

УДК 62–50

© 2003 г. Л. Д. Акуленко, А. М. Шматков

**УКЛОНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА ОТ НЕПОДВИЖНОЙ СФЕРЫ  
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОГРАНИЧЕННОЙ СИЛЫ**

Решена задача синтеза управления движением динамического объекта (материальной точки), уклоняющегося от неподвижного сферического препятствия под действием ограниченной силы. В фазовом пространстве произвольной размерности построено такое множество, для точек которого может быть осуществлено уклонение, а также режимы управления для ограниченного (фиксированного) и неограниченного интервалов времени. Для конкретных начальных условий определены характеристики оптимального движения, в частности, время и минимальное расстояние. Установлены качественные особенности управляемого движения.

Задачам управления движением и оптимизации в условиях неопределенности и конфликта при наличии фазовых ограничений посвящены многочисленные исследования ([1–7] и др.). Однако, с целью построения опорных управлений и оценок для приложений интерес представляет полное точное решение задач управления движением в модельных постановках при упрощающих предположениях относительно структуры системы, вида и формы ограничений. Ниже исследуется задача об оптимальном уклонении динамического объекта малых линейных размеров (материальной точки) под действием ограниченной силы от фиксированного геометрического препятствия сферической формы. Задача уклонения сферического объекта от сферы или точки эквивалентна рассматриваемой.

Приведенная постановка задачи естественным образом возникает при построении оптимального по быстродействию приведения динамического объекта на сферу с нулевой скоростью ("мягкая посадка") [8]. Как оказалось, при определенных начальных условиях оптимальные траектории могут один или два раза пересекать поверхность. Возникает вопрос об определении множества фазовых точек (начальных данных), для которых возможна "мягкая посадка" (или уклонение) без пересечения сферы. При этом могут быть исследованы случаи движения как вне сферы, так и внутри ее. Далее ради определенности рассматривается первый случай (внешние траектории) как представляющий больший интерес для механики полета. Отметим, что задача оптимального по быстродействию пересечения сферы [9] в определенном смысле является "обратной" к рассматриваемой ниже задаче уклонения от шаровой области под действием ограниченной по модулю силы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается движение материальной точки массы  $m$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве ( $n \geq 1$ ) под действием ограниченной по модулю управляющей силы  $F$ ; предполагается наличие непроницаемой сферы (препятствия) с произвольными фиксированными центром  $x_0$  и радиусом  $R > 0$  [8]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F, \quad |F| \leq F_0, \quad x(0) = x^0, \quad \dot{x}(0) = v^0 \\ S_R^n &= \{x: |x - x_0| \leq R\}, \quad x^0 \notin S_R^n \quad (|x^0 - x_0| > R) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Для управляемой системы (1.1) рассмотрим задачу уклонения геометрической точки  $x$  от препятствия  $S_R^n$  в любой момент времени  $t > 0$ , т.е.  $|x(t) - x_0| > R$ , без ограничений на скорость  $\dot{x} = v$ . Естественно, не при всяких начальных данных  $x^0, v^0$  за-

дача имеет решение. Кроме того, она оказывается содержательной, если вектор скорости  $v^0$  лежит внутри конуса с вершиной в точке  $x = x^0$  и образующими, которые касаются сферы.

Отметим, что система (1.1) определяется совокупностью  $3(n + 1)$  параметров: скалярами  $m, F_0, R$  и векторами  $x^0, v^0, x_0$ . Введем безразмерные переменные  $u = F/F_0, (x - x_0)/R \rightarrow x, t/\tau \rightarrow t, v\tau/R \rightarrow v, \tau = (mR/F_0)^{1/2}$ . Тогда вместо системы (1.1) получим [8]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = u, \quad x(0) = x^0, \quad v(0) = v^0; \quad |u| \leq 1 \\ S_1^n &= \{x: |x| \leq 1\}, \quad |x^0| > 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из центральной симметрии следует, что общая задача при  $n \geq 2$  эквивалентна задаче на плоскости ( $n = 2$ ). Если векторы  $x^0$  и  $v^0$  неколлинеарны, то эта плоскость определяется однозначно, иначе – с точностью до произвольного поворота. Случай  $n = 1$  (движение по прямой,  $S_1^1$  – отрезок) достаточно прост и особого интереса не представляет.

Рассмотрим множество достижимости  $D(t, x^0, v^0)$  для системы (1.2) (см., например, [3]). Поскольку на скорость точки никаких ограничений не наложено, то будем изучать это множество только в пространстве координат. Задача уклонения имеет решение, если в  $D$  существует хотя бы одна траектория, каждая точка которой находится на единичном (или большем) расстоянии от начала координат. Известно, что в рассматриваемом случае множество достижимости будет компактным и выпуклым. Тогда можно исследовать только его граничные точки. Для нахождения этих точек нужно решить задачу оптимального управления с функционалом

$$(c_x, x(T)) \rightarrow \min_u, \quad |u| \leq 1 \quad (1.3)$$

и системой (1.2). Здесь  $T$  – произвольный фиксированный момент времени, а  $c_x$  – произвольный единичный вектор. Перебрав все возможные  $c_x$  в соотношении (1.3), можно построить искомую границу множества достижимости в момент  $T$ . Для этого момента времени среди всех точек границы следует найти самую далекую от начала координат:

$$J = |x(T)| \rightarrow \max_{c_x}, \quad |c_x| \leq 1 \quad (1.4)$$

Решив задачу (1.4) для всех  $T > 0$ , получим семейство траекторий  $x^*(T)$ , наиболее отклоняющихся от начала координат среди всех возможных траекторий движения системы. Найдем среди них ту, конечная точка которой ближе всех к началу координат:

$$\Phi = |x^*(T)| \rightarrow \inf_T, \quad 0 < T < \infty \quad (1.5)$$

Если эта точка не лежит внутри сферы, то, как будет показано ниже, исходная задача имеет решение, и оно найдено.

Далее можно решить задачу для любых начальных условий и определить границу  $G$  области  $M$  допустимых начальных условий. Здесь

$$M = \{x, v: \Phi(x, v) > 1\}, \quad G = \{x, v: \Phi(x, v) = 1\} \quad (1.6)$$

Таким образом, изложенная процедура оптимального уклонения содержит последовательное решение четырех задач: 1) определение граничных точек множества достижимости; 2) поиск наиболее удаленной от начала координат точки этого множества для каждого момента времени  $t = T < \infty$ ; 3) нахождение ближайшей к началу координат точки на получившейся траектории; 4) определение границы области допустимых начальных условий.

Решение первых двух задач находится аналитически сравнительно просто; оно приводится в разд. 2. Нахождение минимизирующей траектории  $x^*(T)$  сопряжено с определенными вычислительными затратами; решение этой задачи приведено в разд. 3. Определение границы допустимой области  $G$  (четвертая задача) оказывается возможным аналитически; оно дано в разд. 5.

**2. Построение траектории, максимально уклоняющейся от начала координат.** Искомое решение задачи (1.2), (1.3) строится с помощью необходимых условий оптимальности принципа максимума [1]; имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, & \dot{v} &= u^*, & x(0) &= x^0, & v(0) &= v^0, & u^* &= q|q|^{-1} \\ \dot{p} &= 0, & \dot{q} &= -p, & p(T) &= -c_x, & q(T) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $p, q$  – сопряженные  $x, v$  переменные.

Из соотношений 2.1 следует, что  $p$  – единичный постоянный вектор. Определение  $q(t)$  и подстановка в выражение для  $u^*$  приводит к выражениям

$$u^* = -c_x, \quad v = v^0 - c_x t, \quad x = x^0 + v^0 t - c_x t^2/2, \quad |c_x| = 1 \quad (2.2)$$

Для решения задачи (1.4) с учетом выражений (2.2) нужно найти максимум

$$\begin{aligned} J[c_x] &= \left| x^0 + v^0 T - c_x \frac{T^2}{2} \right| = \left( x_0^T - (x_0^T, c_x) T^2 + \frac{T^4}{4} \right)^{1/2} \rightarrow \max_{c_x}, \quad |c_x| \leq 1 \\ J[c_x^*] &= |x_0^T| + \frac{T^2}{2}, \quad |x_0^T| = (l^2 + 2clhT + h^2 T^2)^{1/2}, \quad c_x^* = -\frac{x_0^T}{|x_0^T|} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$x^0 + v^0 T \equiv x_0^T \neq 0, \quad l = |x^0|, \quad h = |v^0|, \quad c = (x^0, v^0) l^{-1} h^{-1} = \cos \alpha$$

Таким образом, при  $|x_0^T| \neq 0$  решение задач (1.2), (1.3) и (1.2), (1.4) строится однозначно согласно соотношениям (2.2), (2.3). Очевидно, при  $c \neq -1$  неравенство  $|x_0^T| \neq 0$  имеет место. Рассмотрим сперва эту общую ситуацию; случай  $c = -1$  исследуется особо в разд. 4. Оптимальное управление  $u^*$  (2.2), (2.3) имеет простую геометрическую интерпретацию: оно должно быть коллинеарным ненулевому вектору  $x$  при  $t = T$  для  $u = 0$ .

**3. Поиск ближайшей к началу координат точки на траектории, максимально уклоняющейся от начала координат.** Для решения задачи (1.2), (1.5) функционал  $J^* = J[c_x^*]$  в (2.3) рассмотрим как функцию аргумента  $T > 0$  и параметров  $l > 1, h > 0, -1 < c < 0$ . Ставится задача определения минимального значения  $\Phi = \inf_T J^*$  и соответствующей величины  $T^*$ . В силу структурных свойств  $J^*$  искомые величины  $\Phi, T^*$  будут функциями указанных трех параметров  $l, h, c$ . Количество параметров можно уменьшить, если произвести нормировку функционала  $J^*$  на величину  $l$ , а аргументов  $h$  и  $T$  на  $\sqrt{l}$ , т.е. вместо задачи (1.5) рассмотреть задачу минимизации

$$J^*/l = I(\theta, \gamma, c) \equiv L + \theta^2/2 \rightarrow \inf_{\theta}, \quad L \equiv (1 + 2c\gamma\theta + \gamma^2\theta^2)^{1/2} = |x_0^T| l^{-1} \quad (3.1)$$

$$-1 < c < 0, \quad \gamma = h/\sqrt{l} > 0, \quad \theta = T/\sqrt{l}, \quad 0 < \theta < \infty$$

Первая производная функции  $I(\theta, \gamma, c)$  по  $\theta$

$$dI/d\theta = \gamma(c + \gamma\theta)/L(\theta, \gamma, c) + \theta \quad (3.2)$$

для любых фиксированных значений  $\gamma > 0$  и  $-1 < c < 0$  отрицательна при  $\theta = 0$  и положительна при  $\theta \rightarrow \infty$ . Найдем вторую производную

$$d^2 I/d\theta^2 = \gamma^2(1 - c^2)/L^3 + 1 \quad (3.3)$$

Функция (3.3) положительна при любых  $\theta > 0$ ,  $\gamma > 0$  и  $|c| < 1$ . Следовательно,  $I(\theta, \gamma, c)$  всегда имеет единственный минимум по  $\theta$  при представляющих здесь интерес значениях параметров. Его можно найти, приравняв выражение (3.2) нулю. Имеем

$$\gamma(c + \gamma\theta) + \theta L(\theta, \gamma, c) = 0, \quad -1 < c < 0, \quad \gamma > 0 \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) можно свести к уравнению четвертой степени относительно  $\theta$ , если перенести  $\theta L$  направо и возвести обе части уравнения в квадрат. Получим

$$\gamma^2\theta^4 + 2c\gamma\theta^3 + (1 - \gamma^4)\theta^2 - 2c\gamma^3\theta - c^2\gamma^2 = 0 \quad (3.5)$$

Можно воспользоваться формулами Кардано, а затем единственный подходящий корень  $\theta^* > 0$  проще всего найти непосредственной подстановкой в уравнение (3.4).

Соответствующие управления и траектории согласно соотношениям (2.2), (2.3) имеют вид

$$u^* = (x^0 + v^0 T^*) |x^0 + v^0 T^*|^{-1}, \quad T^* = \theta^* |x^0|^{1/2} \quad (3.6)$$

$$x^*(t) = x^0 + v^0 t + u^* t^2 / 2, \quad v^*(t) = v^0 + u^* t, \quad t > 0$$

Теперь необходимо убедиться в том, что найденная траектория  $x^*(t)$  не имеет более близких к началу координат точек, чем  $x_*^* = x^*(T^*)$ . Введем новую независимую переменную  $\delta = t - T^*$ . Тогда

$$x^{*2}(\delta) = (x_*^* + v_*^* \delta + u^* \delta^2 / 2)^2 = x_*^{*2} + 2(x_*^*, v_*^*) \delta + (x_*^*, u^*) \delta^2 + v_*^{*2} \delta^2 + (v_*^*, u^*) \delta^3 + u^{*2} \delta^4 / 4, \quad v_*^* = v^*(T^*) \quad (3.7)$$

Производная  $dx^{*2}(\delta)/d\delta$  при  $\delta = 0$  обращается в нуль при тех же значениях параметров, что и выражение (3.2). Тогда скалярное произведение  $(x_*^*, v_*^*)$  равно нулю. Из соотношений (1.3), (1.4) и (2.3) можно получить, что  $u^* = x_*^* / |x_*^*|$ . Тогда скалярное произведение  $(v_*^*, u^*)$  тоже равно нулю. Имеем

$$x^{*2}(\delta) = x_*^{*2} + (x_*^*, u^*) \delta^2 + v_*^{*2} \delta^2 + u^{*2} \delta^4 / 4 \quad (3.8)$$

$$d^2 x^{*2} / d\delta^2 = 2(x_*^*, u^*) + 2v_*^{*2} + 3u^{*2} \delta^2$$

Вторая производная, определяемая вторым равенством (3.8), всегда положительна. Следовательно, при  $t < T^*$  объект приближается к началу координат с убывающей скоростью сближения, а затем удаляется с возрастающей радиальной составляющей скорости. Поскольку  $x^{*2}(\delta)$  – симметричная относительно нуля функция  $\delta$ , то изменение расстояния при приближении к началу координат происходит по тому же закону, что и при удалении.

Исследуем оптимальное значение  $\theta$ , определяемое согласно уравнению (3.4), как функцию  $\gamma$  и  $c$ . Найдем неявную производную этой функции по  $\gamma$  при постоянном  $c$  и приравняем нулю. Получим

$$c + 2\gamma\theta + \theta(c\theta + \gamma\theta^2)/L = 0 \quad (3.9)$$

Уравнения (3.4), (3.9) определяют кривую  $\gamma(c)$  (или  $c(\gamma)$ ), для которой функция  $\theta^*(\gamma, c)$  достигает экстремума по  $\gamma > 0$  при заданном значении  $c < 0$ . Преобразуем эти соотношения для построения указанной кривой, исключив неизвестную  $\theta$ . Выразим  $L$  из уравнения (3.4) и подставим в равенство (3.9). Тогда получим вспомогательное равенство вида

$$\frac{\gamma(c + \gamma\theta)}{\theta} = \theta \frac{c\theta + \gamma\theta^2}{c + 2\gamma\theta} \quad (3.10)$$

Перепишем соотношение (3.10) в виде равенства нулю полинома по степеням  $\theta$ , умножим это равенство на  $\gamma$  и сложим с равенством (3.5). Находим

$$\theta(c\gamma\theta^2 + (1 + \gamma^4)\theta + c\gamma) = 0 \quad (3.11)$$

Поскольку  $\theta \neq 0$ , имеем квадратное уравнение относительно  $\theta$ .

С другой стороны, обе части равенства (3.10) можно разделить на  $c + \gamma\theta$ , поскольку уравнение (3.4) на множестве  $c = -\gamma\theta$  имеет решение лишь при  $L = 0$ , что, согласно соотношениям (2.3), (3.1), возможно только при  $c = -1$ . С учетом этого обстоятельства приведем равенство (3.10) к виду

$$\theta^3 = 2\gamma^2\theta + c\gamma \quad (3.12)$$

Подстановка  $\theta^3$  из (3.12) в уравнение (3.5) дает соотношение, позволяющее исключить члены нулевой и первой степени по  $\theta$ . Действительно, имеем

$$\gamma^2\theta^4 + (1 - \gamma^4)\theta^2 + 2c\gamma^3\theta + c^2\gamma^2 = 0 \quad (3.13)$$

Теперь сложим (3.13) и (3.5); получим аналогичное (3.11) вспомогательное равенство вида

$$\gamma^2\theta^2 + c\gamma\theta + 1 - \gamma^4 = 0 \quad (3.14)$$

Выразим величину  $\theta^2$  из (3.14) и подставим в выражение (3.11), разделенное на  $\theta$ . Получим линейное уравнение относительно  $\theta$ , из которого найдем

$$\theta = \frac{c}{\gamma} \frac{1 - 2\gamma^4}{1 + \gamma^4 - c^2}, \quad \gamma = \gamma(c) \quad (c = c(\gamma)) \quad (3.15)$$

Поскольку, как следует из (3.4), функция  $\theta = \theta(\gamma, c)$  при постоянном  $c$  обращается в нуль при  $\gamma = 0$  и  $\theta \rightarrow 0$  при  $\gamma \rightarrow +\infty$ , то ее единственный экстремум по  $\gamma$  (3.15) есть максимум.

Выведем соотношение между  $c$  и  $\gamma$ , которое выполняется для этого максимума. После подстановки (3.15) в (3.14) следует искомая связь между  $\gamma$  и  $c$

$$\frac{c^2\gamma^4(4\gamma^4 + c^2 - 5) - (\gamma^4 - 1)(\gamma^4 + 1)^2}{(\gamma^4 + 1 - c^2)^2} = 0 \quad (3.16)$$

Числитель дроби (3.16) – полином второй степени относительно  $c^2$ . Его корни имеют вид

$$c_{1,2}^2 = (2\gamma^2)^{-1} (\gamma^2(5 - 4\gamma^4) \pm |2\gamma^4 - 1|(5\gamma^4 - 4)^{1/2}) \quad (3.17)$$

и определяют искомую зависимость  $c(\gamma)$ . Поскольку оба корня существуют, если  $\gamma^4 \geq 4/5$ , то  $2\gamma^4 - 1 > 0$ . Итак,

$$c_{1,2} = -2^{-1/2}\gamma^{-1} (\gamma^2(5 - 4\gamma^4) \pm (2\gamma^4 - 1)(5\gamma^4 - 4)^{1/2})^{1/2} \quad (3.18)$$

Из (3.16) следует, что при  $c \rightarrow 0$  и при  $c \rightarrow -1$  значение  $\gamma \rightarrow 1$ . Обе зависимости (3.18) представлены на врезке фиг. 1. При  $\gamma = (4/5)^{1/4} \approx 0.946$  (абсцисса крайней левой точки кривой) график для  $c_1$  переходит в график для  $c_2$ . Интересно отметить, что при варьировании  $c$  от  $-0$  до  $-1 + 0$  величина  $\gamma$  изменяется незначительно (примерно на 6%).

**4. Случай  $c = -1$  и особый случай.** Найдем минимум в (3.1) при  $c = -1$ . Имеем

$$I(\theta, \gamma, -1) \equiv |1 - \gamma\theta| + \theta^2/2 \rightarrow \inf_{\theta} \quad (4.1)$$

Тогда искомое значение  $\theta$  будет равно

$$\theta^* = \gamma, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (4.2)$$

Данный случай отвечает движению по прямой с управлением, равным по модулю единице и направленным против скорости. Представляется естественным назвать такое управление "торможением". Указанный режим является предельным при  $c \rightarrow -1$  и  $0 < \gamma < \gamma^*$ , где  $\gamma^*$  – корень уравнения (3.16). Следовательно, эту ситуацию и при  $c \neq -1$  можно условно назвать "режимом торможения".

При остальных значениях  $\gamma$  получим

$$\theta^* = 1/\gamma, \quad \gamma \geq 1 \quad (4.3)$$

Этот случай, как следует из (2.3) и (3.1), соответствует особой ситуации  $L = 0$  (т.е.  $|x_0^T| = 0$ ). Она имеет место лишь когда  $c = -1$  и  $l = hT$ . При этом множество достижимости в момент  $T$  – сфера с центром в начале координат и радиусом  $T^2/2$ . Следовательно, экстремум в (1.4) достигается на любом векторе  $c_x$ . Тем не менее решение (4.3) задачи (1.5) имеет физический смысл – это время достижения точки, ближайшей к началу координат. Поскольку указанная точка должна лежать на границе множества достижимости, то искомое управление  $u^-$  не зависит от времени.

Для определения  $u^-$  выберем любую из плоскостей в пространстве, где движется точка, так, чтобы она содержала вектор начальной скорости. Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент времени скорость направлена по оси абсцисс в начало координат. Запишем формулу для радиус-вектора точки

$$\begin{aligned} x(t) &= x^0 + v^0 t + u^- t^2/2, \quad x^0 = (l, 0), \quad v^0 = (-h, 0) \\ u^- &= (u_1^-, u_2^-), \quad u^- = \text{const}, \quad |u^-| = 1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

В соответствии с (4.4) квадрат радиус-вектора будет иметь вид

$$x^2(t) = (l - ht)^2 + t^2 u_1^- l - t^3 u_1^- h + t^4/4 \quad (4.5)$$

Ближайшую к началу координат точку на траектории можно определить, приравняв к нулю производную  $dx^2(t)/dt$ . Получим

$$-2h(l - hT) + Tu_1^-(2l - 3hT) + T^3 = 0 \quad (4.6)$$

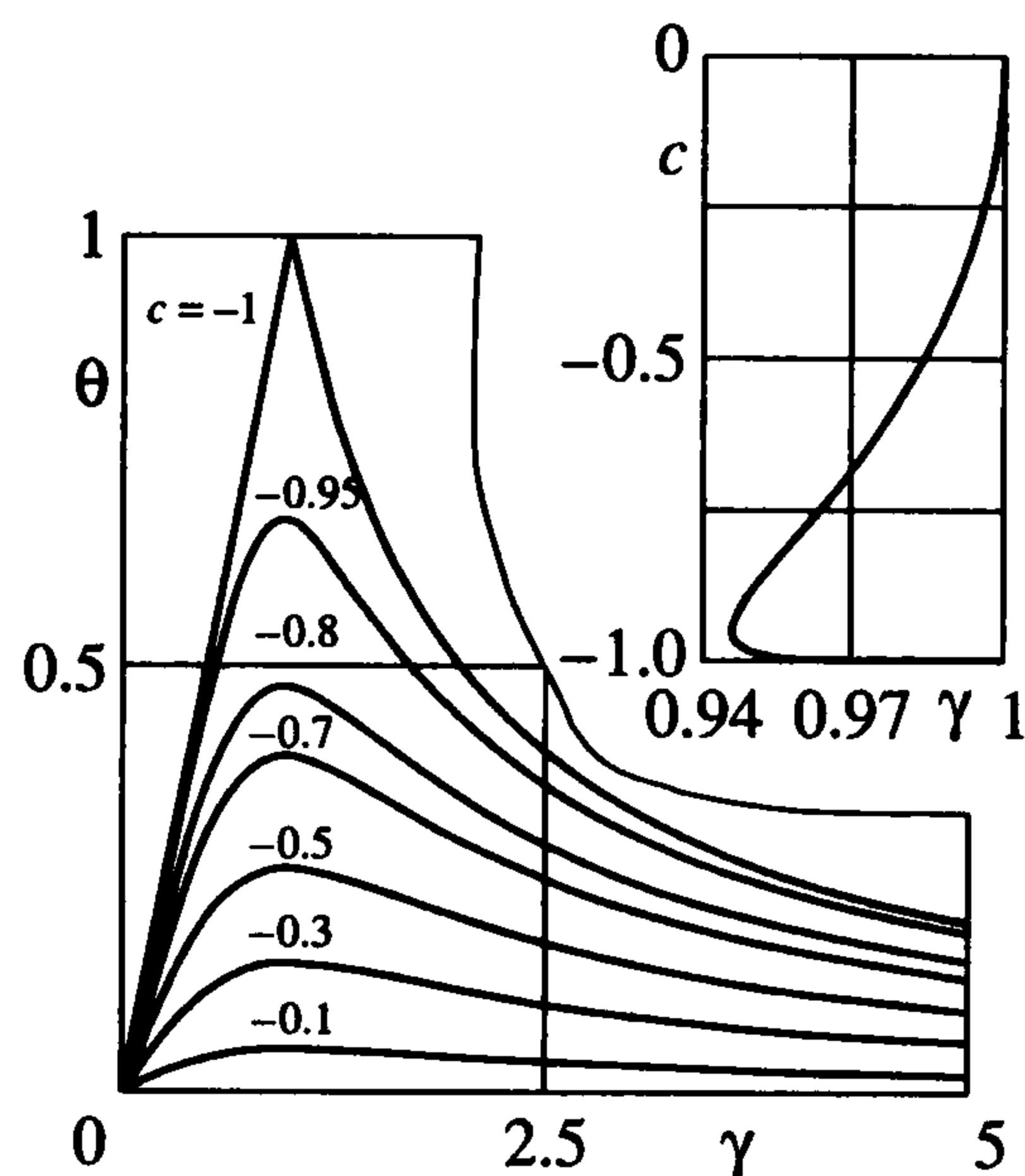
Здесь  $T = T(u_1^-)$  – время достижения точки, ближайшей к началу координат. Искомое управление  $u_1^-$  должно обеспечивать максимум расстояния от этой точки до начала координат. Следовательно, необходимо приравнять к нулю производную  $dx^2(T(u_1^-))/du_1^-$ . Снова воспользуемся (4.5) и получим

$$\frac{dx^2(T(u_1^-))}{du_1^-} = \frac{\partial x^2}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial u_1^-} + \frac{\partial x^2}{\partial u_1^-} \equiv \frac{\partial x^2}{\partial u_1^-} = T^2 l - T^3 h = 0 \quad (4.7)$$

Здесь было использовано то, что производная  $\partial x^2/\partial T$  равна нулю в силу (4.6). Из последнего равенства (4.7) получим, что  $T = l/h$ , как и следовало ожидать. Подстановка  $T$  в (4.6) дает

$$u_1^- = l/h^2, \quad u_2^- = (1 - l^2/h^4)^{1/2} \quad (4.8)$$

Поскольку рассматривается случай  $\gamma \equiv h/l^{1/2} > 1$ , то формулы (4.8) всегда имеют смысл и определяют оптимальное управление в особом случае (4.3).



Фиг. 1

В процессе движения направление вектора скорости будет все больше отклоняться от начального. Следовательно, при  $\gamma > \gamma^*$  можно говорить об "уклонении". Если же  $\gamma = \gamma^*$ , то "уклонение" плавно переходит в "торможение" и наоборот. В частности, при  $\gamma^* = 1$  формулы (4.8) дают управление, направленное против скорости, так что и при  $c = -1$  резкое изменение режима отсутствует.

Теперь, когда исследованы все случаи, представляющие практический интерес, можно построить зависимость  $\theta = \theta(\gamma)$  при различных  $c$ . Она представлена на фиг. 1. Все максимумы почти соответствуют единице по оси абсцисс, но лежат левее ее, как показано на врезке. Исключение составляет зависимость для  $c = -1$ , максимум которой достигается точно в единице, где кривая имеет излом. Части графиков, лежащие левее максимума, соответствуют режиму "торможения", в то время как лежащие правее отвечают режиму "уклонения".

Для каждого значения  $\theta$  существуют два значения  $\gamma$ , причем меньшее отвечает первому режиму, а большее – второму. С точки зрения механики такая картина вполне объяснима. Пусть в начале движения вектор скорости направлен почти в начало координат. Тогда время достижения точки, ближайшей к этому началу, будет одинаково как при небольшой стартовой скорости, позволяющей быстро затормозить, так и при значительной, когда точка быстро приблизится к началу координат, осуществляя уклонение. При промежуточных значениях скорости потребуется большее время либо на торможение, либо на подлет к началу координат при уклонении. Заметим, что чем ближе значение  $c$  к предельному  $c = -1$ , тем сильнее указанная разница во времени.

**5. Нахождение множества начальных точек фазового пространства, позволяющих осуществить уклонение.** Построим искомую границу множества векторов  $x^0, v^0$ , при которых можно уклониться от сферического препятствия в начале координат. Как установлено выше, решение задачи может быть выражено посредством трех переменных  $l, \gamma$  и  $c$ . Это свойство, как отмечалось, свидетельствует об эквивалентности случая  $n \geq 2$  случаю  $n = 2$  в ситуации общего положения.

Допустимое множество  $M$  и его граница  $G$ , в соответствии с (1.6) и (3.1) представимы выражениями

$$\begin{aligned}
 I(\theta^*, \gamma, c) &> \Gamma^{-1}, \quad ((x, v) \in M) \\
 I(\theta^*, \gamma, c) &= \Gamma^{-1}, \quad ((x, v) \in G) \\
 x^0 &= x \notin S_1^n, \quad v^0 = v, \quad \gamma > 0, \quad -1 \leq c < 0, \quad l > 1
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Следовательно, предельное расстояние, которое позволяет осуществить уклонение, задается (неявно) формулами

$$l(\gamma, c) = (L + \theta^2/2)^{-1}, \quad \gamma(c + \gamma\theta) + \theta L = 0 \quad (5.2)$$

Поскольку нормированное время наибольшего сближения  $\theta^*$  определяется единственным образом как функция параметров  $\gamma, c$  согласно разд. 3, 4, то функция  $l(\gamma, c)$  строится однозначно. В результате формулы (5.2) определяют границу  $G$  (5.1) множества фазовых точек  $(x, v)$ , для которых управление (3.6), (4.8) приводит к уклонению. Граница  $G$  может быть построена в трехмерном пространстве автомобильных переменных  $l, \gamma, c$ .

Построим явное соотношение, связывающее  $l, \gamma$  и  $c$ . Для этого выразим  $L$  из второго уравнения в (5.2) и подставим в первое. Получим

$$\theta^3/2 - (\zeta + \gamma^2)\theta - \gamma c = 0, \quad \zeta = l^{-1} \quad (5.3)$$

Введение параметра  $\zeta$  удобно тем, что  $0 < \zeta < 1$  при  $1 < l < \infty$ . Далее возведем обе части первого соотношения из (5.2) в квадрат и подставим в получившуюся формулу  $\theta^3$  из (5.3). После громоздких преобразований получим квадратичное по  $\theta$  соотношение

$$(\zeta + \gamma^2)\theta^2 + 3c\gamma\theta + 2(1 - \zeta^2) = 0 \quad (5.4)$$

Другое квадратичное соотношение для  $\theta$  получается, если выразить  $\theta^2$  из (5.4) и подставить в (5.3), умноженное на  $\theta$ . В результате имеем выражение

$$((3/2)c\gamma\theta^2 + (1 - \zeta^2)\theta)/(\zeta + \gamma^2) + (\zeta + \gamma^2)\theta + \gamma c = 0 \quad (5.5)$$

Вспомогательные соотношения (5.4), (5.5) позволяют исключить  $\theta^2$  и получить однозначное выражение для  $\theta$  как функции задаваемых параметров  $\zeta, \gamma, c$ . Действительно, подставим значение  $\theta^2$  из (5.4) в (5.5) и выразим  $\theta$  из получившегося линейного (по  $\theta$ ) уравнения. Получим удобное представление для  $\theta$

$$\theta = \frac{-2\gamma c((\zeta + \gamma^2)^2 - 3(1 - \zeta^2))}{2(\zeta + \gamma^2)((\zeta + \gamma^2)^2 + 1 - \zeta^2) - 9\gamma^2 c^2} \quad (5.6)$$

Искомое соотношение, определяющее границу  $G$  (5.1), получится после подстановки выражения (5.6) в (5.4). В результате имеем уравнение границы в пространстве автомобильных переменных  $\zeta, \gamma, c$  в виде

$$27\gamma^4 c^4 - 4\gamma^2 c^2(\zeta + \gamma^2)(9(1 - \zeta^2) + (\zeta + \gamma^2)^2) + 4(1 - \zeta^2)((\zeta + \gamma^2)^2 + 1 - \zeta^2)^2 = 0 \quad (5.7)$$

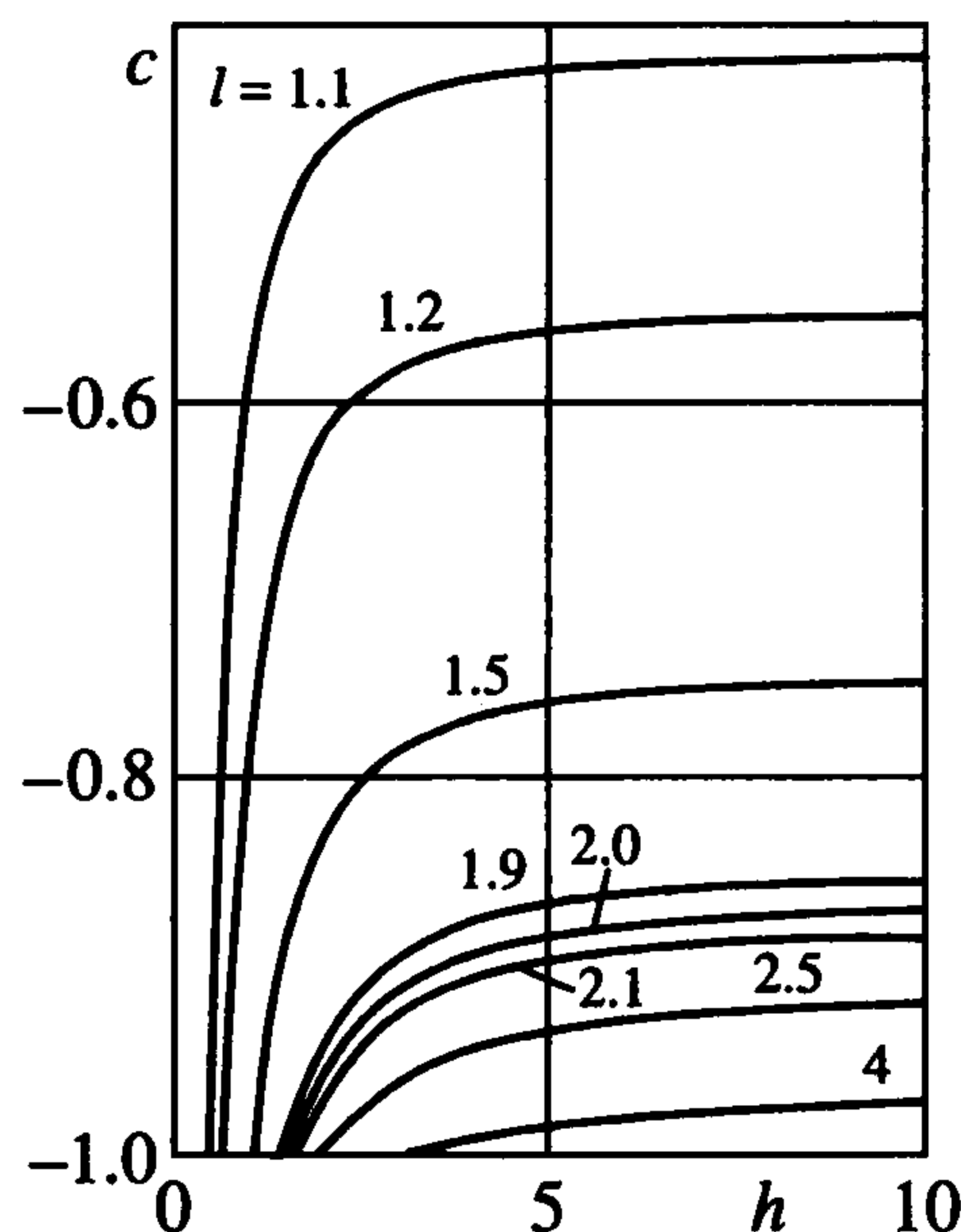
$$0 < \zeta \leq 1, \quad \gamma \geq 0, \quad -1 \leq c \leq 0$$

Соотношение (5.7) является уравнением шестой степени относительно неизвестной  $\zeta = \zeta(\gamma^2, c^2)$ , или уравнением четвертой степени относительно  $\gamma^2 = \gamma^2(\zeta, c^2)$  или биквадратным уравнением относительно  $c$ :  $c^2 = c^2(\zeta, \gamma^2)$ . Оно представляется удобным для аналитического и численного исследования, поскольку автомобильные переменные  $\zeta$  и  $c$  изменяются в ограниченных пределах.

Однако эти переменные не являются наглядными с точки зрения геометрических представлений для описания динамики и траекторий управляемого движения. Предпочтительнее привести уравнение границы  $G$  (5.1) к механическим переменным  $l = |x|$ ,  $h = |v|$ ,  $c = \cos(x, v)$ . Итак, представим равенство (5.7) в исходных переменных  $l, h$  и  $c$ . После элементарных преобразований получим уравнение границы  $G$  (5.1) в виде

$$27h^4 l^4 c^4 - 4h^2 l^2 (h^2 + 1)((h^2 + 1)^2 + 9(l^2 - 1))c^2 + 4(l^2 - 1)((h^2 + 1)^2 + l^2 - 1)^2 = 0 \quad (5.8)$$

$$1 \leq l < \infty, \quad h \geq 0, \quad -1 \leq c \leq 0$$



Фиг. 2

Соотношение (5.8) можно рассматривать как биквадратное уравнение относительно  $c$ , либо как кубическое относительно  $l^2$ , либо как уравнение четвертой степени относительно  $h^2$ . Нужные корни проще всего определять подстановкой в (5.2).

Естественно, наиболее привлекательным представляется разрешить уравнение (5.8) относительно неизвестной  $c$ ; в результате имеем выражения

$$c_{1,2} = -2^{1/2}(3lh3^{1/2})^{-1}((h^2 + 1)((h^2 + 1)^2 + 9(l^2 - 1)) \pm ((h^2 + 1)^2 - 3(l^2 - 1))^{3/2})^{1/2} \quad (5.9)$$

$$h \geq h_*, \quad h_* = (3(l^2 - 1))^{1/2} - 1$$

Теперь необходимо выделить из (5.9) искомую функцию  $c = c(h, l)$ . Заметим, что обе ветви (5.9) при постоянном  $l$  начинаются в одной и той же точке при  $h = h_*$  и никаких других общих точек не имеют, причем  $c_1$  всегда лежит ниже  $c_2$ . Кроме того,  $\lim c_1 = -\infty$ , а  $\lim c_2 = -(l^2 - 1)^{1/2}/l$  при  $h \rightarrow +\infty$ . Из общих соображений ясно, что график функции  $c = c(h)$  при фиксированном значении  $l$  должен начинаться в точке с ординатой  $-1$ . Соответствующая абсцисса, как следует из (4.2), (4.3), определяется по-разному для разных  $\gamma$  (и, следовательно, для разных  $l$ ). Для  $c = -1$  из второго уравнения (5.2) при  $0 < \gamma < 1$  имеем  $h' = (2(l - 1))^{1/2}$ , а при  $\gamma > 1$  получаем  $h'' = l/2^{1/2}$ , причем в обоих случаях соответствующие точки принадлежат ветви  $c_2$ . Поскольку  $\gamma = h/l^{1/2}$ , то в первом случае  $1 < l < 2$ , а во втором  $l > 2$ . Заметим, что  $h_* < h' < h''$  при всех  $l > 1$ , кроме  $l = 2$ , когда все три значения совпадают.

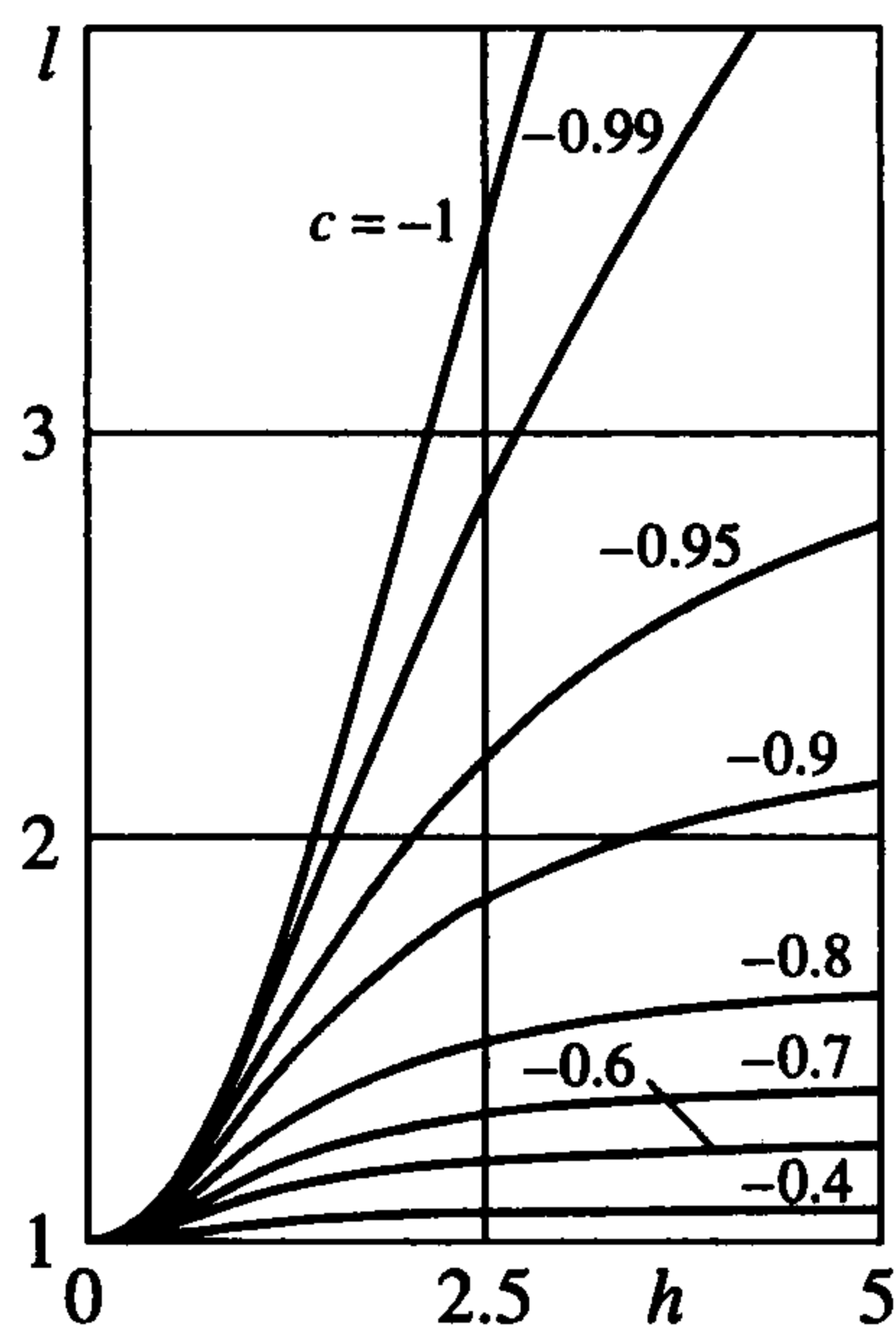
Таким образом, если  $1 < l < 2$ , то ветвь  $c_1$  имеет единственную точку с ординатой  $c = -1$ , а именно при  $h = h''$ . Эта точка не удовлетворяет описанным выше условиям. При всех остальных  $h \geq h_*$  имеем  $c_1 < -1$ . В случае  $l > 2$  при  $h > h''$  также получаем  $c_1 < -1$ . Окончательные выражения, определяющие явно границу  $G$  (5.1) в виде  $c = c(l, h)$ , имеют вид

$$c = -2^{1/2}(3lh3^{1/2})^{-1}((h^2 + 1)((h^2 + 1)^2 + 9(l^2 - 1)) - ((h^2 + 1)^2 - 3(l^2 - 1))^{3/2})^{1/2} \quad (5.10)$$

$$h \geq (2(l - 1))^{1/2}, \quad 1 < l < 2$$

$$h \geq l/2^{1/2}, \quad l > 2$$

Семейство зависимостей  $c = c(h)$  при различных постоянных  $l$  показано на фиг. 2. Для каждого  $l$  область  $M$  (5.1) лежит левее и выше соответствующей кривой. Отметим, что при  $l > 2$  все графики касаются оси абсцисс, а при  $l < 2$  – нет. С точки зрения

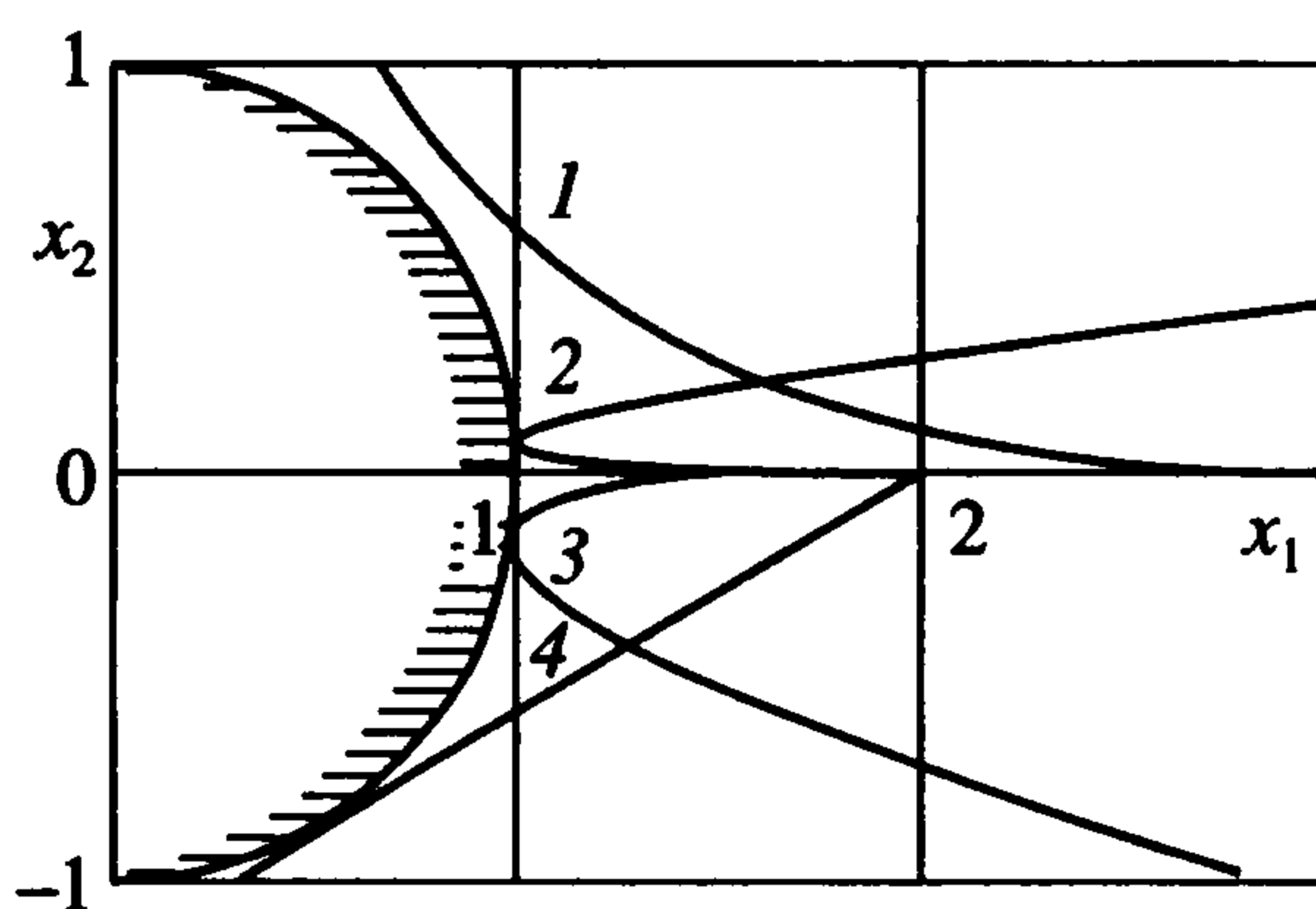


Фиг. 3

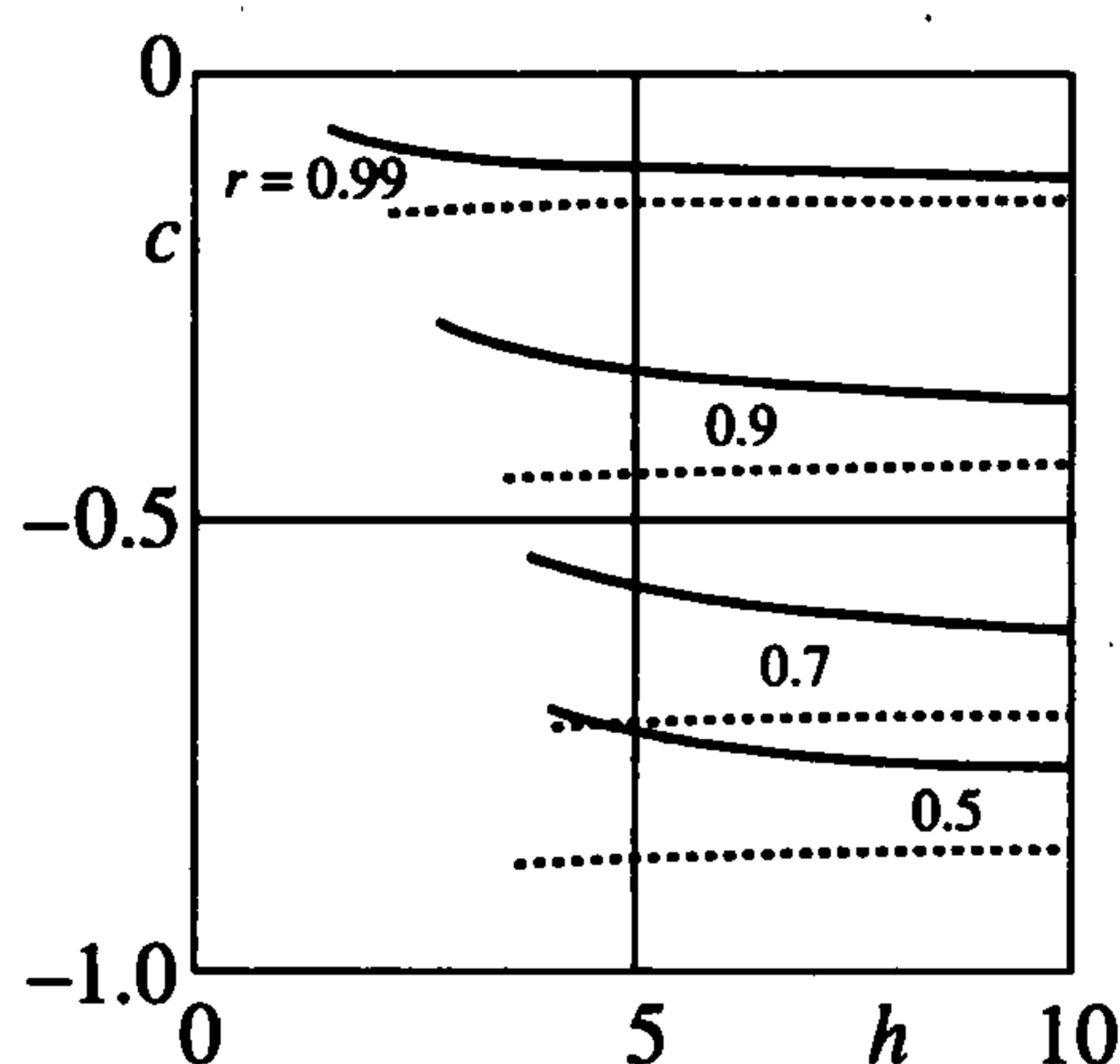
механики это означает, что если в начале движения вектор скорости направлен почти точно в начало координат, то при значительном начальном расстоянии даже небольшая разница в значениях угла оказывается решающей при определении возможности уклонения от препятствия. При малом стартовом расстоянии от сферы величина угла практически не играет никакой роли. Если  $h \rightarrow \infty$ , то каждая из кривых выходит на свою горизонтальную асимптоту, равную  $-(l^2 - 1)^{1/2}/l$ . Это соответствует косинусу угла, образуемого касательной к единичной сфере с центром в начале координат с осью абсцисс, причем касательная проведена из начальной точки траектории. Очевидно, что в случае меньших углов уклонение возможно при любой начальной скорости и поставленная в данной работе задача содержательна только тогда, когда в начальный момент времени вектор скорости направлен внутрь соответствующего конуса. Как видно из фиг. 2, переход от  $l < 2$  к  $l > 2$  осуществляется непрерывно, без скачков. Точка пересечения кривой для  $l = 2$  с осью абсцисс отвечает  $h = 2^{1/2}$ .

Рассмотрим также семейство зависимостей  $l = l(h)$  при различных постоянных  $c$ . Оно изображено на фиг. 3. Для всех значений  $c$  область  $M$  (5.1) лежит левее и выше соответствующей кривой. При  $h \ll 1$  для зависимости  $l(h, c)$  имеет место приближенное представление  $l \approx 1 + h^2(1 - c^2/2)$ . Каждый из графиков, кроме соответствующего  $c = -1$ , выходит на свою асимптоту  $l = (1 - c^2)^{-1/2}$  по причинам, указанным выше. Кривая для  $c = -1$  при  $0 < h < 2^{1/2}$  описывается формулой  $l = 1 + h^2/2$ , а при  $h > 2^{1/2}$  является прямой линией  $l = 2^{1/2}h$ .

В заключение приведем примеры траекторий для различных начальных условий. На фиг. 4 показана плоскость  $(x_1, x_2)$ , которой в начальный момент времени принадлежат вектор скорости и радиус-вектор материальной точки. Штриховкой выделена половина единичной сферы, встречи с которой требуется избежать. Все траектории начинаются на оси абсцисс  $x_1$ . Кривая 1 соответствует  $\alpha = 179.99^\circ$ ,  $x_1^0 = 3$ ,  $|v_0| = 2$ . Оптимальное управление движением с этими значениями параметров позволяет точке в "режиме уклонения" пролететь сравнительно далеко от препятствия. Заметим, что если бы было применено управление, направленное против скорости ("режим торможения"), то точку удалось бы остановить лишь на самой поверхности сферы, а сколь угодно малое увеличение начальной скорости привело бы к столкновению. Траектория 2 начинается при  $\alpha = 179.99^\circ$ ,  $x_1^0 = 2$ ,  $|v_0| = 2^{1/2}$ . В этом случае управление происходит в "режиме торможения", что хорошо видно по форме кривой, которая



Фиг. 4



Фиг. 5

почти касается сферы. Если бы скорость была направлена точно в начало координат, то точка двигалась бы точно по оси абсцисс до полной остановки на поверхности сферы, после чего началось бы обратное движение. Для траектории 3 были выбраны параметры  $\alpha = -175^\circ$ ,  $x_1^0 = 1.5$ ,  $|v^0| \approx 1.0114$ , которые приводят к касанию сферы. Она тоже может служить примером применения "режима уклонения". Траектория 4 начинается в точке  $x_1^0 = 2$ , причем скорость велика  $|v^0| = 10$ , а  $\alpha = -150^\circ$ . Как видно из графика, управление лишь немного отклонило эту кривую от прямой линии, касающейся препятствия. Очевидно, что для таких значений  $x_1^0$  и  $\alpha$  уклонение осуществимо при сколь угодно большой начальной скорости.

**6. Сопоставление результатов с решением задачи о минимизации промаха.** Решенная задача тесно связана с другими задачами оптимального управления. Можно, например, рассмотреть задачу отыскания зависимости минимального расстояния, на которое материальная точка приблизится к началу координат, от начальных данных. Несмотря на то, что с точки зрения теории оптимального управления новая задача построения программного управления заметно отличается от решенной задачи построения синтеза, математически ее решение получается простой заменой безразмерных переменных в (5.10) таким образом, чтобы длина начального радиус-вектора точки (а не величина радиуса сферы) была равна единице, а именно,  $l \rightarrow 1/r$ ,  $h \rightarrow h/\sqrt{r}$ , где  $r$  – минимальное расстояние.

Интересно сравнить это "максимизирующее промах" решение с решением задачи о минимизации промаха [10]. На фиг. 5 кривые, полученные по формулам из [10], показаны сплошными линиями, а по (5.10) – пунктиром. Очевидно, что сопоставление можно произвести лишь для тех значений  $c$  и  $h$ , при которых происходит пролет материальной точки мимо начала координат, т. е. когда траектория, приводящая точку

точно в начало координат, сначала проходит мимо, а потом "возвращается". В связи с этим все зависимости начинаются при разных значениях  $h$ . Параметром в обоих семействах служит минимальное расстояние  $r$ . Область выше сплошной кривой отвечает случаю, когда минимально возможный промах больше, чем соответствующее значение  $r$ , а область ниже пунктирной кривой – случаю, когда максимально возможное отклонение меньше  $r$ . Нетрудно заметить (особенно при достаточно больших значениях  $h$ , например, близких к 10), что каждая пара кривых из разных семейств, соответствующая одному значению параметра  $r$ , образует "воронку", обращенную широким концом в сторону малых  $h$ . Ширина "воронки" характеризует возможности нашего управления. Они естественным образом сужаются при больших начальных скоростях, когда не хватает времени для маневра, а также при  $r$ , приближающихся к единице, когда пространственные возможности для маневра ограничены (напомним, что начальное расстояние всюду равно 1). Таким образом, обе задачи дополняют друг друга, позволяя лучше понять особенности управляемого движения в рассматриваемой системе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02–01–00157, 02–01–00201) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00–15–96013).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
4. Троицкий В.А. Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л.: Машиностроение, 1976. 248 с.
5. Isaacs R. Differential Games. N.Y.: J.Wiley, 1965 = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
6. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. М.: Наука, 1971. 113 с.
7. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
8. Акуленко Л.Д., Шматков А.М. Наискорейшее попадание на сферу с нулевой скоростью // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 1. С. 28–32.
9. Акуленко Л. Д. Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 724–735.
10. Кузнецов А.Г., Черноушко Ф.Л. Об оптимальном управлении, минимизирующем экстремум функции фазовых координат // Кибернетика. 1968. № 3. С. 50–55.