

УДК 62-50

© 2003 г. Г. В. Наумов

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Рассматривается двумерная задача оптимального управления с нефиксированным временем окончания процесса и интегральным функционалом, зависящим от параметра. На управляющий параметр наложены несимметричные ограничения. Исследуются два случая: ограничения одинакового знака и ограничения разных знаков. В случае ограничений разных знаков при выполнении определенных соотношений между параметрами задачи имеет место режим с учащающимися переключениями, сменяющийся режимом с двумя переключениями и особой дугой первого порядка при нарушении этих соотношений. В случае знакоопределенного управления область управляемости – часть плоскости, ограниченная двумя полупараболами. Здесь оказываются возможными три режима, два из которых соответствуют выходу на границу области управляемости и движению по ней, а третий – режим с особой дугой первого порядка. При изменении параметров задачи фазовый портрет претерпевает эволюцию и один из этих трех режимов сменяется другим. Обоснование оптимальности упомянутых режимов дается с помощью метода динамического программирования.

Режимы с учащающимися переключениями (чаттеринг-режимы [1]) характеризуются тем, что управляющий параметр за конечное время претерпевает счетное число переключений, причем моменты переключений сгущаются к некоторой точке. Впервые явление чаттеринга было обнаружено [2] при исследовании проблемы погашения шумов в электронных устройствах. Данная проблема была сведена к задаче минимизации функционала, имеющего смысл интегрального квадратичного отклонения и обладающего определенной симметрией [2, 3].

Подобная симметрия в некоторых случаях может отсутствовать. За период, прошедший с появления классической задачи Фуллера, были рассмотрены такие ее модификации, как задача Маршалла и трехмерная задача Фуллера. В частности в задаче Маршалла на управляющий параметр наложены несимметричные ограничения. В рассматриваемом здесь случае асимметрия содержится также и в функционале, имеющем смысл интегрального квадратичного отклонения, взятого с некоторым весом. Принципиально новый факт в задаче с несимметричным функционалом – появление особых режимов первого порядка.

1. Постановка задачи. Управляемая система задается уравнениями движения, ограничениями, начальными и терминальными условиями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad a \leq u \leq b \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0, \quad x(T) = 0, \quad y(T) = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь T – нефиксированный момент окончания процесса, u – скалярный управляющий параметр, a и b – его предельные значения.

На движениях системы (1.1) рассматривается функционал

$$J[u] = \int_0^T x^2(t)[Lu(t) + 1]dt \quad (1.2)$$

где L – вещественный параметр, на который накладываются следующие ограничения в зависимости от знаков a и b :

$$ab < 0: -1/b \leq L \leq -1/a; \quad a > 0: L \geq -1/b; \quad b < 0: L \leq -1/a$$

Функционал (1.2) при $L = 0$ имеет смысл среднеквадратичного отклонения. При $L \neq 0$ функционал имеет смысл среднеквадратичного отклонения, взятого с некоторым весом $h(u)$, линейным по u .

Допустимыми управлениями считаются интегрируемые на любом интервале $[0, \delta]$ функции $u(t)$, удовлетворяющие ограничениям (1.1). Рассматривается задача минимизации функционала (1.2) в классе допустимых управлений и соответствующих движений системы (1.1). Ограничения (1.3) на параметр L обеспечивают неотрицательную определенность функционала.

При $L = 0$ в (1.2) и $b = -a = 1$ в (1.1) имеем задачу Фуллера, исследованную ранее [2, 3]. Задача с $L \neq 0$ и $b = -a = 1$ также была исследована [4] и было показано, что в этом случае кривая переключения становится несимметричной относительно начала координат. Ниже будет показано, в частности, что несимметрия ограничений на управление влечет за собой асимметрию кривой переключения уже при $L = 0$.

2. Принцип максимума. Предварительный анализ задачи будет проводиться на основе принципа максимума. Будем полагать, что сопряженные переменные p, q взяты с обратным знаком, что позволит сохранить систему обозначений, принятую в методе динамического программирования. Итак, $p = -\phi, q = -\psi$, где ϕ, ψ – сопряженные переменные принципа максимума.

Гамильтониан и его экстремальные значения имеют вид

$$H(x, y, p, q) = py + qu + x^2(Lu + 1)$$

$$\min_u H = \min[F^a, F^b] = py + x^2 + (q + Lx^2)u^* \quad (2.1)$$

$$F^c = py + x^2 + c(q + Lx^2), \quad u^* = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \text{sign}(q + Lx^2)$$

Здесь и всюду далее $c = a, b$; операция максимизации заменена на операцию минимизации вследствие изменения знака переменных p, q ; u^* – оптимальное управление.

Из выражений (2.1) видно, что управление является релейным, и таким образом, решение задачи характеризуется кривой переключения (КП), разделяющей области N^a, N^b , в которых управление принимает значения $u = a, u = b$, соответственно.

На ветвях кривой переключения должно быть выполнено равенство

$$q + Lx^2 = 0 \quad (2.2)$$

При этом необходимо, чтобы выражение $q + Lx^2$ не обращалось тождественно по времени в нуль ни на каком подынтервале (t_1, t_2) интервала $(0, T)$. В противном случае, как показано ниже, имеет место режим с особой дугой первого порядка.

На особом участке тождественно по времени выполнены два равенства: (2.2) и

$$py + x^2 = 0 \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) следует из (2.2) и обращения в нуль гамильтониана на оптимальной траектории: $H(t) = H(x(t), y(t), u(t)) \equiv 0$.

Дифференцируя равенство (2.2) вдоль решений гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_p = y, \quad \dot{y} = H_q = u, \quad \dot{p} = -H_x = -2x(Lu + 1), \quad \dot{q} = -H_y = -p \quad (2.4)$$

получим

$$-p + 2xyL = 0 \quad (2.5)$$

Вместе с равенством (2.3) это приводит к следующему уравнению (параболы) для особой дуги:

$$x = -2Ly^2 \quad (2.6)$$

Дифференцируя по времени равенство (2.5) в силу системы (2.4) и используя уравнение (2.6), приходим к равенству, из которого определяется особое управление

$$u^s = -\frac{1}{4}L \quad (2.7)$$

Из этого равенства следует, что особой дугой является часть параболы (2.6), на которой выполнено соотношение $Ly > 0$, так как другая часть данной параболы “уводит” от нуля.

Используя гамильтониан (2.1) и особое управление (2.7), можно показать, что условие Келли [5] выполнено на особой дуге (2.6)

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -8L^2 y^2 \leq 0$$

Изменение знака равенства здесь вызвано изменением знака сопряженных переменных.

3. Метод динамического программирования. Обозначим через $V(x, y)$ функцию оптимального результата (функцию Беллмана) задачи (1.1), (1.2), т.е. минимальное значение функционала (1.2) на траекториях системы (1.1), начинающихся в точке (x, y) . Функция $V(x, y)$ во всех внутренних точках области управляемости удовлетворяет уравнению

$$yV_x + x^2 + (V_y + Lx^2)u^* = 0, \quad u^* = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \text{sign}(V_y + Lx^2) \quad (3.1)$$

В областях N^a, N^b функция Беллмана удовлетворяет уравнениям

$$F^a(x, y, V_x, V_y) = 0, \quad (x, y) \in N^a, \quad V_y + Lx^2 > 0, \quad u^* = a \quad (3.2)$$

$$F^b(x, y, V_x, V_y) = 0, \quad (x, y) \in N^b, \quad V_y + Lx^2 < 0, \quad u^* = b \quad (3.3)$$

Здесь

$$F^c(x, y, V_x, V_y) = yV_x + cV_y + cLx^2 + x^2$$

Обозначим через $V^c(x, y)$ сужение функции Беллмана на области N^c

$$V^c(x, y) = V(x, y), \quad (x, y) \in N^c \quad (3.4)$$

Таким образом, функция $V^a(x, y)$ (функция $V^b(x, y)$) удовлетворяет уравнению (3.2) (уравнению (3.3)).

Для уравнений (3.1)–(3.3) необходимы граничные условия. Терминальные условия в (1.1) задают следующее значение функции Беллмана в начале координат:

$$V(0, 0) = 0 \quad (3.5)$$

Это равенство и будет рассматриваться в качестве граничного условия к уравнениям (3.1)–(3.3). Вообще говоря, граничные условия должны быть заданы не в одной точке, а на некоторой линии. Однако некоторые свойства функции Беллмана позволяют получить единственное решение, для которого условие (3.5) будет выполнено автоматически.

Решение задачи (3.1)–(3.5) будем искать в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Свойства функции Беллмана, о которых говорилось выше, имеют инвариантно-групповой характер. Легко проверить, что уравнения движения и ограничения (1.1) инвариантны относительно группы преобразований

$$\bar{x} = \mu^2 x, \quad \bar{y} = \mu y, \quad \bar{t} = \mu t, \quad \bar{u} = u, \quad \mu > 0 \quad (3.6)$$

где μ – скалярный параметр. Смысл указанной инвариантности состоит в следующем: если $((x(t), y(t), u(t)))$ – решение системы (1.1) с начальной точкой (x^0, y^0) , то тройка $(\mu^2 x(t/\mu), \mu y(t/\mu), u(t/\mu))$ – решение той же системы с начальной точкой $(\mu^2 x^0, \mu y^0)$. При этом в функционале (1.2) возникает множитель μ^5 , т.е. имеет место соотношение

$$V(\mu^2 x, \mu y) = \mu^5 V(x, y) \quad (3.7)$$

Дифференцируя равенство (3.7) по параметру μ и полагая затем $\mu = 1$, получим следующее уравнение, которому должна удовлетворять функция Беллмана:

$$2xV_x + yV_y - 5V = 0 \quad (3.8)$$

Общее решение уравнения (3.8) представимо в виде

$$V(x, y) = y^5 \varphi(xy^{-2}) \quad (3.9)$$

Ветви функции $\varphi(z)$, соответствующие ветвям $V^c(x, y)$ функции Беллмана, согласно соотношению (3.9), обозначим через φ^c :

$$V^c(x, y) = y^5 \varphi^c(xy^{-2}), \quad (x, y) \in N^c \quad (3.10)$$

Подставив выражения (3.10) в уравнения (2.2), (2.3), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для функций φ^c ($z = xy^{-2}$)

$$\varphi'(z)(1 - 2cz) + 5c\varphi(z) + z^2(1 + cL) = 0 \quad (3.11)$$

Общие решения уравнений (3.11) имеют вид

$$\varphi^c(z) = A_c \left| z - \frac{1}{2c} \right|^{5/2} - \left(\frac{1}{c} + L \right) \left(z^2 - \frac{2}{3c}z + \frac{2}{15c^2} \right) \quad (3.12)$$

Здесь A_c – постоянные интегрирования. Предполагается, что точки $z = 1/(2c)$ не входят в интервал определения решения $\varphi^c(z)$. Это сингулярные точки уравнений (3.11): в них исчезает коэффициент при старшей производной. Если такая точка – внутренняя точка области определения соответствующего уравнения, то общее решение двухпараметрическое. Например, по разные стороны от точки $z = 1/(2a)$ нужно использовать разные постоянные A_a , скажем, A_a и A_a^* . При этом две ветви, соответствующие двум указанным постоянным, гладко сопрягаются в точке $z = 1/(2a)$, пред-

ставляя непрерывно-дифференцируемую функцию. Эта ситуация встречается ниже, при рассмотрении задачи с ограничениями различного знака.

Используя соотношения (3.10), (3.12), получаем следующие выражения для значений V^c функции V в областях N^c :

$$V(x, y) = V^c(x, y) = A_c \left| \frac{1}{2c} y^2 - x \right|^{5/2} - \left(\frac{1}{c} + L \right) \left(x^2 y - \frac{2}{3c} x y^3 + \frac{2}{15c^2} y^5 \right), \quad (x, y) \in N^c \quad (3.13)$$

Здесь, вообще говоря, для каждой из подобластей $y > 0$, $y < 0$ области N^c должна использоваться своя постоянная A_c . Однако требования непрерывности функции $V^c(x, y)$ при $y = 0$ приводит к общему значению этой постоянной.

Таким образом, построение гладкой функции $V(x, y)$ сводится к нахождению постоянных A_c .

Случай, когда знаки параметров a , b разные и одинаковые знак, ниже рассматриваются отдельно. Это связано уже с тем, что в случае, когда $ab < 0$, область управляемости (область, из точек которой, используя допустимые управления, систему можно привести в начало координат) совпадает со всей плоскостью (x, y) , а при $ab > 0$ область управляемости, как будет показано далее, представляет собой часть плоскости (x, y) , ограниченную двумя полупараболами.

4. Ограничения разного знака. Рассмотрим случай, когда ограничения на управление имеют разные знаки, т.е. рассмотрим задачу минимизации семейства функционалов (1.2) на движениях системы (1.1) при следующих соотношениях между параметрами:

$$a \cdot b < 0, \quad -1/b \leq L \leq -1/a \quad (4.1)$$

Вследствие ограничений (1.1) на управление, режим с особой дугой (2.6) в данном случае возникает только при следующих значениях параметра L :

$$L \in (-1/b, -1/(4b)) \cup (-1/(4a), -1/a) \quad (4.2)$$

Режим, соответствующий значениям параметра L из интервала $(-1/(4b), -1/(4a))$, будем называть основным, в отличие от особого, соответствующего значениям (4.2) параметра L .

Относительно основного режима справедливы следующие утверждения.

1° КП задачи (1.1), (1.2), (4.1) состоит из двух полупарабол (фиг. 1): $x = e_a y^2$, $y > 0$, $e_a \in (1/(2b), 0)$ и $x = e_b y^2$, $y < 0$, $e_b \in (0, 1/(2b))$.

2° Вращаясь вокруг начала координат, оптимальная траектория достигает его за конечное время и пересекает при этом КП счетное число раз. Промежутки времени между последовательными переключениями с $u = a$ на $u = b$ (или с $u = b$ на $u = a$) образуют геометрическую прогрессию.

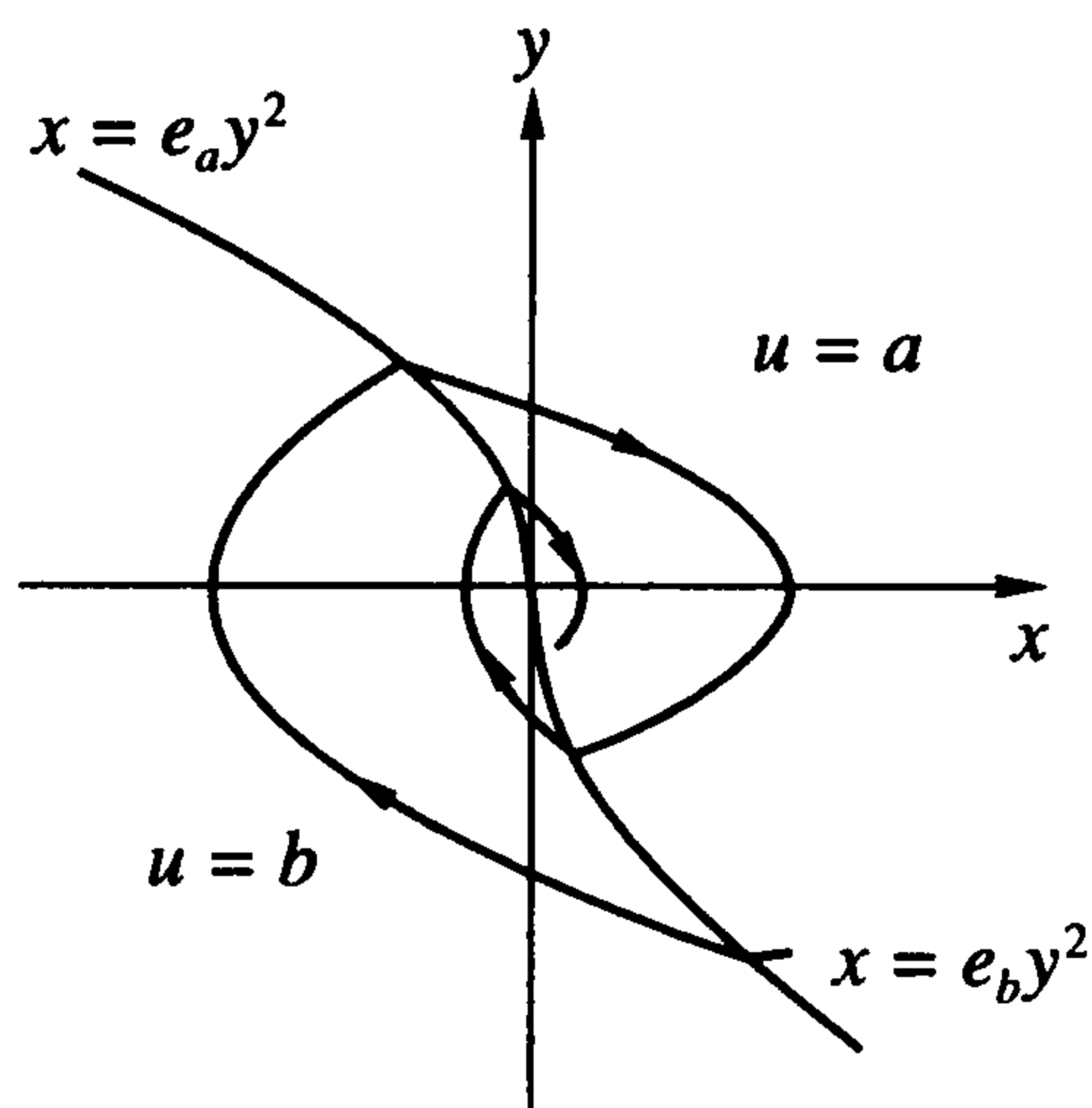
3° Оптимальное управление равно a справа от КП и b слева от нее.

Доказательство. Из инвариантности задачи относительно группы (3.6) следует, что КП состоит из набора парабол.

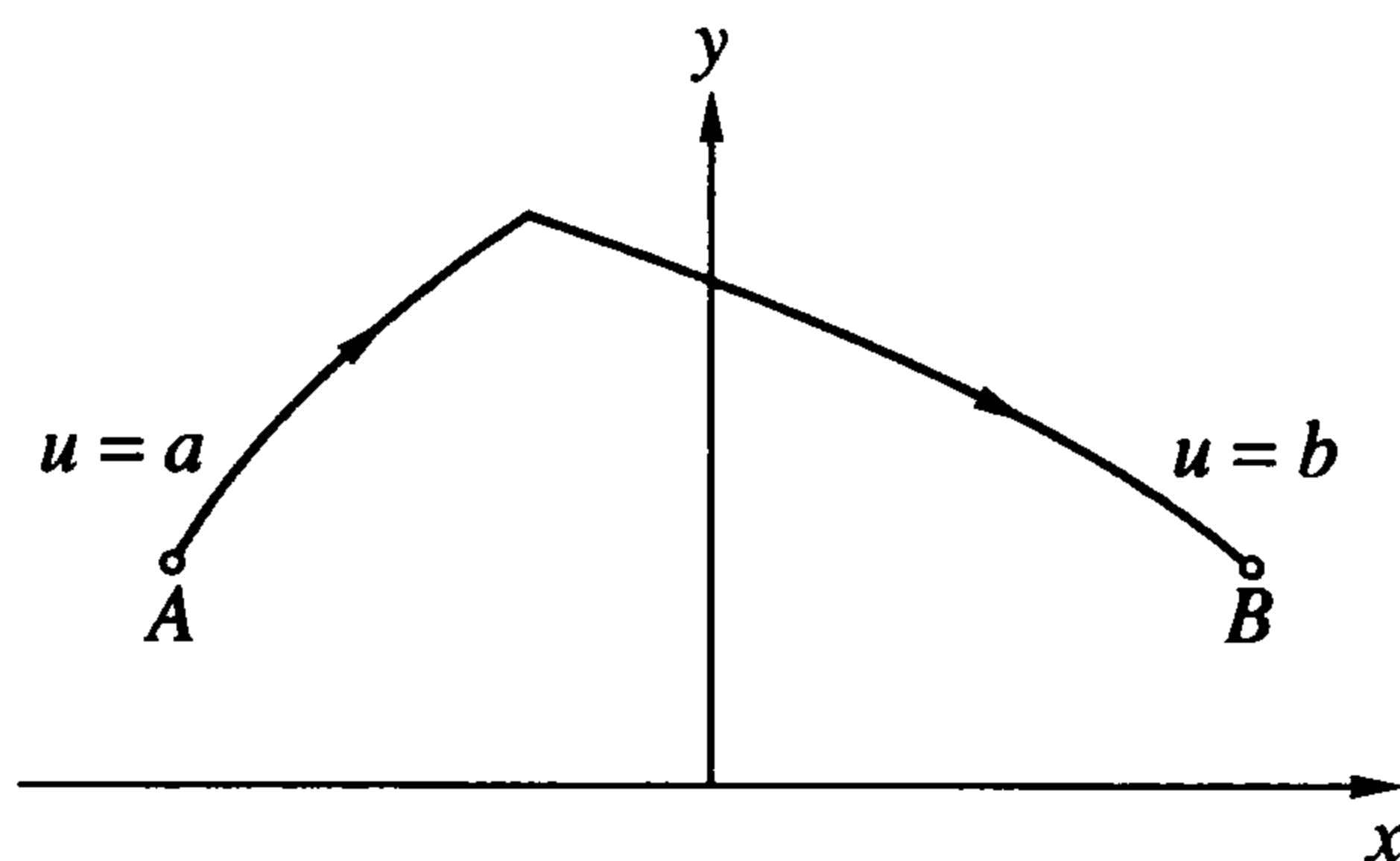
Пусть $L = 0$ и $(x(t), y(t))$ – допустимое решение системы (1.1) с управлением $u(t)$, таким, что $y(t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$. Тогда функция $x(t)$ монотонна и кривая $(x(t), y(t))$ может быть задана как $y = y(x)$. Следовательно, функционал (1.2) можно переписать в виде

$$J = \int_{t_1}^{t_2} x^2 dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} x^2 \frac{dx}{y} \quad (4.3)$$

Чем больше $y = y(x)$, тем меньше интеграл в правой части равенства (4.3). Пусть $A = (x(t_1), y(t_1))$, $B = (x(t_2), y(t_2))$ – две граничные точки. Существует траектория с един-



Фиг. 1



Фиг. 2

ственным переключением (с $u = b$ на $u = a$), которая лежит выше кривых, соответствующим любым другим допустимым решениям, проходящим через точки A и B в верхней полуплоскости (фиг. 2). Таким образом, если $(x(t), y(t))$ – оптимальная траектория, то либо нет переключений, либо есть одно: с b на a при $t \in (t_1, t_2)$. Аналогичные рассуждения показывают, что при $y(t) < 0$ ($t \in (t_1, t_2)$) либо нет переключений, либо есть одно: с a на b .

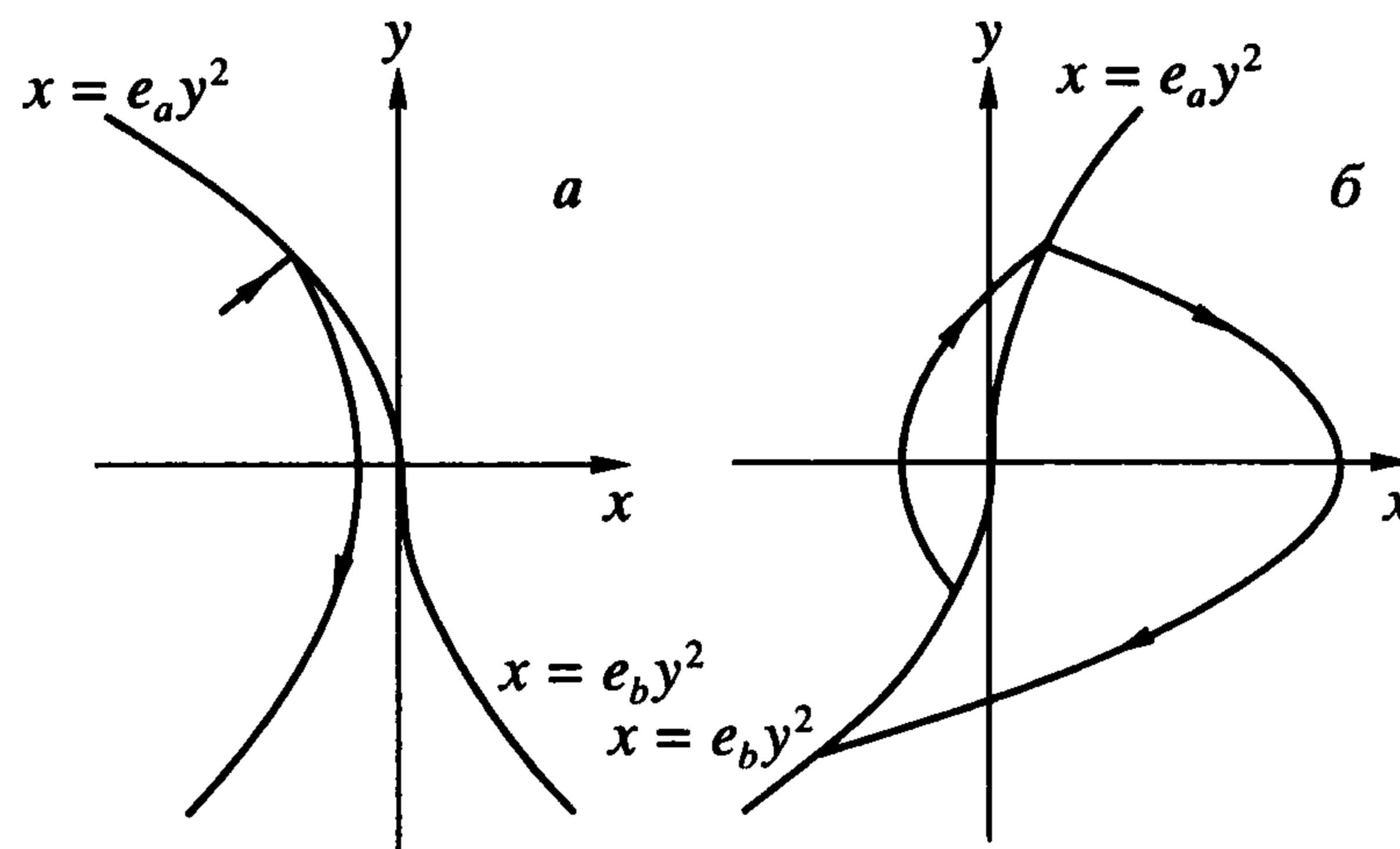
Пусть $L \neq 0$. Предположим, что в верхней полуплоскости расположена одна из ветвей КП. На ней должны выполняться соотношения (2.2), (2.3). Если система находится на этой ветви КП, необходимо включить управление $u = a$ или $u = b$ и продолжать движение с данным управлением до тех пор, пока соотношение (2.2) не окажется выполненным вновь. Проинтегрировав систему (2.4) с начальными условиями $(y(0))$ без ограничения общности можно положить равным единице)

$$y(0) = 1, \quad x(0) = hy^2(0), \quad p(0) = -x^2(0)/y(0), \quad q(0) = -Lx^2(0)$$

получаем, что выражение $q(t) + Lx^2(t)$ является многочленом четвертой степени относительно переменной t

$$f(t) = q(t) + Lx^2(t) = -\frac{1}{6}Lu^2t^4 - \frac{2}{3}Lut^3 + \frac{1}{12}ut^4 + \frac{1}{3}t^3 + ht^2 + h^2t - 2Lh^2 - Lt^2 - 2Lht$$

Исследование многочлена $f(t)$ для разных наборов (u, L, h) , проведенное с помощью системы MAPLE, показало, что в случае отрицательных u у данного многочлена нет действительных неотрицательных корней, не превосходящих $1/u$; при $u > 0$ многочлен $f(t)$ не имеет действительных неотрицательных корней (при этом соответствующий режим уводит систему на бесконечность). Таким образом, в верхней полуплоскости имеется не более одной ветви КП, причем $u = a < 0$ справа от нее.



Фиг. 3

Аналогичные рассуждения показывают, что в нижней полуплоскости имеется не более одной ветви КП, причем $u = b > 0$ слева от нее.

Из существования у задачи (1.1), (1.2), (4.1) следующей симметрии

$$L \rightarrow -L, \quad a \rightarrow -b, \quad b \rightarrow -a: V(x, y) \rightarrow V(-x, -y), \quad e_a \rightarrow -e_b, \quad e_b \rightarrow -e_a \quad (4.4)$$

вытекает, что полупараболы, составляющие КП, расположены в квадрантах, симметричных относительно начала координат.

Из соотношения $\dot{x} = y$ следует, что движение происходит по часовой стрелке. Если выполнено соотношение $e_a < 1/(2a)$ (соотношение $e_b > 1/(2b)$), то траектория, стартующая на верхней (нижней) части КП больше не пересекает кривую переключения (фиг. 3, а). Если один из коэффициентов e_c равен нулю, то из соотношений симметрии (4.4) следует, что второй коэффициент также равен нулю и имеет место движение по замкнутой траектории. Следовательно, $1/(2a) \leq e < 0$, $0 < g \leq 1/(2b)$. Если $e = 1/(2a)$, то верхняя часть КП является траекторией системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = u$ с $u = a$. Как следует из соотношений (2.1), в каждой точке данной траектории значение выражения $q + Lx^2$ меняет знак, а значит, на ней самой выполнено соотношение $q + Lx^2 = 0$, которое должно выполняться тождественно по времени при движении вдоль этой траектории. Таким образом, движение вдоль параболы $x = y^2/(2a)$ удовлетворяет принципу максимума только в случае, когда эта парабола является особой дугой. Следовательно в основном режиме $e_a > 1/(2a)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $e_b < 1/(2b)$.

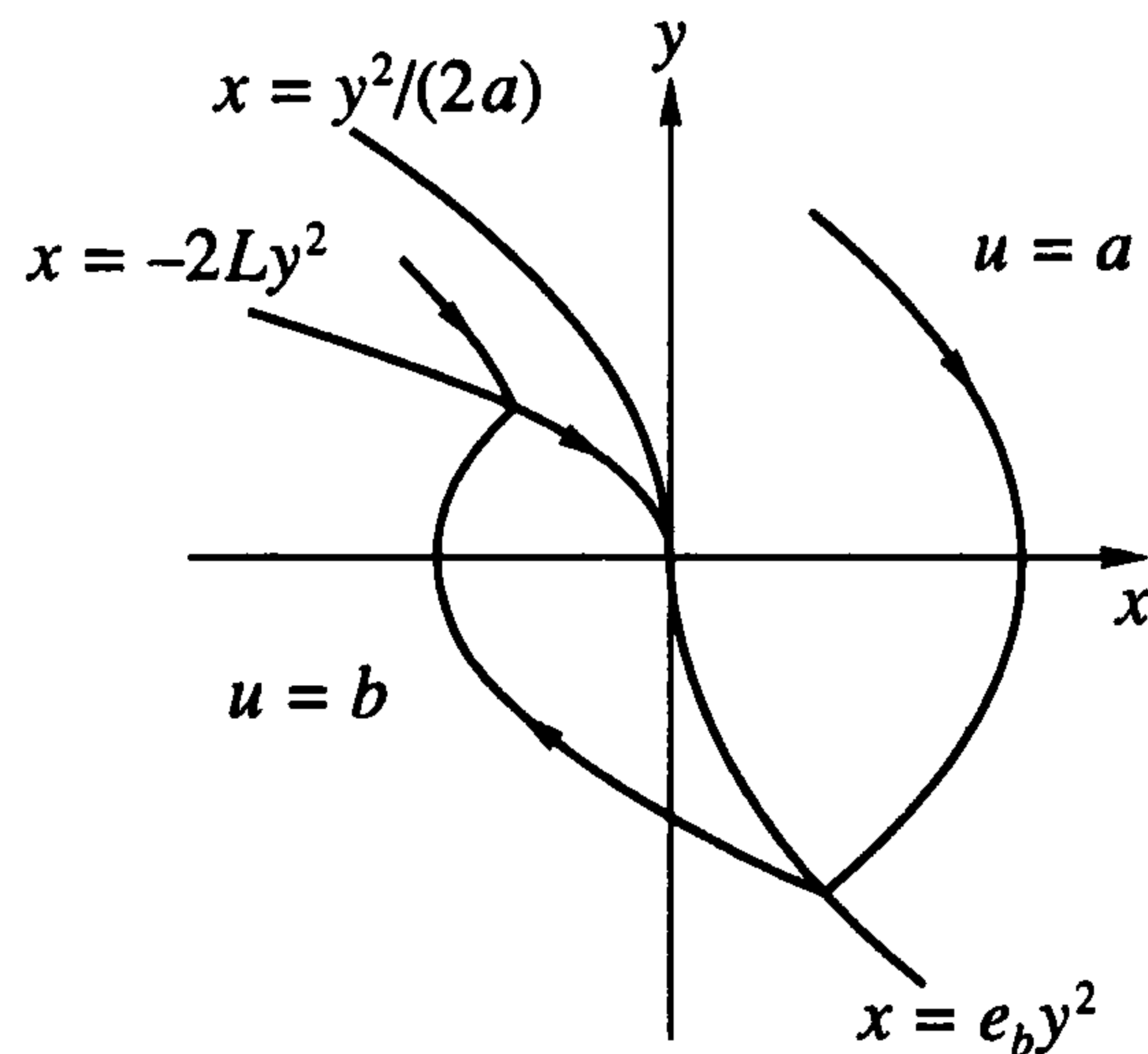
Если КП расположена в первой и третьей четвертях, то соответствующая траектория уводит от нуля (фиг. 3, б). Таким образом, полупараболы, составляющие КП, расположены во втором и четвертом квадрантах. Тем самым, доказаны утверждения 1°, 3°.

Пусть $C_1(e_a y_1^2, y_1)$, $C_2(e_b y_2^2, y_2)$, $C_3(e_a y_3^2, y_3)$, $C_4(e_a y_4^2, y_4)$ – точки последовательных переключений управления. Тогда в силу условий (1.1) имеем

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + at_1, & e_b y_2^2 &= e_a y_1^2 + y_1 t_1 + at_1^2/2 \\ y_3 &= y_2 + bt_2, & e_a y_3^2 &= e_b y_2^2 + y_2 t_2 + bt_2^2/2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь t_1 – время перехода из точки C_1 в точку C_2 , t_2 – время перехода из точки C_2 в точку C_3 . Из соотношений (4.5) получаем равенства

$$\frac{y_2^2}{y_1^2} = g_a, \quad \frac{y_3^2}{y_2^2} = \frac{1}{g_b}; \quad g_c = \left[\frac{e_a - 1/(2c)}{e_b - 1/(2c)} \right]^{1/2} \quad (4.6)$$



Фиг. 4

из которых следует, что

$$y_{n+2}/y_n = g_a/g_b < 1$$

и множество точек переключения оказывается счетным.

Пользуясь равенствами (4.6) получаем отношение:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{ay_3 - y_2}{by_2 - y_1} = -\frac{a1 + 1/g_b}{b1 + 1/g_a} = \alpha \quad (4.7)$$

Аналогично получаем

$$\frac{t_3}{t_2} = -\frac{b1 + g_a}{a1 + g_b} \quad (4.8)$$

Из (4.7), (4.8) следует, что

$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{t_3 t_2}{t_2 t_1} = q < 1, \quad e_a \in \left(\frac{1}{2a}, 0\right), \quad e_b \in \left(0, \frac{1}{2b}\right) \quad (4.9)$$

Соотношение (4.9) – частный случай общего соотношения

$$t_{n+2}/t_n = q < 1 \quad (4.10)$$

Таким образом, время, необходимое для достижения начала координат, равно сумме геометрической прогрессии

$$T = t_1(1 + \alpha)(1 + q + q^2 + \dots) = t_1(1 + \alpha)/(1 - q) \quad (4.11)$$

Тем самым доказано утверждение 2°.

При $L \in (-1/b, -1/(4b)) \cup (-1/(4a), -1/a)$ имеет место режим с двумя переключениями и особой дугой первого порядка. Характер оптимального синтеза для $L \in (-1/(4a), -1/a)$ представлен на фиг. 4.

Обоснование указанных режимов дается с помощью метода динамического программирования. Структура функции Беллмана, зависящей от двух постоянных, получена в разделе 3 (см. (3.13)). Необходимо определить постоянные A_c и коэффициенты e_c полупарабол, составляющих кривую переключения. Тем самым будет дано полное решение задачи. При вычислении A_c , e_c параметры a , b и L считаются заданными. Вообще говоря, объем вычислений может быть уменьшен благодаря соотношениям симметрии (4.4).

В интервале значений $L \in (-1/(4b), -1/(4a))$ рассматривается система четырех уравнений

$$V^a(x, y) = V^b(x, y), \quad V_y^c + Ly^2 = 0 \quad (x = e_c y^2) \quad (4.12)$$

При подстановке значений $x = e_c y^2$ в уравнения (4.12) возникает общий множитель y^4 или y^5 , после сокращения на который получаются следующие равенства в терминах A_c, e_c и a, b, L

$$A_a \left| \frac{1}{2a} - e_c \right|^{5/2} + \omega_c \left(\frac{1}{a} + L \right) \left(e_c^2 - \frac{2}{3a} e_c + \frac{2}{15a^2} \right) = \quad (4.13)$$

$$= A_b \left| \frac{1}{2b} - e_c \right|^{5/2} + \omega_c \left(\frac{1}{b} + L \right) \left(e_c^2 - \frac{2}{3b} e_c + \frac{2}{15b^2} \right)$$

$$\frac{5}{2a} \omega_c A_c \left| \frac{1}{2c} - e \right|^{3/2} \text{sign} \left(\frac{1}{2c} - e \right) - \left(\frac{1}{a} + L \right) \left(e_c^2 - \frac{2}{a} e_c + \frac{2}{3a^2} \right) + L e_c^2 = 0 \quad (4.14)$$

где $\omega_a = -1, \omega_b = 1$.

Эти равенства представляют собой систему трансцендентных уравнений относительно неизвестных A_c, e_c , которая для определенных a, b и L решалась численно с помощью системы MAPLE.

Для значений $L \geq -1/(4a)$ и $L \leq -1/(4b)$, согласно (2.6) имеем $e_c = -2L$. Подставив это значение в уравнение (4.14), получим следующее значение постоянной $A_c = A_c^*$:

$$A_c^* = -\frac{8\sqrt{2}}{15} \omega_c \frac{(3Lc + 1)}{\sqrt{c(4Lc + 1)}} \quad (4.15)$$

При $L \geq -1/(4a)$ функция $A_a^*(x, y)$, равная $V^a(x, y)$ в (3.13) с постоянной (4.15), задает функцию Беллмана в части области N^a , лежащей между полупараболами $x = -2Ly^2$ и $x = y^2/(2a)$. В остальной части области N^a в функцию $V^a(x, y)$ входит постоянная A_a , которая вместе с A_b и e_b отыскивается из системы трех уравнений, включающей (4.13) с $c = b$, (4.14) с $c = b$ и модифицированное уравнение (4.13) с $c = a$, в которое подставлены $A_a = A_a^*$ и $e_a = -2L$. Отметим, что при $L = -1/(4a)$ имеем $e = 1/(2a)$, и для нахождения A_a, A_b и e_b используется система, состоящая из (4.13) с $c = a$, (4.13) с $c = b$ и (4.14) с $c = b$. Надобность в постоянной A_a^* пропадает, так как кривая $x = -2Ly^2$ совпадает с кривой $x = y^2/(2a)$. Соотношение (4.14) с $c = a$ при этом обращается в тождество. Хотя $A_a^* \rightarrow \infty$ при $L \rightarrow -1/(4a) + 0$, величина $V_a^*(x, y)$ стремится к конечному пределу для $x = y^2/(2a)$:

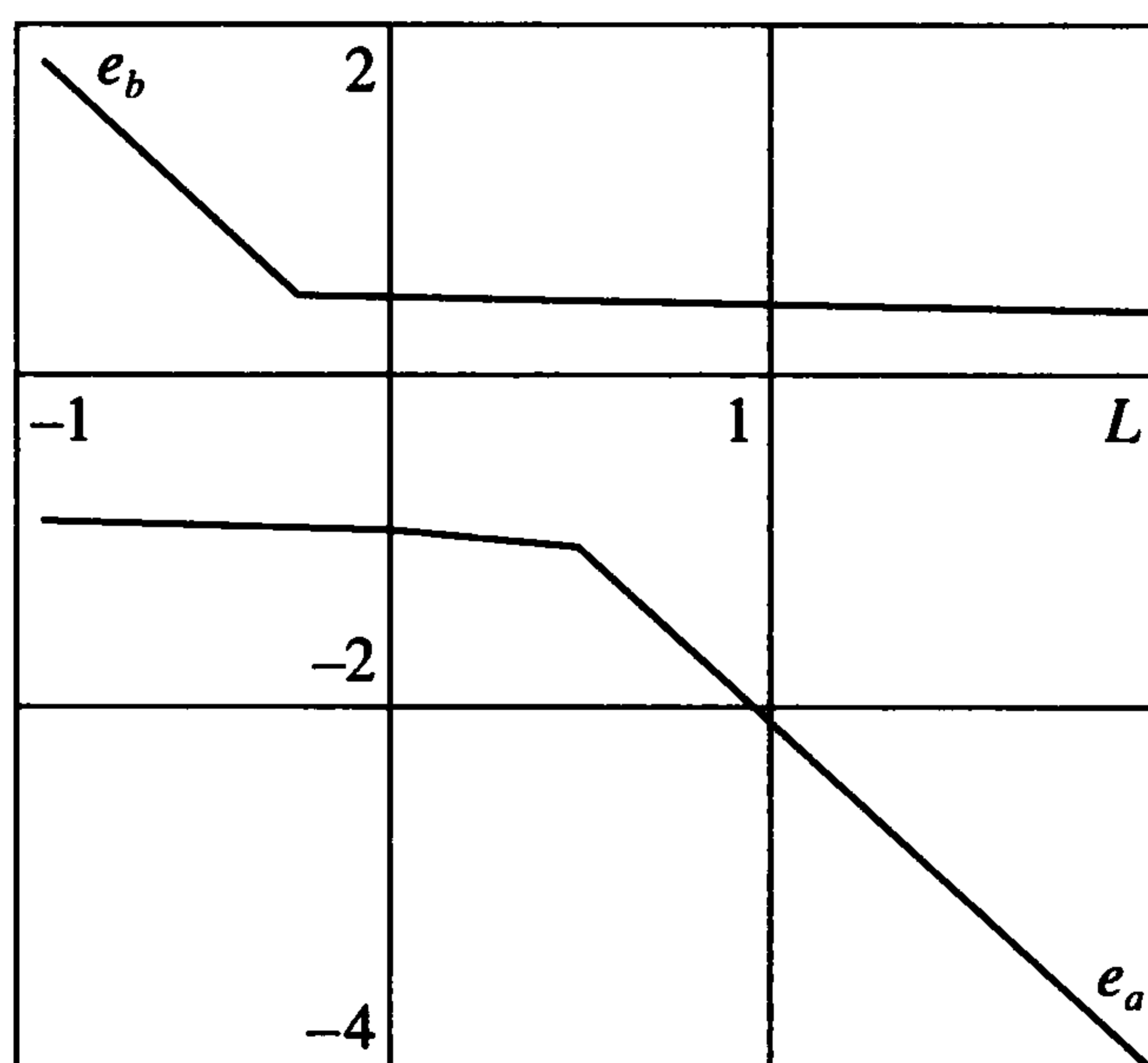
$$V_a^* = -3y^5/(80a^3)$$

Случай $L \leq -1/(4b)$ рассматривается аналогично.

Результаты расчетов для значений $a = -1/2, b = 1$ представлены ниже

L	-1.0	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1.0	2.0
A	1.53960	1.31993	1.17206	1.06959	0.96668	0.81200	0.55378	0.03657
A^*	-	-	-	-	-	-	0.53333	1.23168
B	0.17893	0.48594	0.66907	0.79046	0.91098	1.08866	1.34924	1.75991
B^*	0.87093	0.37712	-	-	-	-	-	-
e_a	-0.82684	-0.84953	-0.86990	-0.88897	-0.91610	-1.00000	-2.00000	-4.00000
e_b	2.00000	1.00000	0.48047	0.44510	0.42799	0.41342	0.40000	0.38632

и показаны на фиг. 5.



Фиг. 5

5. Ограничения одного знака. Рассмотрим теперь задачу минимизации семейства функционалов (1.2) на движениях системы (1.1) в случае, когда интервал допустимых значений управляющего параметра не содержит начала координат:

$$ab > 0; \quad a > 0: \quad L \geq -1/b; \quad b < 0: \quad L \leq -1/a \quad (5.1)$$

В данном случае область управляемости (область начальных значений, из которой систему можно привести на терминальное многообразие, используя допустимые управления), не совпадает со всей плоскостью (x, y) : систему можно привести в начало координат, стартуя из точки (x^0, y^0) , только при выполнении соотношения

$$y^0 / (2b) \leq x^0 \leq y^0 / (2a); \quad a > 0: \quad y^0 < 0; \quad b < 0: \quad y^0 > 0 \quad (5.2)$$

Область управляемости для случая $a > 0$ ограничена верхней ($x = y^2 / (2a)$) и нижней ($x = y^2 / (2b)$) полупараболами (штриховые линии на фиг.6).

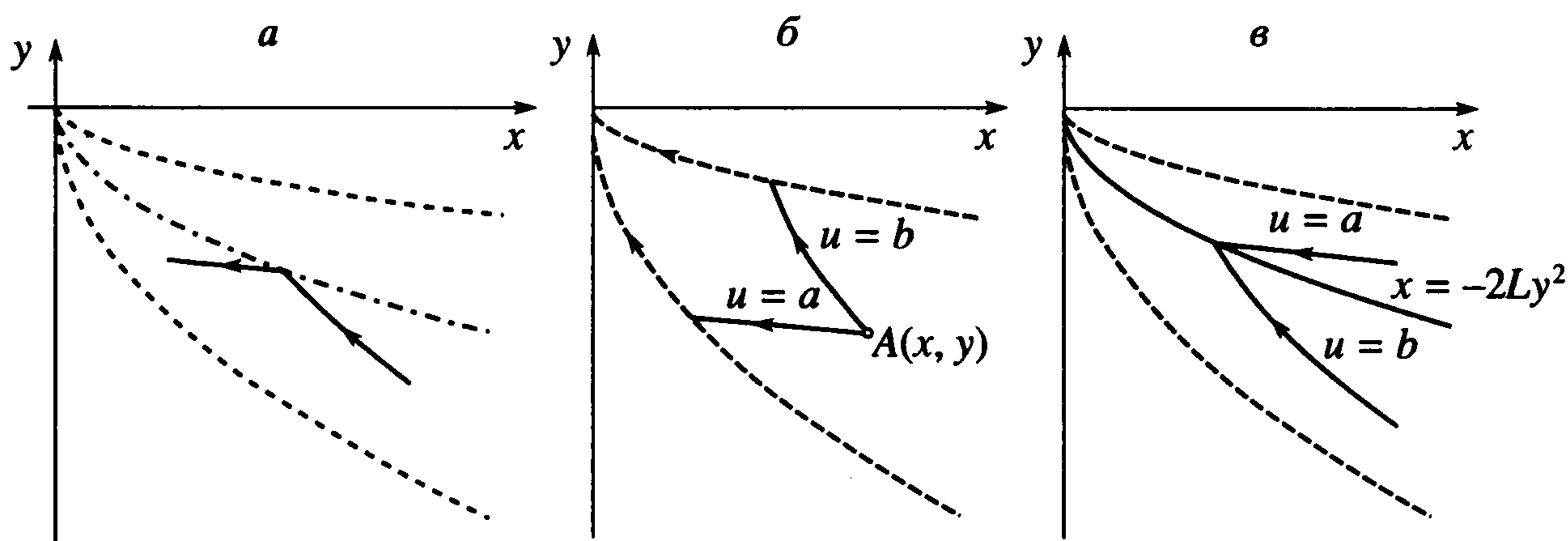
Далее везде будем полагать, что ограничения на управление имеют положительный знак. Случай, когда интервал допустимых значений управления целиком лежит на отрицательной полуоси, рассматривается аналогично. Если система оказывается за пределами области управляемости, то никакой режим, использующий допустимые управления, не позволяет привести ее в начало координат. Заметим, что когда система оказывается на границе области управляемости, скажем верхней (нижней) полупараболе, единственным режимом управления, не выводящим за пределы области управляемости, оказывается движение вдоль данной полупараболы с управлением $u = a$ (управлением $u = b$). Данный режим обеспечивает приведение системы в начало координат. Все прочие режимы выводят ее за пределы области управляемости.

В соответствии со сказанным в разделе 2 имеем следующие значения управления, удовлетворяющие принципу максимума:

$$u = \begin{cases} a & \text{при } q + Lx^2 > 0 \\ b & \text{при } q + Lx^2 < 0 \\ -1/(4L) & \text{при } q + Lx^2 \equiv 0, \quad t \in (t_1, t_2) \end{cases} \quad (5.3)$$

Последнее значение соответствует движению по особой дуге (2.6). Вследствие ограничений на управление соответствующий режим имеет место только при выполнении соотношения

$$-1/(4a) \leq L \leq -1/(4b) \quad (5.4)$$



Фиг. 6

Ограничения (5.4) имеют простую геометрическую интерпретацию: как только соотношение между параметрами задачи становится таким, что полупарабола $x = -2Ly^2$, $y < 0$ оказывается внутри области управляемости, имеет место режим с особой дугой первого порядка.

Отметим, что помимо особой дуги внутри области управляемости не существует КП. Действительно, предположим обратное, и внутри области управляемости существует КП, на которой происходит изменение значения управления с $u = a$ ($u = b$) на $u = b$ ($u = a$). Такая КП должна разделять две области с положительными и отрицательными значениями $q + Lx^2$. Пусть в области, в которой $q + Lx^2 > 0$, было начато движение с управлением $u = a$ (см. формулу (5.3)). При достижении КП и изменении значения управления на $u = b$, система продолжает движение в той же области, в которой оно было начато (см. фиг. 6, а, где КП показана штрих-пунктиром), и значит, значение управления меняться не должно. Полученное противоречие доказывает тот факт, что единственно возможной КП является особая дуга (на особой дуге управление меняет значение с $u = a$ или $u = b$ на $u = -1/(4L)$).

Таким образом, при $L \in (-1/b, -1/(4b)) \cup (-1/(4a), \infty)$ возможными оказываются два режима, использующие экстремальные значения управления (см. фиг. 6, б): движение с управлением $u = a$ (управлением $u = b$) вплоть до нижней (верхней) границы области управляемости $x = y^2/(2b)$ ($x = y^2/(2a)$) и затем движение по границе с управлением $u = b$ (с управлением $u = a$).

Вопрос об оптимальности указанных режимов решается при помощи функции Беллмана. Для любой точки $A(x, y)$ на границе области управляемости значение функции Беллмана в ней может быть найдено путем прямого интегрирования функционала (1.2) вдоль соответствующего участка границы (поскольку любой сход с границы означает выход за пределы области управляемости). Проинтегрировав (1.2) вдоль полупарабол $x = y^2/(2a)$, $y < 0$ и $x = y^2/(2b)$, $y < 0$, получаем следующие значения функции Беллмана на нижней (индекс минус) и верхней (индекс плюс) границах

$$V^-(y) = V\left(\frac{1}{2b}y^2, y\right) = -\frac{1}{20} \frac{Lb+1}{b^3} y^5, \quad V^+(y) = V\left(\frac{1}{2a}y^2, y\right) = -\frac{1}{20} \frac{La+1}{a^3} y^5 \quad (5.5)$$

Используя первое (второе) из соотношений (5.5) можно определить значение постоянной A_a (постоянной A_b) в выражении (3.13). Имеем

$$A_a = -\frac{1}{15} \frac{\sqrt{2}(La+1)(8b^2-12ab)+3a^2\sqrt{2}}{(b-a)\sqrt{ab(b-a)}} \quad (5.6)$$

$$A_b = \frac{1}{15} \frac{\sqrt{2}(Lb+1)(8a^2-12ab)+3b^2\sqrt{2}}{(b-a)\sqrt{ab(b-a)}}$$

Для установления характера синтеза были исследованы знаки выражений

$$W^c = V_y^c + Lx^2 \quad (5.7)$$

На параболах вида $x = ry^2$, $y < 0$ выражения (5.7) можно представить как функции переменных y и r

$$W^c = \alpha_c(r)y^4 \quad (5.8)$$

Таким образом, для исследования знаков выражений (5.7) достаточно исследовать знаки функций $\alpha_c(r)$, $r \in (1/(2b), 1/(2a))$.

Исследования показали, что при $L < -1/(4a)$ (при $L > -1/(4b)$) области значений функций $\alpha_c(r)$ целиком лежат на отрицательной (положительной) полуоси действительной оси. Отсюда следует, что значения выражения (5.7) отрицательны (положительны) во всех внутренних точках области управляемости, откуда, учитывая соотношение (5.3), получаем, что при $L < -1/(4a)$ (при $L > -1/(4b)$) оптимальный режим управления состоит в следующем: стартовать из любой точки $A(x, y)$ области управляемости необходимо с управлением $u = b$ (необходимо с управлением $u = a$) и, достигнув верхней (нижней) границы области управляемости, прийти по ней в начало координат, используя управление $u = a$ (управление $u = b$). На фиг. 6, б этому режиму соответствует верхняя (нижняя) траектория.

В интервале значений L (5.4) области значений функций $\alpha_c(t)$ включают нуль и наряду с интервалами значений r , в которых они имеют одинаковые знаки, существуют интервалы, в точках которых функции $\alpha_c(r)$ имеют различные знаки. Данное обстоятельство заставляет предположить, что при условии (5.4) оптимальный режим включает участок движения вдоль особой дуги (2.6) (см. 6, в). Значения постоянных A_c в формуле (3.13) определяются по значениям функции Беллмана на особой дуге. Значения функции Беллмана в точках особой дуги определяется путем прямого интегрирования функционала (1.2) вдоль особой дуги (2.6)

$$V^s(y) = V(-2Ly^2, y) = \frac{12}{5}L^3y^5 \quad (5.9)$$

На особой дуге должны быть выполнены равенства

$$V^c(-2Ly^2, y) = \frac{12}{5}L^3y^5 \quad (5.10)$$

Из (3.13), (5.10) получаем

$$A_c = -\frac{8}{15} \sqrt{\frac{2}{|c|}} \frac{(3Lc + 1)}{\sqrt{|1 + 4Lc|}} \quad (5.11)$$

Исследования показали, что в области над особой дугой (см. 6, в) выполнены соотношения

$$V_y^b + Lx^2 < 0, \quad x > -2Ly^2; \quad V_y^b + Lx^2 = 0, \quad x = -2Ly^2 \quad (5.12)$$

В области под особой дугой выполнены соотношения

$$V_y^a + Lx^2 > 0, \quad x < -2Ly^2; \quad V_y^a + Lx^2 = 0, \quad x = -2Ly^2 \quad (5.13)$$

Из соотношений (5.3), (5.12) и (5.13) следует оптимальность синтеза, изображенного на фиг. 6, в.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00376).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zelikin M.I., Borisov V.F.* Theory of Chattering Control: With Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. Boston: Birkhauser, 1994. 242 p.
2. *Fuller A.T.* Study of an optimum non-linear control system // J. Electronics and Control. 1963. V. 15. № 1. P. 63–71.
3. *Wonham W.M.* Note on a problem in optimal non-linear control // J. Electronics and Control. 1963. V. 15. № 1. P. 59–62.
4. *Алдакимов Ю.В., Меликян А.А., Наумов Г.В.* Перестройка режима в однопараметрическом семействе задач оптимального управления // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 400–407.
5. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.

Москва
e-mail: torbrand@pochtamt.ru

Поступила в редакцию
15.X.2002