовать известные результаты [9, 10].

Аналогичный подход применим и в более сложных случаях, когда трение описывается законом, отличным от (1.2). При этом может оказаться необходимым рассматривать отображение (1.7) в пространстве более высокой размерности, чем  $k$ . Например, закон Амонтона описывает сухое трение между телами в момент, когда скорость относительного скольжения равна нулю. В этом случае силы трения зависят не только от нормальных реакций, но и от касательных ускорений. Поэтому для однозначного определения  $\mathbf{Q}$  из системы (1.4) необходимо задать эти ускорения или (в случае равенства их нулю) силы трения. В данной работе такие ситуации обсуждаться не будут.

**2. Критерий существования и единственности решений.** В случае сухого трения (1.3) отображение (1.7) принимает вид

$$\mathbf{S}(\mathbf{z}) = \mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{N} - \Phi|\mathbf{N}| - \Theta, \quad |\mathbf{N}| = (|N_1|, |N_2|, \dots, |N_k|)^T \quad (2.1)$$

где  $\Phi = \|\beta_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|$  – квадратная матрица порядка  $n$ , элементы которой получены из (1.3) в процессе понижения порядка системы (1.4) с  $n$  до  $k$ .

Представим переменные  $z_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) в форме

$$z_j = x_j - y_j, \quad x_j = (|N_j| + N_j)/2, \quad y_j = (|N_j| - N_j)/2; \quad j = 1, \dots, l \quad (2.2)$$

Переменные  $x_j, y_j$  являются, очевидно, дополнительными, т.е. для них выполняются соотношения типа (1.5). Для значений индекса  $j = l + 1, \dots, k$ , соответствующих односторонним связям, эти переменные определяются формулами (1.6).

Выразим в равенстве (2.1) неизвестные  $z_j$  через  $x_j, y_j$  при помощи (2.2). В итоге получим такую линейную алгебраическую систему  $k$  уравнений с  $k$  парами дополнительных переменных:

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{Q} + \Theta, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{B} \in R^k, \quad \mathbf{A}_{1,2} \in R^{k \times k} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x}\mathbf{y} = 0$$

*Предложение 1.* Основная задача динамики о нахождении обобщенных ускорений и реакций связей в системе (1.1) с сухим трением (1.3) при заданных значениях координат и скоростей (скорости проскальзывания в контактах с трением отличны от нуля) имеет при любых приложенных силах единственное решение тогда и только тогда, когда все главные миноры матрицы  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2$  в системе (2.3) положительны.

Доказательство данного критерия для уравнения (2.3) приведено ранее [11], а связь этого уравнения с основной задачей динамики установлена в предыдущем разделе.

На практике вычисление матрицы  $\mathbf{A}^*$  можно свести к выражению переменных  $\mathbf{x}$  через  $\mathbf{y}$  из системы (2.3). Отметим некоторые частные случаи решения этой задачи.

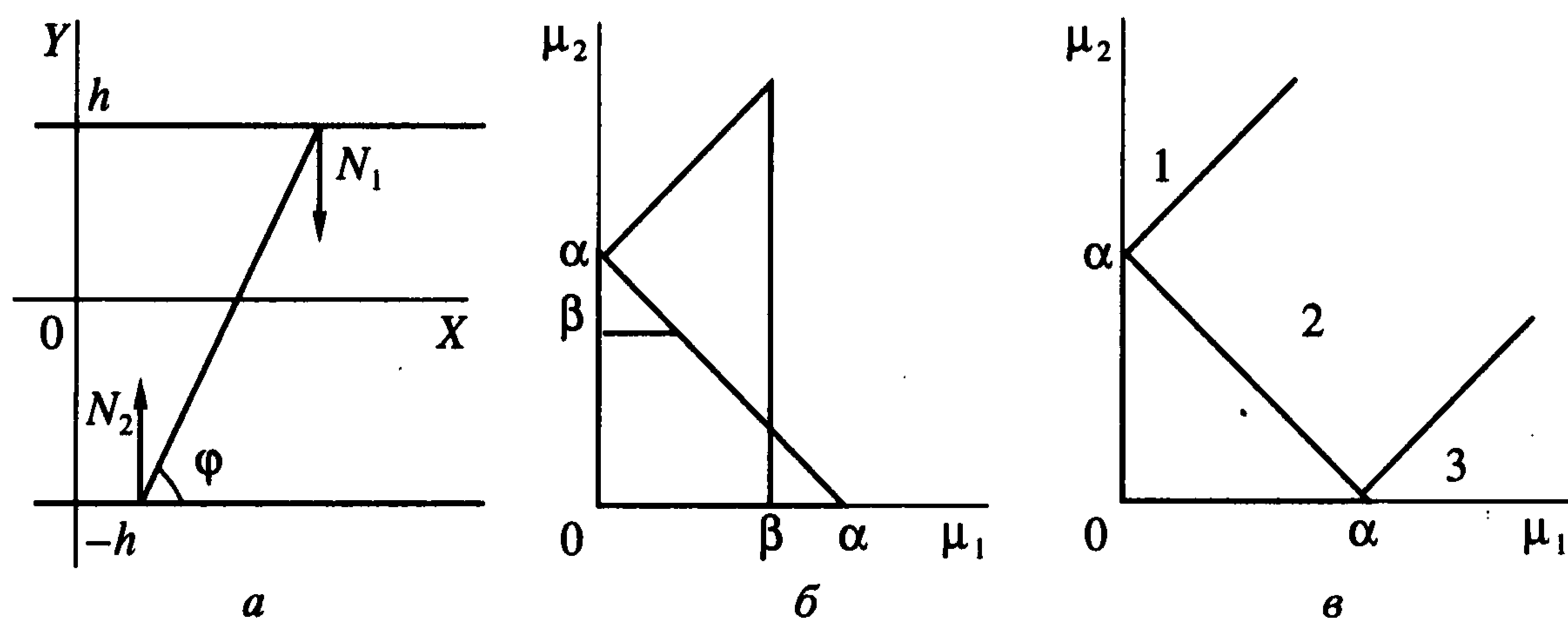
1°. Если  $l = 0$ , т.е. все связи с трением имеют односторонний характер, то

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{E}_2 + \Phi$$

Поскольку  $\mathbf{C}$  симметрична и положительно определена, для проверки условий предложения 1 следует убедиться в положительности всех угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}_2$ .

2°. Если  $l = k = 1$ , т.е. имеется единственная, причем двусторонняя, связь с трением, то критерий принимает вид  $A_1 A_2 > 0$ . Полагая в (2.1)  $\ddot{\mathbf{q}} = 0$ , имеем  $A_{1,2} = -1 \mp \Phi$ , поэтому указанное неравенство означает, что  $|\Phi| < 1$ .

*Пример.* Рассмотрим стержень длины  $2l$ , концы которого скользят по двум параллельным прямым (фиг.1,а). Анализ данной системы был впервые проведен Пэнлеве



Фиг. 1

[1] в предположении, что обе связи двусторонние и неидеальные. В дальнейшем этот пример стал популярной моделью для демонстрации различных идей, связанных с преодолением парадоксов в системах с трением (см. [12–17]).

Здесь также рассмотрим эту задачу, допуская при этом разные варианты контакта, т.е. заменяя одну или обе связи на односторонние (при этом стержень может находиться в промежутке между прямыми).

Допустим, что в данный момент времени стержень скользит вправо. Положим массу стержня равной единице и запишем для него теорему о движении центра масс и теорему моментов

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\mu_1|N_1| - \mu_2|N_2| + X, \quad \ddot{y} = -N_1 + N_2 + Y \\ k^2\ddot{\phi} &= h(\mu_1|N_1| - \mu_2|N_2|) - b(N_1 + N_2) + M, \quad b = l \cos \phi \neq 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $2l$  – длина стержня,  $k$  – его радиус инерции,  $2h$  – расстояние между направляющими,  $x, y, \phi$  – координаты центра масс и угол между стержнем и направляющими,  $X, Y$  и  $M$  – приложенные силы и момент.

Перейдем от  $y, \phi$  к координатам

$$q_1 = h - y - l \sin \phi, \quad q_2 = h + y - l \sin \phi$$

представляющим собой расстояния от концов стержня до направляющих. В рассматриваемый момент времени  $q_1 = q_2 = 0, \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0$ , откуда следует, что  $\dot{y} = 0; \dot{\phi} = 0$ . При учете уравнений (2.4) получим

$$\ddot{q}_i = (-1)^{i+1}(N_1 - N_2 - Y) + \frac{b^2}{k^2}(N_1 + N_2) - \frac{bh}{k^2}(\mu_1|N_1| - \mu_2|N_2|) - \frac{b}{k^2}M, \quad i = 1, 2 \quad (2.5)$$

Рассмотрим различные случаи контактов.

1°. Обе связи двусторонние, т.е.  $q_1 \equiv 0, q_2 \equiv 0$ . Определим переменные  $x_j, y_j$  ( $j = 1, 2$ ) по формулам (2.2), а затем разрешим систему (2.5), где левые части заменены нулями, относительно  $x_j$ . Получим

$$\begin{aligned} x_i &= y_i + \kappa(\mu_1 y_1 - \mu_2 y_2) + \frac{\kappa}{2h}(M + (\mu_2 h + b)Y) \\ x_2 &= y_2 + \kappa(\mu_1 y_1 - \mu_2 y_2) + \frac{\kappa}{2h}(M + (\mu_1 h + b)Y) \\ \kappa &= 2h/(2b + h(\mu_2 - \mu_1)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Матрица, о которой идет речь в предложении 1, выглядит так:

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 + \kappa\mu_1 & -\kappa\mu_2 \\ \kappa\mu_1 & 1 - \kappa\mu_2 \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

Проверка условий предложения 1 сводится к выяснению знаков диагональных элементов матрицы (2.7) и ее определителя  $\Delta$ . В результате несложных расчетов получаем

$$a_{ii}^* = \frac{2b + (-1)^{i+1}h(\mu_1 + \mu_2)}{2b + h(\mu_2 - \mu_1)}, \quad i = 1, 2, \quad \Delta = \det A = \frac{2b + h(\mu_1 - \mu_2)}{2b + h(\mu_2 - \mu_1)} \quad (2.8)$$

Положительность всех трех выражений (2.8) эквивалентна одному неравенству

$$\mu_1 + \mu_2 < 2 \operatorname{ctg} \varphi, \quad \operatorname{ctg} \varphi = b/h \quad (2.9)$$

Заметим, что условие (2.9) сильнее, чем полученное Пэнлеве [1] (в предположении  $\mu_2 > \mu_1$  неравенство)

$$\mu_2 - \mu_1 < 2 \operatorname{ctg} \varphi \quad (2.10)$$

Для объяснения этого несоответствия следует принять во внимание, что Пэнлеве [1] ограничивался случаем  $Y = 0$ . При этом из уравнений (2.4) следует, что  $N_1 = N_2$ , т.е. в формулах (2.6)  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ . Отображение (2.6) сводится к одномерному

$$x = (1 + (\mu_1 - \mu_2)\kappa)y = y\Delta \quad (2.11)$$

В применении к отображению (2.11) условие предложения 1 сводится к неравенству

$$|\mu_2 - \mu_1| < 2 \operatorname{ctg} \varphi$$

что совпадает с результатом Пэнлеве (2.10).

Отметим, что условие отсутствия парадоксов (2.9) остается в силе и в том случае, когда в начальный момент стержень движется влево. Это можно показать, повернув фиг. 1 на  $180^\circ$  с переменной местами коэффициентов  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

2°. Если обе связи односторонние, т.е.  $q_1 \geq 0$ ,  $q_2 \geq 0$ , то  $N_1 \geq 0$ ,  $N_2 \geq 0$ . В этом случае  $|M| = N$ , и дополнительные переменные определяются формулами (1.6). Элементы матрицы  $A^*$  представляют собой коэффициенты при  $N$  в уравнениях (2.5) и выглядят так:

$$k^2 a_{ii}^* = k^2 + b^2 + (-1)^i \mu_i b h, \quad i = 1, 2; \quad k^2 a_{ij}^* = -k^2 + b^2 + \mu_i b h, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2$$

Условия предложения 1 сводятся к неравенствам

$$\mu_1 b h < k^2 + b^2, \quad -\mu_2 b h < k^2 + p^2, \quad \mu_1 - \mu_2 < 2b/h \quad (2.12)$$

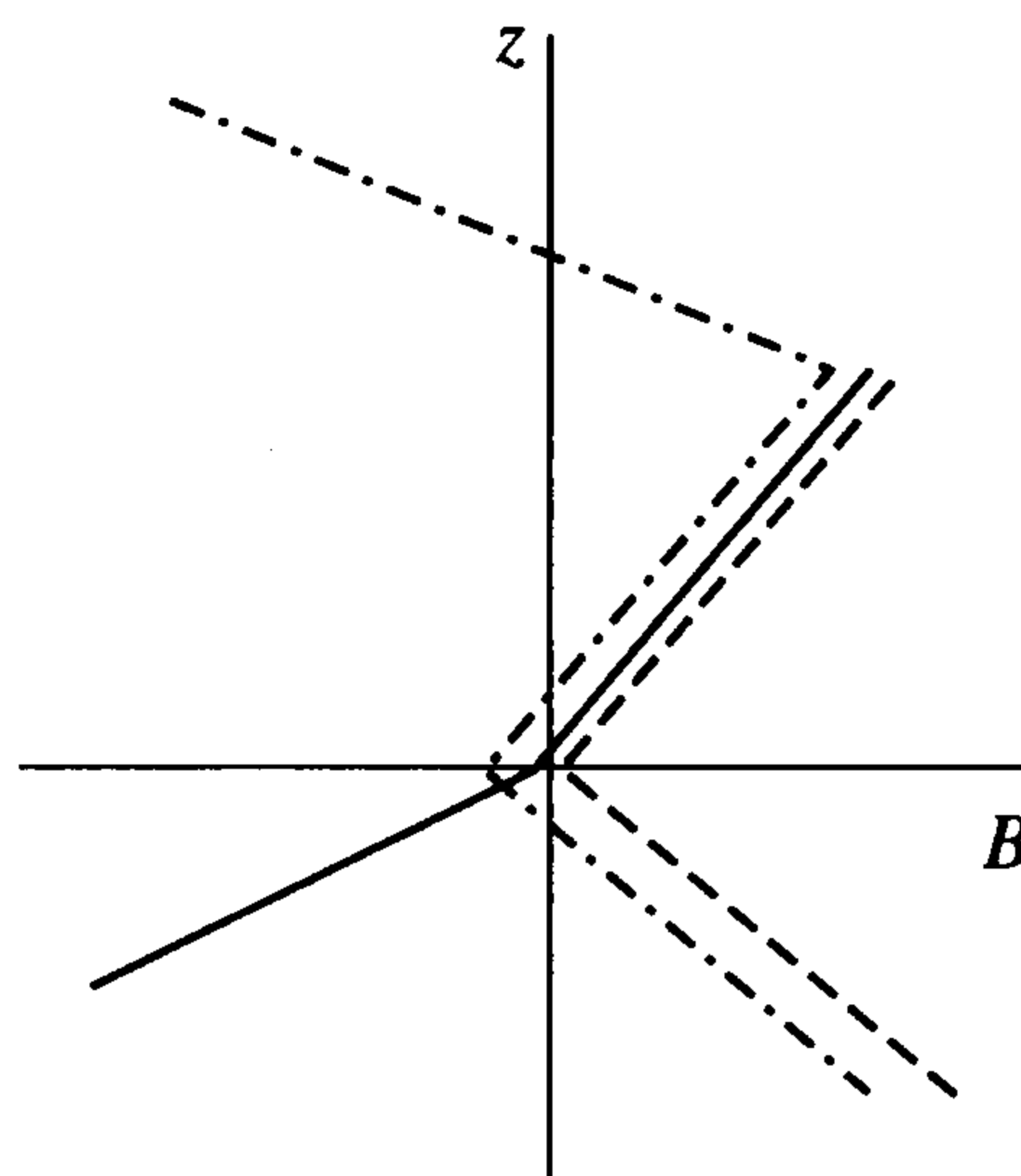
3°. Одна из связей односторонняя, вторая двусторонняя:  $q_1 \geq 0$ ,  $q_2 \equiv 0$ . Положим в системе (2.5)

$$x_1 = \ddot{q}_1, \quad y_1 = N_1, \quad x_2 = (|N_2| + N_2)/2, \quad y_2 = (|N_2| - N_2)/2, \quad Y = 0, \quad M = 0$$

и выразим переменные  $x_1, x_2$  через  $y_1, y_2$ :

$$x_1(k^2 + b^2 + \mu_2 b h) = 2b y_1(2b + h(\mu_2 - \mu_1)) + 4\mu_2 b h y_2$$

$$x_1(k^2 + b^2 + \mu_2 b h) = y_1(k^2 - b^2 + \mu_1 b h) + y_2(k^2 + b^2 - \mu_2 b h)$$



Фиг. 2

Условия предложения 1 принимают вид

$$\mu_2|b|h < k^2b^2(\mu_1 - \mu_2)bh < 2b^2(\mu_1 + \mu_2)bh < 2b^2 \quad (2.13)$$

4°. В случае  $q_1 \equiv 0, q_2 \geq 0$ , противоположном случаю 3°, достаточно заменить в условиях (2.13)  $b$  на  $-b$  и поменять коэффициенты  $\mu_1$  и  $\mu_2$  местами. Условия отсутствия парадоксов выглядят так:

$$\mu_1|b|h < k^2 + b^2(\mu_1 - \mu_2)bh < 2b^2 - (\mu_1 + \mu_2)bh < 2b^2 \quad (2.14)$$

Области (2.9), (2.12), (2.13), (2.14) построены в плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  на фиг. 1, б для случая  $b > k$ . Множество решений неравенства (2.9) представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом  $\alpha = 2b/h$ , а условия (2.12) и (2.14) – одну и ту же прямоугольную трапецию с высотой  $\beta = (k^2 + b^2)/bh$  и основаниями  $\alpha$  и  $\alpha + \beta$ , параллельными оси ординат. Область (2.13) – трапеция с высотой  $\beta$  и основаниями  $\alpha$  и  $\alpha - \beta$ , параллельными оси абсцисс. В случае  $0 < b < k$  первая трапеция содержит в себе треугольник, а область (2.13) совпадает с (2.10).

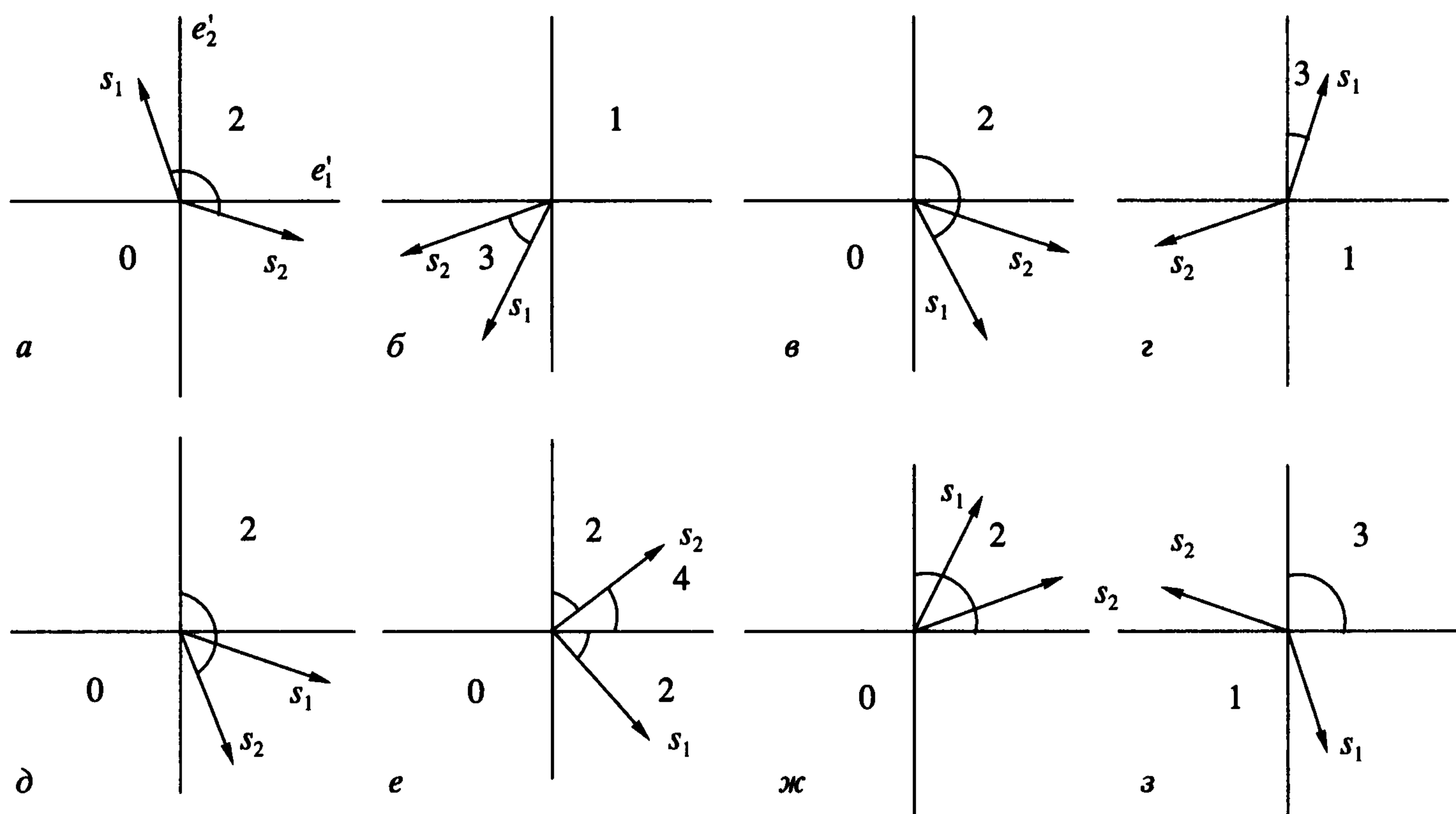
Аналогично можно интерпретировать области отсутствия парадоксов в случае  $b < 0$ , для чего достаточно поменять местами коэффициенты  $\mu_1$  и  $\mu_2$  с одновременным изменением знака  $b$ .

**3. Классификация парадоксов в случае  $k \leq 2$ .** Обсудим типичные парадоксы в механических системах с одной или двумя парами кулонова трения. В простейшем случае  $k = 1$  определяющее отображение (1.7) является кусочно-линейной функцией одной переменной. График состоит из двух лучей, сходящихся в начале координат (фиг. 2). Если коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  в (2.3) имеют одинаковые знаки, то график пересекает ось  $z$ , откуда следует взаимная однозначность определяющего отображения и отсутствие парадоксов (сплошная линия на фиг.2). Если же  $A_1A_2 < 0$ , то лучи лежат по одну сторону от оси  $z$  и в зависимости от знака  $B$  отображение имеет два или ни одного прообраза (штриховая линия на фиг.2). В теории особенностей такую ситуацию называют складкой.

Перейдем к случаю  $k = 2$ . Будем считать все главные миноры матрицы  $A^*$  отличными от нуля, при этом число решений уравнения (2.3) для любой правой части конечно [9]. Условия предложения 1 в случае  $k = 2$  сводятся к следующей совокупности трех неравенств

$$a_{11}^* > 0, \quad a_{22}^* > 0, \quad \Delta = \det A^* > 0 \quad (3.1)$$

Условия (3.1) гарантируют существование единственного решения системы (2.3) для любого вектора  $B$ .



Фиг. 3

Невыполнение хотя бы одного из неравенств (3.1) свидетельствует о парадоксальной ситуации, когда для некоторых  $\mathbf{B}$  решение неединственно или не существует. Умножим обе части равенства (2.3) на матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{S}^*(\mathbf{z}) = \mathbf{B}^*, \quad \mathbf{B}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.2)$$

Для анализа возможных случаев будем строить образы каждой из четвертей координатной  $z$  – плоскости на  $B$  – плоскости под действием отображения, определяемого левой частью формулы (3.2). Поскольку это отображение кусочно-линейно, то образы координатных осей – линии, имеющие излом в начале координат. Обозначим как  $e_{1,2}$  и  $e'_{1,2}$  координатные орты в плоскостях  $z$  и  $B$  соответственно, тогда

$$\mathbf{S}^*(e_1) = e'_1, \quad \mathbf{S}^*(e_2) = e'_2, \quad s_1 = \mathbf{S}^*(-e_1) = -a_{11}^* e'_1 - a_{21}^* e'_2$$

$$s_2 = \mathbf{S}^*(-e_2) = -a_{12}^* e'_1 - a_{22}^* e'_2$$

Следовательно,  $\mathbf{S}^*(L_1) = L'_1$  (через  $L_j$  и  $L'_j$  обозначены  $j$ -е четверти координатных  $z$  – и  $B$  – плоскостей соответственно), область  $\mathbf{S}^*(L_2)$  ограничена полупрямыми с направляющими векторами  $e'_2$  и  $s_1$ ,  $\mathbf{S}^*(L_4)$  лежит между  $e'_1$  и  $s_2$ , а  $\mathbf{S}^*(L_3)$  – между  $s_1$  и  $s_2$ .

Расположение векторов  $s_1$  и  $s_2$  на  $B$  – плоскости зависит от элементов матрицы  $\mathbf{A}^*$  и, в свою очередь, определяет характер особенности отображения  $\mathbf{S}^*$ . В регулярном случае (3.1) векторы  $s_1$  и  $s_2$  лежат вне первой четверти и образуют правую систему, поэтому множества  $\mathbf{S}^*(L_j)$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) попарно не пересекаются, а их объединение составляет всю плоскость  $B$ .

На фиг. 3 изображены возможные особенности отображения  $\mathbf{S}^*$ .

Случай а

$$a_{11}^* > 0, \quad a_{22}^* > 0, \quad \Delta < 0, \quad a_{12}^* < 0$$

(следовательно,  $a_{21}^* < 0$ ). Здесь  $s_1 \in L'_2$ ,  $s_2 \in L'_4$ , причем система этих двух векторов имеет левую ориентацию (фиг. 3, а). Каждая точка, лежащая внутри тупого угла

между полупрямыми с направляющими векторами  $s_1$  и  $s_2$  имеет два прообраза, а вне этого угла – ни одного. В теории особенностей подобная ситуация называется складкой; в данном контексте линия складки ломаная.

*Случай б*

$$a_{11}^* > 0, \quad a_{22}^* > 0, \quad \Delta < 0, \quad a_{12}^* > 0$$

(следовательно,  $a_{21}^* > 0$ ). Здесь  $s_1 \in L_3'$ ,  $s_2 \in L_3'$ , и система этих двух векторов по-прежнему имеет левую ориентацию (фиг. 3, б). Точки, лежащие внутри угла, образованного этими векторами, имеют три прообраза, а вне его – один прообраз. Подобная ситуация называется сборкой.

*Случай в*

$$a_{11}^* < 0, \quad a_{22}^* > 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{12}^* < 0 \tag{3.3}$$

(следовательно,  $a_{21}^* > 0$ ). Здесь имеем  $s_1 \in L_4'$ ,  $s_2 \in L_4'$  (ориентация правая, фиг. 3, в). Точки, лежащие внутри угла, образованного векторами  $s_1$  и  $e_2'$ , имеют два прообраза, вне этого угла – ни одного (складка).

*Случай г*

$$a_{11}^* < 0, \quad a_{22}^* > 0, \quad \Delta > 0, \quad a_{12}^* > 0 \tag{3.4}$$

(следовательно,  $a_{21}^* < 0$ ). Здесь  $s_1 \in L_1'$ ,  $s_2 \in L_3'$  (ориентация правая, фиг. 3, г). Точки, лежащие внутри угла, образованного векторами  $s_1$  и  $e_2'$ , имеют три прообраза, вне этого угла – один (сборка).

*Случай д*

$$a_{11}^* < 0, \quad a_{22}^* > 0, \quad \Delta < 0$$

Вектор  $s_1$  лежит в правой полуплоскости, а  $s_2$  – в нижней (ориентация левая, на фиг. 3, д показан подслучай  $a_{21}^* > 0$ , если  $a_{21}^* < 0$ , то  $s_1 \in L_1'$ ). Точки, лежащие внутри угла, образованного векторами  $s_1$  и  $e_2'$  (угол откладывается в положительном направлении от первого вектора ко второму и может быть больше развернутого), имеют два прообраза, вне этого угла – ни одного (складка).

*Случай е*

$$a_{11}^* < 0, \quad a_{22}^* < 0, \quad \Delta > 0$$

Тогда вектор  $s_1$  лежит в правой полуплоскости, а  $s_2$  – в верхней (ориентация правая, на фиг. 3, е показан один из четырех возможных подслучаев  $a_{21}^* > 0$ ,  $a_{12}^* < 0$ ). Точки плоскости  $B$  могут иметь в этом случае четыре, два или ни одного прообраза, что характеризует двойную складку (вид этой особенности можно представить, складывая лист бумаги вчетверо так, чтобы линия второй складки не была перпендикулярна линии первой складки).

*Случай ж*

$$a_{11}^* < 0, \quad a_{22}^* < 0, \quad \Delta < 0, \quad a_{12}^* > 0$$

(следовательно,  $a_{21}^* < 0$ ), то  $s_{1,2} \in L_1'$  (ориентация левая, фиг. 3, ж). Точки, лежащие в первой четверти, имеют два прообраза, остальные точки – ни одного (складка).

## Случай з

$$a_{11}^* < 0, \quad a_{22}^* < 0, \quad \Delta < 0, \quad a_{12}^* > 0$$

(следовательно,  $a_{21}^* > 0$ ). Имеем  $s_1 \in L_4'$ ,  $s_2 \in L_2'$  (ориентация левая, фиг. 4, з). Точки, лежащие в первой четверти, имеют три прообраза, а остальные точки плоскости – один прообраз (сборка).

*Замечание 1.* Случаи в, г, д характеризуются выполнением неравенства  $a_{11}^* a_{22}^* < 0$ . При этом выше предполагалось, что  $a_{11}^* < 0$ , но сделанные выводы о качественном типе особенности остаются справедливыми и для  $a_{22}^* < 0$ , если в неравенствах (3.3), (3.4) заменить  $a_{12}^*$  на  $a_{21}^*$ . В справедливости этого замечания можно убедиться, поменяв нумерацию переменных  $q_1$  и  $q_2$ .

*Замечание 2.* Вопрос о разрешении парадоксальных ситуаций лежит за рамками исходной постановки задачи и требует привлечения дополнительных физических соображений (см. например [12–17]). Заметим, однако, что перечисленные выше особенности нельзя устранить путем коррекции кулоновых законов трения: наличие излома характеристики обеспечивает сохранение типа особенности (фиг. 2, 3) в начале координат. Более того, “скорректированный” закон трения может привести к появлению дополнительных особенностей. Например, рассматривался случай [17], когда коэффициент трения убывает при возрастании нормальной нагрузки. Соответствующая бифуркационная диаграмма схематично представлена на фиг. 2 штрих-пунктирной линией: здесь имеется уже две складки. В результате устраняется парадокс несуществования решений, однако неединственность остается (причем в некотором интервале значений  $V$  число решений возрастает до трех).

*Пример.* Обсудим характер возможных парадоксов в примере Пэнлеве – Клейна, рассматривавшемся в предыдущем разделе. Ограничимся классической постановкой данной проблемы, считая обе связи двусторонними. Как следует из равенств (2.8), соотношение  $a_{11}^* a_{22}^* < 0$  эквивалентно условию (2.9), где знак неравенства изменен на противоположный. Кроме того, неравенство  $\Delta < 0$  эквивалентно условию (2.10), где обе части взяты по абсолютной величине. Таким образом, на плоскости параметров  $(\mu_1, \mu_2)$  имеются три области, в которых нарушены условия (3.1) существования единственного решения (фиг. 1, в). При этом области 1 и 3 соответствуют особенности типа “складка” (случай д), а область 2 – “сборке” (случай з).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00520).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Painlevé P. Leçons sur le Frottement. Paris: Hermann, 1895 = Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. Lötstedt P. Coulomb friction in two-dimensional rigid body systems // ZAMM. 1981. В. 61. Н. 12. S. 605–615.
3. Lötstedt P. Mechanical systems of rigid bodies subject to unilateral constraints // SIAM J. Appl. Math. 1982. V. 42. № 2. P. 281–296.
4. Матросов В.М., Финогенко И.А. О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С.3–13.
5. Pang J.-S., Trinkle J.C. Complementary formulations and existence of solutions of dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction // Math.Programming. 1996. V. 73. № 2. P. 199–226.
6. Trinkle J.C., Pang J.-S., Sudarsky S., Lo G. On dynamic multi-rigid-body contact problems with Coulomb friction // ZAMM. 1997. В. 77. Н. 4. S. 267–279.
7. Сулов Г.К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат. 1946. 655 с.
8. Pfeiffer F., Glocker Ch. Multibody dynamics with unilateral contacts. N.Y. et al.: Wiley, 1996. 317 p.

9. *Murty K.G.* On the number of solutions to the complementarity problem and spanning properties of complementary cones. // *Linear Algebra Appl.* 1972. V. 5. № 1. P.65–108.
10. *Пожарицкий Г.К.* Исчезающие скольжения механических систем с сухим трением // *ПММ.* 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 558–563.
11. *Samelson H., Thrall R.M., Wesler O.* A partition theorem for Euclidean n-space // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1958. V. 9. № 5. P. 805–807.
12. *Клейн Ф.* К критике Пэнлеве кулоновых законов трения // *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. С. 249–256.
13. *Пфейфер Ф.* К вопросу о так называемых кулоновых законах трения. *Пэнлеве П.* Лекции о трении // М.: Гостехиздат, 1954. С. 264–316.
14. *Ле Суан Ань.* Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 520–529.
15. *Фуфаев Н.А.* Динамика системы в примере Пэнлеве – Клейна. О парадоксах Пэнлеве // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1991. № 4. С. 48–53.
16. *Неймарк Ю.И.* Еще раз о парадоксах Пэнлеве // *Изв. РАН. МТТ.* 1995. № 1. С. 17–21.
17. *Григорян С.С.* Разрешение парадокса сухого трения – парадокса Пэнлеве // *Докл. РАН.* 2001. Т. 379. № 1. С. 54–58.

Москва  
e-mail: apivanov@orc.ru

Поступила в редакцию  
3.I.2002