ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 67. Вып. 2, 2003

УДК 62-50

© 2003 г. С. А. Брыкалов

ДВЕ ЗАДАЧИ ОБ УКЛОНЕНИИ НА ПЛОСКОСТИ С РАЗДЕЛЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ И НЕВЫПУКЛЫМИ ТЕРМИНАЛЬНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Рассматриваются две дифференциальные игры сближения – уклонения с точки зрения уклоняющегося игрока. Фазовое пространство – плоскость, причем каждый из двух игроков может управлять движением точки лишь по своей координате. Терминальные множества не выпуклы; в первой из задач это дуга окружности, а во второй – объединение двух отрезков. В обеих играх нельзя обеспечить уклонение посредством программных управлений, но можно – с помощью управления по обратной связи. Однако непрерывные по фазовому вектору стратегии имеют в этих задачах разные свойства. В первой из них они не позволяют гарантировать уклонение (что типично и для линейно-выпуклого случая), а во второй – позволяют (что не может выполняться в линейно-выпуклых играх с фиксированным моментом окончания). Проверка невозможности обеспечить уклонение с помощью таких стратегий сводится здесь к доказательству разрешимости некоторой начальной задачи для дифференциального уравнения с опережением, к которой применяется принцип Шаудера.

В теории позиционных дифференциальных игр [1–4] известно, что во многих задачах невозможно гарантировать уклонение с помощью непрерывных [5] и каратеодориевых [6] стратегий. Этот вопрос подробно исследован ([5, 6], [1], § 55, [2], § 3, [3], §§ 5, 6, 22, 23) в предположении линейности динамики и выпуклости терминального множества. Изучались также [7] свойства непрерывных по фазовому вектору стратегий без этого предположения.

Приводимые ниже примеры показывают существенное отличие случая невыпуклого терминального множества от линейно-выпуклого случая. При построении этих примеров удается обойтись достаточно простой математической техникой.

1. Уклонение от дуги. Пусть движение точки $x = (x_1, x_2)$ на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = v, \quad \dot{x}_2 = 2(1-t)u, \quad t \in [0, 1] \tag{1.1}$$

Здесь u, v – управления двух игроков, которые выбираются в отрезке [0, 1]. Используем классические движения. Функция x: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ должна быть абсолютно-непрерывной и удовлетворять дифференциальным уравнениям почти всюду. Начальное положение точки считаем нулевым:

$$x(0) = 0 \tag{1.2}$$

Терминальное множество (ТМ) M задано на плоскости x_1, x_2 соотношениями $x^2 = 1$, $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ($x^2 = x_1^2 + x_2^2$). Таким образом, M – четверть окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Функция $u(t)$ предполагается измеримой по Лебегу. Требуется так выбирать управление v, чтобы в конечный момент времени гарантировать уклонение от ТМ, т.е. чтобы выполнялось условие $x(1) \notin M$ при любой допустимой помехе $u(t)$.

Прежде чем рассматривать непрерывные по фазовой переменной стратегии, убедимся в невырожденности задачи. Для этого нужно проверить, что программные управления $v = v(t)$ не позволяют гарантировать уклонение от ТМ, и указать обеспечивающий уклонение разрывный способ формирования v.

Покажем сначала, что программные управления $v = v(t)$ не гарантируют уклонения, даже если u выбирается постоянной.

Свойство 1.1. Для всякой измеримой функции v: $[0, 1] \to [0, 1]$ найдется постоянная $u \in [0, 1]$, такая, что соответствующее решение x начальной задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет условию $x(1) \in M$.

Доказательство. Обозначим

$$\langle v \rangle = \int_0^1 v(\tau)d\tau$$

и положим $u \equiv \sqrt{1 - \langle v \rangle^2}$. Тогда $u \in [0, 1]$, и для решения задачи (1.1), (1.2) имеем $x_1(1) = \langle v \rangle$, $x_2(1) = u$. Таким образом, $x^2(1) = 1, x_1(1) \ge 0, x_2(1) \ge 0$ и следовательно, $x(1) \in M$.

Приведем теперь способ управления по обратной связи, который гарантирует уклонение. Построим простой способ, не заботясь о его оптимальности в каком-либо смысле.

Свойство 1.2. При $0 \le t < 1/2$ положим $v = 1$. Для $1/2 \le t \le 1$ возьмем

$$v = \begin{cases} 1, & \text{если } x_2(1/2) \ge 12/25 \\ 0, & \text{если } x_2(1/2) < 12/25 \end{cases}$$

Тогда для любой измеримой функции u: $[0, 1] \to [0, 1]$ соответствующее решение начальной задачи (1.1), (1.2) удовлетворяет неравенству

$$|1 - |x(1)|| > 1/10 \tag{1.3}$$

где норма – евклидова.

Фактически будет установлено, что указанный способ управления дает удаление от ТМ, несколько большее 1/10.

Доказательство. Если $x_2(1/2) \ge 12/25$, то $v = 1$ при всех $t \in [0, 1]$, и поэтому $x_1(1) = 1$. Из неотрицательности u получаем $x_2(1) \ge x_2(1/2) \ge 12/25$. Таким образом, $|x(1)|\sqrt{769/25} > 11/10$, и неравенство (1.3) выполняется с некоторым запасом. Если же $x_2(1/2) < 12/25$, то $v = 1$ при $t \in [0, 1/2)$ и $v = 0$ при $t \in [1/2,1]$. Следовательно, $x_1(1) = 1/2$. Далее

$$x_2(1) = x_2(1/2) + 2\int_{1/2}^{1}(1-\tau)u(\tau)d\tau < 12/25 + 2\int_{1/2}^{1}(1-\tau)d\tau = 73/100$$

Поэтому $|x(1)| < \sqrt{7829}/100 < 9/10$. Неравенство (1.3) снова выполняется с запасом.

Замечание 1.1. Приведенный в формулировке свойства 1.2 простой способ уклонения заведомо не оптимальный. Например, путем оптимизации постоянной 12/25 удается немного улучшить гарантированный результат.

Замечание 1.2. Закон управления, гарантирующий уклонение в изучаемой задаче, может быть реализован и в виде позиционной стратегии в соответствии с известной формализацией [1] при использовании пошаговых схем с измельчающимися сетками на временно́м отрезке. В самом деле, приведенный в формулировке свойства 1.2 закон управления совместим с любой позиционной стратегией игрока u, чем исключается осуществимость гарантированного наведения на ТМ. Стало быть, по теореме об альтернативе ([1], § 17) существует позиционная стратегия игрока v, гарантирующая уклонение в конструктивных движениях. Данный вывод подобен приведенному ранее ([2], с. 23, [1], с. 243).

Покажем теперь, что в рассматриваемой задаче нельзя гарантировать уклонение от ТМ с помощью стратегий $v = v(t, x_1, x_2)$, удовлетворяющих условиям Каратеодори, т.е. таких, что функция $v(t, x_1, x_2)$ непрерывна по x_1, x_2 при почти всяком фиксированном t и измерима в смысле Лебега по t при всяких фиксированных x_1, x_2. Для таких стратегий абсолютно-непрерывное решение начальной задачи (1.1), (1.2) может быть неединственным. Считаем, что стратегия гарантирует уклонение, если ни одно из движений, соответствующих этой стратегии и различным допустимым помехам, не оканчивается на ТМ.

Невозможность гарантировать уклонение в изучаемой задаче с помощью удовлетворяющих условиям Каратеодори стратегий легко вывести из ранее полученного автором результата ([7], следствие 1). В качестве целевого множества в пространстве траекторий берем здесь совокупность всех непрерывных функций, заканчивающихся на ТМ. Непосредственно видно, что все условия этого следствия выполняются, причем ацикличность соответствующих пересечений вытекает из их выпуклости, а их непустота – из установленного выше свойства 1.1. Такой способ доказательства опирается в конечном счете на теорему Эйленберга–Монтгомери [8].

Однако учитывая специфику задачи, дадим прямое доказательство, основанное на принципе Шаудера ([9], с. 616) и не использующее результатов алгебраической топологии. При этом способе доказательства удается для рассматриваемого примера установить более сильное утверждение: каратеодориева стратегия не может гарантировать уклонение, даже если помеха u выбирается не зависящей от времени t. Таким образом, получаем следующее свойство, которое является аналогом свойства 1.1, относящегося к более простому случаю программных управлений.

Свойство 1.3. Пусть функция v: $[0, 1] \times \mathbf{R}^2 \to [0, 1]$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда найдется такая постоянная $u \in [0, 1]$, что начальная задача (1.1), (1.2), где $v = v(t, x_1, x_2)$, имеет хотя бы одно решение x, для которого $x(1) \in M$.

Доказательство. Нужно установить существование абсолютно-непрерывной функции x: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ и числа $u \in [0, 1]$, таких, что

$$\dot{x}_1 = v(t, x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = 2(1-t)u, \quad x(0) = 0, \quad x^2(1) = 1$$

Отсюда видно, что $x_2(t) = t(2-t)u$. Подставляя это выражение в последнее из равенств, находим $u = \sqrt{1 - x_1^2(1)}$. Исключая из системы соотношений x_2, u, приходим к следующей начальной задаче для скалярного функционально-дифференциального уравнения с опережением:

$$\dot{x}_1(t) = v\left(t, x_1(t), t(2-t)\sqrt{1 - x_1^2(1)}\right), \quad x_1(0) = 0$$

Остается проверить разрешимость этой задачи, откуда будет следовать существование x, u с нужными свойствами.

Обозначим через S множество всех функций z: $[0, 1] \to [0, 1]$, удовлетворяющих условию Липшица с константой единица. По теореме Арцела–Асколи ([9], с. 48) множество S – компакт в пространстве непрерывных функций. Кроме того, множество S выпукло. Для $z(\cdot) \in S$, $t \in [0, 1]$ положим

$$F(z(\cdot))(t) = \int_0^t v\left(\tau, z(\tau), \tau(2-\tau)\sqrt{1 - z^2(1)}\right)d\tau$$

Функция $F(z(\cdot))(t)$ аргумента t удовлетворяет условию Липшица с константой единица, поскольку $0 \le v \le 1$. Отображение F переводит S в себя и является непрерывным в равномерной норме пространства непрерывных функций. По теореме Шаудера отображение F имеет в S хотя бы одну неподвижную точку. Таким образом, введенная выше начальная задача для функционально-дифференциального уравнения разрешима.

Замечание 1.3. Пусть стратегия $v = v(t, x_1, x_2)$ такова, что решение начальной задачи (1.1), (1.2) единственно для любого числа $u \in [0, 1]$ (например, $v(t, x_1, x_2)$ удовлетворяет условию Липшица). Тогда в доказательстве свойства 1.3 можно вместо принципа Шаудера воспользоваться тем, что меняющая знак непрерывная скалярная функция, определенная на отрезке, обращается в нуль. Далее можно аппроксимировать произвольную каратеодориеву стратегию липшицевыми.

Замечание 1.4. Аналогично можно рассматривать игры для (1.1), (1.2) с некоторыми другими линиями в качестве ТМ M. Например, M может быть отрезком прямой (что дает выпуклый случай) или "перевернутой" четвертью окружности, т.е. задаваться соотношениями

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1, \quad x_1 \le 1, \quad x_2 \le 1$$

Замечание 1.5. Свойства, как у разобранного выше примера, можно найти также в некоторых вырожденных ситуациях. Следующее очевидное рассуждение позволяет по дифференциальной игре формально построить эквивалентную игру с невыпуклым ТМ. При заданной начальной позиции и обычных требованиях на динамику системы все траектории игры не покидают некоторый замкнутый шар в фазовом пространстве. Можно считать, что ТМ содержится в этом шаре. Добавление к ТМ какой-либо точки вне этого шара делает его невыпуклым и несвязным, а все существенные свойства игры, очевидно, сохраняются. При этом та часть ТМ, которая фактически участвует в дифференциальной игре, не меняется.

Замечание 1.6. Можно привести простой пример игры, не использующий дифференциальные уравнения, для которого имеет место описанная в данном разделе ситуация. Пусть первый игрок выбирает число $u \in [0, 1]$, а второй – число $v \in [0, 1]$. Цель второго игрока состоит в максимизации платы, которая равна $|u - v|$. Очевидно, никакой выбор постоянной v не гарантирует отличие платы от нуля (аналог программных управлений в дифференциальных играх). Пусть теперь второй игрок назначает свое число в виде $v = \varphi(u)$, где φ: $[0, 1] \to [0, 1]$ – фиксированная функция. Никакая непрерывная функция φ не гарантирует второму игроку ненулевой результат (аналог непрерывных стратегий в дифференциальных играх). Действительно, функция φ имеет неподвижную точку, что легко следует, например, из принципа Шаудера. С другой стороны, разрывная функция

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & 0 \le u \le 1/2 \\ 0, & 1/2 < u \le 1 \end{cases}$$

гарантирует второму игроку результат не менее 1/2 (аналог разрывных стратегий).

2. Уклонение от двух отрезков. На плоскости рассмотрим точку с координатами x_1, x_2, движение которой описывается системой

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = v \tag{2.1}$$

и начинается в нуле

$$x(0) = 0 \tag{2.2}$$

Независимая переменная $t \in [0, 1]$ – время. Управления u, v двух игроков лежат в $[-1, 1]$. Решение x: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ абсолютно-непрерывно и должно удовлетворять системе дифференциальных уравнений почти всюду. Функцию $u = u(t)$ считаем измеримой по Лебегу. Терминальное множество M – объединение отрезка $x_1 = 1$, $0 \le x_2 \le 1$ с отрезком $x_1 = -1$, $-1 \le x_2 \le 0$. Нужно с помощью управления v обеспечить уклонение в конечный момент времени $x(1) \notin M$ в присутствии помехи $u(t)$.

Проверим, что программные управления не гарантируют уклонения в рассматриваемой задаче, даже если ограничиться лишь двумя возможными помехами.

Свойство 2.1. Для любой измеримой функции $v = v(t)$, где v: $[0, 1] \to [-1, 1]$, хотя бы одно из двух решений задачи (2.1), (2.2), соответствующих постоянным $u \equiv 1$, $u \equiv -1$, удовлетворяет соотношению $x(1) \in M$.

Доказательство. Для решения (2.1), (2.2) имеем $|x_2(1)| \le 1$, поскольку $|\upsilon(t)| \le 1$. Если $\langle \upsilon \rangle \ge 0$, достаточно взять $u \equiv 1$. Если же $\langle \upsilon \rangle \le 0$, то возьмем $u \equiv -1$. Когда $\langle \upsilon \rangle = 0$, можно выбрать любую из этих двух помех.

Приведем теперь свойства, которые позволяют строить стратегии, обеспечивающие уклонение от ТМ. В частности, будут построены непрерывные стратегии.

Свойство 2.2. Пусть υ: $[0, 1] \times \mathbf{R} \to [-1, 1]$; функции $\upsilon(t, t)$, $\upsilon(t, -t)$ аргумента t, а также u: $[0, 1] \to [-1, 1]$ измеримы, причем

$$\langle \upsilon(\tau, \tau) \rangle < 0, \quad \langle \upsilon(\tau, -\tau) \rangle > 0$$

где интегрирование – по τ. Тогда задача

$$\dot{x}_1 = u(t), \quad \dot{x}_2 = \upsilon(t, x_1), \quad x(0) = 0, \quad x(1) \in M \tag{2.3}$$

не имеет решений.

Доказательство (от противного). Пусть существует решение x задачи (2.3). Из условия $x(1) \in M$ следует $|x_1(1)| = 1$. Рассмотрим сначала случай $x_1(1) = 1$. Поскольку $|u(t)| \le 1$, это возможно, лишь если $u(t) = 1$ почти всюду. Тогда $x_1(t) = t$ при всех $t \in [0, 1]$, и поэтому $x_2(1) = \langle \upsilon(\tau, \tau) \rangle < 0$. Таким образом, $x(1) \notin M$. Аналогично при $x_1(1) = -1$ имеем $u(t) \equiv -1$, $x_1(t) \equiv -t$, $x_2(1) > 0$ и снова $x(1) \notin M$. Полученное противоречие показывает, что задача (2.3) не может иметь решений.

Предположим, что функция $\upsilon = \upsilon(t, x_1)$ удовлетворяет условиям свойства 2.2. Пусть, кроме того, эта функция в паре с любой допустимой помехой $u = u(t)$ дает начальную задачу (2.1), (2.2), имеющую абсолютно-непрерывное решение. (Для этого достаточно, чтобы при любой непрерывной ψ суперпозиция $\upsilon(t, \psi(t))$ была измеримой.) Тогда функция υ может служить стратегией, гарантирующей уклонение в рассматриваемой дифференциальной игре в классических движениях. Примером может служить непрерывная стратегия

$$\upsilon(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \le -1 \\ -x_1, & |x_1| \le 1 \\ -1, & x_1 \ge 1 \end{cases}$$

Этот способ построения обеспечивающих уклонение стратегий в изучаемой игре имеет, как было показано выше, очень простое обоснование, сводящееся к рассмотрению лишь двух помех. Однако отсутствует оценка снизу расстояния $\rho(x(1), M)$ от точки $x(1)$ до ТМ M. Изложим теперь способ, дающий такую оценку.

Свойство 2.3. Пусть фиксированы число $\varepsilon \in [0, 1/2]$ и функция $\upsilon = \upsilon(x_1)$ со значениями в $[-1, 1]$, такая, что

$$\upsilon(x_1) = -\operatorname{sgn} x_1 \quad \text{при} \quad |x_1| > \varepsilon \tag{2.4}$$

Пусть функция u: $[0, 1] \to [-1, 1]$ измерима, функция x: $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ абсолютно-непрерывна и удовлетворяет начальной задаче

$$\dot{x}_1 = u(t), \quad \dot{x}_2 = \upsilon(x_1), \quad x(0) = 0 \tag{2.5}$$

Тогда

$$\rho(x(1), M) \ge \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = (1 - 2\varepsilon)/\sqrt{5} \tag{2.6}$$

При этом по ε можно подобрать такие функции u, υ, что в оценке достигается равенство.

Заметим, что для справедливости оценки в формулировке свойства 2.3 поведение функции $v(x_1) \in [-1, 1]$ при $|x_1| \le \varepsilon$ не имеет значения. При этих x_1 допустимы разрывы и многозначность. Важно лишь, чтобы задача (2.5) имела абсолютно-непрерывное решение.

Доказательство. Если $|x_1(1)| \le \varepsilon$, то $\rho(x(1), M) \ge 1 - \varepsilon \ge 1/2 > 1/\sqrt{5}$, и неравенство (2.6) выполняется. Пусть теперь $|x_1(1)| > \varepsilon$. Для определенности будем считать, что $x_1(1) > \varepsilon$. Случай отрицательного значения $x_1(1)$ рассматривается аналогично. Обозначим через ρ_+ расстояние от точки $x(1)$ до отрезка $x_1 = 1$, $0 \le x_2 \le 1$, а через ρ_- – до отрезка $x_1 = -1$, $-1 \le x_2 \le 0$. Тогда $\rho(x(1), M) = \min\{\rho_-, \rho_+\}$, причем

$$\rho_- \ge 1 + x_1(1) > 1 > \varepsilon_1$$

Для получения неравенства (2.6) остается оценить ρ_+ снизу этой же величиной. Найдется число $\xi \in [0, 1)$, такое, что $x_1(\xi) = \varepsilon$, а при $t > \xi$ выполняется неравенство $x_1(t) > \varepsilon$. Имеем $\varepsilon \le \xi$. Действительно,

$$\varepsilon = x_1(\xi) = x_1(0) + \int_0^{\xi} u(\tau)d\tau \le \xi$$

Кроме того,

$$x_1(1) = x_1(\xi) + \int_{\xi}^{1} u(\tau)d\tau \le \varepsilon + 1 - \xi$$

Далее

$$x_2(1) = x_2(0) + \int_0^{\xi} v(x_1(\tau))d\tau + \int_{\xi}^{1} (-1)d\tau \le -1 + 2\xi$$

Таким образом, выполняются неравенства

$$1 - x_1(1) \ge \xi - \varepsilon \ge 0, \quad -x_2(1) \ge 1 - 2\xi \tag{2.7}$$

Предположим сначала, что $\xi \le 1/2$. Тогда из второго неравенства (2.7) следует $x_2(1) \le 0$. Поэтому

$$\rho_+ = \sqrt{(1 - x_1(1))^2 + x_2^2(1)}$$

Отсюда с помощью неравенств (2.7) и неравенства $\xi \le 1/2$ получаем

$$\rho_+ \ge \sqrt{(\xi - \varepsilon)^2 + (1 - 2\xi)^2} = \sqrt{5(\xi - (2 + \varepsilon)/5)^2 + \varepsilon_1^2} \ge \varepsilon_1$$

Рассмотрим теперь случай $\xi > 1/2$. С использованием первого неравенства (2.7) получаем

$$\rho_+ \ge 1 - x_1(1) \ge \xi - \varepsilon > 1/2 - \varepsilon \ge \varepsilon_1$$

Требуемая оценка установлена во всех случаях.

Осталось проверить, что на некоторых движениях в этой оценке достигается равенство. Для этого по числу ε построим удовлетворяющие всем наложенным требованиям функции u, v, которые доставляют равенство. Положим

$$u(t) = \begin{cases} 5 - 2/\varepsilon_2, & 0 \le t \le \varepsilon_2 \\ 1, & \varepsilon_2 < t \le 1; \quad \varepsilon_2 = (2 + \varepsilon)/5 \end{cases}$$

Поскольку $\varepsilon \in [0, 1/2]$, имеем $5 - 2/\varepsilon_2 \in [0, 1]$. Интегрируя, находим

$$x_1(t) = \begin{cases} (5 - 2/\varepsilon_2)t, & 0 \le t \le \varepsilon_2 \\ t - \varepsilon_2 + \varepsilon, & \varepsilon_2 \le t \le 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

Поэтому $x_1(1) = (3 + 4\varepsilon)/5 \in [3/5, 1]$. Пусть

$$\upsilon(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \le \varepsilon \\ -1, & x_1 > \varepsilon \end{cases} \tag{2.9}$$

Условие (2.4) выполняется. Подставляя выражение (2.8) в (2.9), получаем

$$\upsilon(x_1(t)) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \varepsilon_2 \\ -1, & \varepsilon_2 < t \le 1 \end{cases}$$

Интегрирование дает

$$x_2(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \varepsilon_2 \\ 2\varepsilon_2 - t, & \varepsilon_2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Таким образом, $x_2(1) = (-1 + 2\varepsilon)/5 \in [-1/5, 0]$. Учитывая пределы изменения $x_1(1)$, $x_2(1)$, видим, что расстояние $\rho(x(1), M)$ достигается в точке $(1, 0)$. Следовательно,

$$\rho(x(1), M) = \sqrt{(1 - x_1(1))^2 + x_2^2(1)} = \frac{1}{5}\sqrt{(4\varepsilon - 2)^2 + (2\varepsilon - 1)^2} = \varepsilon_1$$

что дает равенство в полученной оценке.

Замечание 2.1. Пусть $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Можно многими способами доопределить функцию (2.4) при $|x_1| \le \varepsilon$ до непрерывной функции со значениями в $[-1, 1]$. Согласно свойству 2.3 полученная при этом непрерывная стратегия гарантирует уклонение от ТМ в классических движениях. Например, положим

$$\upsilon(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 < -\varepsilon \\ -\varepsilon^{-1}x_1, & |x_1| \le \varepsilon \\ -1, & x_1 > \varepsilon \end{cases}$$

Можно также доопределить функцию (2.4) до сколь угодно гладкой функции, в том числе до бесконечно дифференцируемой:

$$\upsilon(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \le -\varepsilon \\ 1 - 2\exp(-(x_1 + \varepsilon)^{-2})\exp(-(x_1 - \varepsilon)^{-2})), & |x_1| < \varepsilon \\ -1, & x_1 \ge \varepsilon \end{cases}$$

Замечание 2.2. При $\varepsilon = 0$ функция (2.4), доопределенная в точке $x_1 = 0$ некоторым произвольным числом из $[-1, 1]$, задает разрывную стратегию. Поскольку эта разрывная стратегия и начальная задача (2.5) имеют достаточно простую структуру, можно рассматривать абсолютно-непрерывные решения задачи (2.5). В соответствии со свойством 2.3 введенная здесь стратегия обеспечивает в конечный момент времени удаление точки от ТМ не менее $1/\sqrt{5} = 0.447\ldots$.

Замечание 2.3. Можно при $\varepsilon = 0$ доопределить функцию (2.4) в точке $x_1 = 0$ до многозначного отображения, полагая, что $\upsilon(0)$ – весь отрезок $[-1, 1]$. Получим полунепрерывную сверху (по включению) многозначную стратегию. Начальная задача (2.5) содержит в этом случае дифференциальное включение. Рассматриваемая многозначная стратегия в силу свойства 2.3 обеспечивает уклонение от ТМ в конечный момент времени. При этом гарантируется расстояние до ТМ не менее $1/\sqrt{5}$, как и в случае введенной выше разрывной однозначной стратегии.

Замечание 2.4. Изученная в данном разделе задача уклонения демонстрирует, в частности, что в условиях следствия 1 [7], а поэтому и в условиях теоремы [7], нельзя отбросить требование ацикличности соответствующих пересечений. Действительно, для этой задачи выполняются все условия указанного следствия, за исключением требования ацикличности. В то же время заключение следствия здесь не выполняется, поскольку в рассматриваемой задаче можно гарантировать уклонение с помощью непрерывной стратегии в силу замечания 2.1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00367, 02-01-00769).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Berlin, etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
5. *Барабанова Н.Н., Субботин А.И.* О непрерывных стратегиях уклонения в игровых задачах о встрече движений // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 796–803.
6. *Красовский Н.Н.* Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сб. 1978. Т. 107. № 4. С. 541–571.
7. *Брыкалов С.А.* Непрерывная обратная связь в задачах конфликтного управления // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 442–444.
8. *Eilenberg S., Montgomery D.* Fixed point theorems for multi-valued transformations // Amer. J. Math. 1946. V. 68. № 2. P. 214–222.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Екатеринбург
e-mail: brykalov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
23.VII.2002