УДК 531.36; 62-50

© 2003 г. И. М. Ананьевский

НЕПРЕРЫВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ВОЗМУЩЕННЫМИ МЕХАНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Исследуется задача синтеза непрерывного управления для лагранжевой склерономной механической системы в предположении, что на систему действуют неконтролируемые ограниченные возмущения и вектор управляющих сил ограничен по норме. Предлагается закон управления по обратной связи, позволяющий приводить систему в заданное состояние покоя за конечное время. Применяемый подход основан на методах теории устойчивости движения. Для построения закона управления и его обоснования используется функция Ляпунова, заданная неявно. Доказано существование такой функции, установлены ее свойства. Приведены результаты численного моделирования динамики различных механических систем, управляемых по предложенному закону. Показано, что для материальной точки, перемещающейся вдоль горизонтальной прямой, предложенный алгоритм управления качественно близок к оптимальному по быстродействию управлению.

Можно выделить две основные группы алгоритмов, предлагаемых для управления динамическими системами: алгоритмы, обеспечивающие (асимптотическую) устойчивость (стабилизирующие управления), и законы управления, позволяющие приводить систему в терминальное состояние за конечное время. И хотя на практике точное приведение системы в заданное состояние невозможно и система приводится в некоторую его окрестность, для решения таких задач алгоритмы второй группы предпочтительнее с точки зрения быстродействия. При уменьшении размеров терминальной окрестности время движения системы, управляемой с помощью алгоритмов второй группы, остается ограниченным, тогда как при применении стабилизирующих управлений это время неограниченно растет.

Другой отличительной особенностью постановок задач управления служит наличие ограничений, накладываемых на управляющие переменные. На практике при управлении механическими системами такие ограничения, как правило, присутствуют.

Были предложены [1–7] алгоритмы управления, которые позволяют приводить лагранжеву склерономную систему в заданное терминальное состояние за конечное время в предположении, что управляющие силы ограничены и система подвержена действию неконтролируемых возмущений. Для такого приведения применялись подходы, основанные на методах декомпозиции и использовании программных траекторий [1–4], и линейные обратные связи с кусочно-постоянными коэффициентами [5–7]. В результате применения этих и некоторых других методов получаются законы управления, которые описываются, вообще говоря, разрывными функциями времени и, следовательно, трудно применимы на практике.

Ниже развивается подход к построению непрерывных законов управления по обратной связи, которые обеспечивали бы приведение механической системы в терминальное состояние за конечное время. Предлагаемый закон управления может быть истолкован как линейная обратная связь, коэффициенты которой зависят от фазовых переменных. Коэффициенты возрастают до бесконечности по мере приближения траектории к терминальному состоянию, однако управляющие силы остаются ограниченными и удовлетворяют наложенным условиям.

1. Постановка задачи. Рассмотрим склерономную механическую систему, динамика которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = u + S \tag{1.1}$$

Здесь q, $\dot{q} \in R^n$ – векторы обобщенных координат и скоростей, $T(q, \dot{q}) = \langle A(q)\dot{q}, \dot{q}\rangle/2$ – кинетическая энергия системы ($\langle\cdot, \cdot\rangle$ означает скалярное произведение), u – вектор обобщенных управляющих сил, S – вектор неизвестных обобщенных сил, которые будем называть возмущениями.

Предполагается, что положительно определенная симметрическая матрица кинетической энергии $A(q) \in C^1$ известна, ее собственные числа при любых q лежат на отрезке $[m, M]$, $0 < m \le M$, т.е.

$$mz^2 \le \langle A(q)z, z\rangle \le Mz^2, \ \forall q, z \in R^n \tag{1.2}$$

а частные производные матрицы $A(q)$ равномерно ограничены по норме, т.е.

$$|\partial A(q)/\partial q_i| \le C, \ C > 0, \ i = 1, \dots, n \tag{1.3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $z^2 = \langle z, z\rangle$, а $|\cdot|$ означает евклидову норму вектора или матрицы (под нормой матрицы понимается норма соответствующего линейного оператора в евклидовом пространстве).

Вектор неизвестных возмущений $S(t, q, \dot{q})$ может быть произвольной вектор-функцией, в том числе и разрывной, удовлетворяющей каким-либо условиям существования решения системы (1.1) и условию

$$|S(t, q, \dot{q})| \le S_0, \ S_0 > 0 \tag{1.4}$$

На вектор управляющих сил также накладывается ограничение

$$|u| \le U, U > 0 \tag{1.5}$$

Фазовые координаты и скорости q, $\dot{q}$ считаются доступными измерению в каждый момент времени.

Задача. Построить такое управление $u(q, \dot{q})$ как непрерывную вектор-функцию фазовых переменных q, $\dot{q}$ на множестве $R^{2n}\backslash\{(\bar{q}, 0)\}$, удовлетворяющую условию (1.5), и указать такую область допустимых начальных состояний, что любая траектория системы (1.1), начинающаяся в этой области, придет в заданное терминальное состояние $(\bar{q}, 0)$ за конечное время, каковы бы ни были возмущения S, подчиняющиеся ограничению (1.4)

2. Закон управления. Отметим, что терминальное состояние является состоянием покоя невозмущенной системы (1.1). Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{q} = 0$, т.е. терминальное состояние совпадает с началом координат фазового пространства. Этого можно добиться с помощью соответствующего выбора обобщенных координат.

Определим управление в виде

$$u(q, \dot{q}) = -a(q, \dot{q})A(q)\dot{q} - b(q, \dot{q})q \tag{2.1}$$

где

$$a(q, \dot{q}) = \sqrt{\frac{b(q, \dot{q})}{M}}, \ b(q, \dot{q}) = \frac{3U^2}{8V(q, \dot{q})} \tag{2.2}$$

$$V(q, \dot{q}) = T + \frac{1}{2}b(q, \dot{q})q^2 + \frac{1}{2}a(q, \dot{q})\langle A(q)\dot{q}, q\rangle, \ q^2 + \dot{q}^2 > 0 \tag{2.3}$$

Соотношения (2.2), (2.3) задают функции $a(q,\dot q)$, $b(q,\dot q)$ и $V(q,\dot q)$ неявным образом.

Теорема 1. В области $R^{2n}\backslash\{(0,0)\}$ существуют непрерывно дифференцируемые функции $a(q,\dot q)$, $b(q,\dot q)$ и $V(q,\dot q)$, удовлетворяющие соотношениям (2.2), (2.3), причем $V>0$.

Доказательство. Подставив выражения для функций $a(q,\dot q)$ и $b(q,\dot q)$ в равенство (2.3), после преобразований получим

$$16V^2(q,\dot q) = 16T(q,\dot q)V(q,\dot q)+3U^2q^2+\frac{2\sqrt6}{\sqrt M}\langle A(q)\dot q,q\rangle V^{1/2}(q,\dot q) \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} x = V^{1/2}(q,\dot q),\ A_1(q,\dot q) = \langle A(q)\dot q,q\rangle \\ \alpha(q,\dot q) = 4T^{1/2}(q,\dot q),\ \beta(q,\dot q) = \frac{2\sqrt6U}{\sqrt M}A_1(q,\dot q),\ \gamma(q,\dot q) = \sqrt3U|q| \end{gathered} \tag{2.5}$$

и перепишем равенство (2.4) в виде

$$F(q,\dot q,x) \overset{\text{def}}{=} 16x^4-\alpha^2(q,\dot q)x^2-\beta(q,\dot q)x-\gamma^2(q,\dot q) = 0 \tag{2.6}$$

Будем рассматривать это равенство как уравнение относительно x. Покажем, что при любых q, $\dot q$, $q^2+\dot q^2>0$, существует единственный положительный корень уравнения (2.6) и его кратность равна единице.

В силу неравенства Коши и предположения (1.2) выполняются соотношения

$$\beta^2(q,\dot q)=\frac{24U^2}{M}A_1(q,\dot q)^2\le\frac{24U^2}{M}T(q,\dot q)\langle A(q)q,q\rangle\le24U^2T(q,\dot q)q^2=\alpha^2(q,\dot q)\gamma^2(q,\dot q)$$

откуда вытекает, что

$$|\beta|\le\gamma\alpha \tag{2.7}$$

Отметим также, что в силу формул (2.5) и условия (1.2) в области $R^{2n}\backslash\{(0,0)\}$ тождество $\alpha(q,\dot q)=\gamma(q,\dot q)=0$ невозможно.

Зафиксируем на время коэффициенты α, β, γ и докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Каждое уравнение вида

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} 16x^4-\alpha^2x^2-\beta x-\gamma^2 = 0 \tag{2.8}$$

коэффициенты которого постоянны, удовлетворяют неравенству $\alpha^2+\gamma^2>0$ и связаны соотношением (2.7), имеет единственный вещественный положительный корень, и его кратность равна единице.

Доказательство. Докажем сначала, что если $\alpha,\gamma>0$, то существует ровно два вещественных корня – положительный и отрицательный, причем положительный имеет кратность единица.

Так как $f(0)=-\gamma^2<0$, а при больших по модулю значениях переменной x имеет место неравенство $f(x)>0$, то существуют положительный и отрицательный корни уравнения (2.8). Убедимся, что других вещественных корней нет. Предположим противное: пусть какое-то из уравнений семейства (2.7), (2.8), где $\alpha,\gamma>0$, имеет более двух вещественных корней, т. е. три или четыре корня. Покажем, что в этом случае обязательно найдется уравнение, имеющее кратный вещественный корень.

Известно [8], что если существует ровно три корня, то один из них кратный.

Пусть теперь коэффициенты α_1, β_1, γ_1 таковы, что $|\beta_1| \le \alpha_1\gamma_1$ и уравнение (2.8) имеет четыре вещественных корня. При достаточно большом γ_2 уравнение (2.8) с коэффициентами α_1, β_1, γ_2 имеет ровно два вещественных корня и $|\beta_1| \le \alpha_1\gamma_2$. Следовательно, при непрерывном изменении коэффициента γ от γ_1 до γ_2 число корней меняется и найдется значение γ_3, при котором появится кратный корень x_0 уравнения (2.8). Это значение γ_3, очевидно, также удовлетворяет соотношению (2.7).

Так как число x_0 – кратный корень уравнения $f(x) = 0$ с коэффициентами α_1, β_1, γ_3, то оно является и корнем уравнения $f'(x) = 0$ с коэффициентами α_1, β_1, которое имеет вид

$$f'(x) = 64x^3 - 2\alpha_1^2 x - \beta_1 = 0 \tag{2.9}$$

Умножим уравнение (2.8), где $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_3$, на –4, а (2.9) – на x и сложим их. Получим уравнение

$$2\alpha_1^2 x^2 + 3\beta_1 x + 4\gamma_3^2 = 0 \tag{2.10}$$

корнем которого должно быть число x_0. В силу условия (2.7) и неравенств α_1, $\gamma_3 > 0$ дискриминант $D = 9\beta_1^2 - 32\alpha_1^2\gamma_3^2$ уравнения (2.10) отрицательный, поэтому уравнение (2.7) не имеет вещественных корней. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы при условии $\alpha, \gamma > 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$. Если $\alpha = 0$, то в силу уравнения (2.7) выполнено равенство $\beta = 0$, уравнение (2.8) принимает вид $x^4 = \gamma^2/16$, $\gamma > 0$, имеет единственный положительный корень и кратность корня равна единице.

В случае, когда $\gamma = 0$, из уравнения (2.7) вытекает $\beta = 0$, уравнение (2.8) сводится к уравнению $x^4 = \alpha^2 x^2$, $\alpha > 0$, у которого существует три вещественных корня. Один из этих корней – $x = 0$ – имеет кратность два, а единственный положительный – кратность единица.

Продолжим доказательство теоремы 1 и будем рассматривать теперь коэффициенты α, β и γ как функции фазовых переменных q, $\dot q$. Из утверждения леммы вытекает, что при любых $(q, \dot q) \in R^{2n}\backslash\{(0, 0)\}$ полиномиальное уравнение (2.6) имеет единственный вещественный положительный корень $x_0(q, \dot q)$ и его кратность равна единице. Следовательно,

$$\partial F/\partial x(q, \dot q, x_0(q, \dot q)) \ne 0, \quad (q, \dot q) \in R^{2n}\backslash\{(0,0)\}$$

и по теореме о неявной функции $x_0(q, \dot q) \in C^1(R^{2n}\backslash\{(0, 0)\})$. Тогда функция $V(q, \dot q) = x_0^2(q, \dot q)$, а с нею и функции $a(q, \dot q)$, $b(q, \dot q)$, задаваемые соотношениями (2.2), непрерывно дифференцируемы в области $R^{2n}\backslash\{(0, 0)\}$, причем $V > 0$. Теорема доказана.

Принимая во внимание утверждение теоремы 1 и формулу (2.1), приходим к выводу, что управляющая функция $u(q, \dot q)$ определена и непрерывно дифференцируема в области $R^{2n}\backslash\{(0, 0)\}$.

3. Обоснование закона управления. Найдем область допустимых начальных состояний и покажем, что любая траектория системы (1.1), (2.1), начинающаяся в этой области, придет в начало координат за конечное время. Воспользуемся для этого методами теории устойчивости и покажем, что функция V представляет собой функцию Ляпунова рассматриваемой системы.

Оценим $V(q, \dot q)$ сверху и снизу. Применяя неравенства Коши, формулы (2.2), условия (1.2) и обозначения (2.5) получаем соотношения

$$|a(q, \dot q)A_1(q, \dot q)| \le |a(q, \dot q)|(2T(q, \dot q)\langle A(q)q, q\rangle)^{1/2} \le$$

$$\le T(q, \dot q) + \frac{1}{2}a^2(q, \dot q)\langle A(q)q, q\rangle \le T(q, \dot q) + \frac{1}{2}b(q, \dot q)q^2$$

откуда вытекают оценки

$$V_-(q, \dot{q}) \le V(q, \dot{q}) \le 3V_-(q, \dot{q}) \tag{3.1}$$

где

$$V_-(q, \dot{q}) = \frac{1}{4}(2T(q, \dot{q}) + b(q, \dot{q})q^2) \tag{3.2}$$

Подставим в оценки (3.1) выражения (2.2) и (3.2) для функций $b(q, \dot{q})$ и $V_-(q, \dot{q})$. После преобразований получим неравенства

$$\xi(q, \dot{q}) \le 32V^2(q, \dot{q}) \le 3\xi(q, \dot{q}), \quad \xi(q, \dot{q}) = 16T(q, \dot{q})V(q, \dot{q}) + 3U^2q^2$$

разрешая которые относительно $V(q, \dot{q})$, приходим к оценкам (ниже аргументы q, $\dot{q}$ для краткости опущены)

$$\frac{1}{4}T(1 + \sqrt{1+3\lambda}) \le V \le \frac{3}{4}T(1 + \sqrt{1+\lambda}), \quad \lambda = \frac{U^2q^2}{2T^2} \tag{3.3}$$

Отметим, что справа и слева в (3.3) стоят функции фазовых переменных q, $\dot{q}$, выраженные явным образом через известные параметры задачи. Из вида соотношений (3.3) следует, что функция $V(q, \dot{q})$ может быть доопределена нулем в точке (0, 0) с сохранением непрерывности, однако дифференцируемой в начале координат она не будет. Для механической системы, которая представляет собой движущуюся вдоль горизонтальной прямой материальную точку, вид функции V приведен в разд. 5.

Обратимся к вычислению производной $\dot{V}$. Продифференцируем функции $a(q, \dot{q})$, $b(q, \dot{q})$ и $V(q, \dot{q})$ в силу системы (1.1), (2.1). Получим

$$\begin{gathered} \dot{a} = -\frac{a}{2V}\dot{V}, \quad \dot{b} = -\frac{b}{V}\dot{V} \\ \dot{V} = \dot{T} + b\langle q, \dot{q}\rangle + aT + \frac{a}{2}\left\langle \frac{d}{dt}A\dot{q}, q\right\rangle - \frac{\dot{V}}{2V}\left(bq^2 + \frac{a}{2}A_1\right) \end{gathered} \tag{3.4}$$

По теореме об изменении кинетической энергии склерономной лагранжевой системы и по определению вектор-функции $u(q, \dot{q})$ имеем

$$\dot{T} = \langle u + S, \dot{q}\rangle = -2aT - b\langle \dot{q}, q\rangle + \langle S, \dot{q}\rangle \tag{3.5}$$

а в силу уравнений (1.1)

$$\frac{d}{dt}A\dot{q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} + u + S \tag{3.6}$$

Подставив равенства (3.5), (3.6) и (2.1) в последнее равенство (3.4), получим следующее соотношение для производной функции $V(q, \dot{q})$ (всюду далее суммирование от $i = 1$ до $i = n$):

$$\dot{V} = -a\left(T + \frac{a}{2}A_1 + \frac{b}{2}q^2\right) + \frac{a}{4}\left\langle\left(\sum \frac{\partial A}{\partial q_i}q_i\right)\dot{q}, \dot{q}\right\rangle - \frac{\dot{V}}{2V}\left(bq^2 + \frac{a}{2}A_1\right) + \left\langle S, \dot{q} + \frac{a}{2}q\right\rangle \tag{3.7}$$

Преобразуем и оценим отдельные слагаемые в правой части равенства (3.7). Из определений (2.2), (2.3), (2.5) функций $a(q, \dot{q})$, $V(q, \dot{q})$ и $A_1(q, \dot{q})$ следует

$$a\left(T + \frac{a}{2}A_1 + \frac{b}{2}q^2\right) = aV = \frac{\sqrt{3}U}{2\sqrt{2M}}V^{1/2} \tag{3.8}$$

В силу неравенства Коши, условия (1.2) и соотношений (2.2), (3.1), (3.2) имеем

$$\left|\dot{q}+\frac{a}{2}q\right|^2 = \dot{q}^2+\frac{a^2}{4}q^2+a\langle\dot{q}, q\rangle \le \frac{5}{4}(\dot{q}^2+a^2q^2) \le \frac{5}{4}\left(\frac{2}{m}T+\frac{b}{M}q^2\right) \le \frac{5}{m}V_- \le \frac{5}{m}V$$

Отсюда и из условия (1.4) вытекает неравенство

$$\left|\left\langle S, \dot{q}+\frac{a}{2}q\right\rangle\right| \le S_0\sqrt{\frac{5}{m}}V^{1/2} \tag{3.9}$$

Используя условие (1.3) и оценку

$$\sum|q_i| \le \sqrt{n}|q|$$

можем заключить, что

$$\left|\sum\frac{\partial A}{\partial q_i}q_i\right| \le \sqrt{n}C|q| \tag{3.10}$$

В силу соотношений (1.2), (2.2), (3.1) и (3.2) справедливы неравенства

$$q^2 \le \frac{4}{b}V_- \le \frac{4}{Ma^2}V, \quad \dot{q}^2 \le \frac{2}{m}T \le \frac{4}{m}V_- \le \frac{4}{m}V$$

Отсюда и из неравенства (3.10) получаем

$$\left|\frac{a}{4}\left\langle\left(\sum\frac{\partial A}{\partial q_i}q_i\right)\dot{q}, \dot{q}\right\rangle\right| \le \frac{a}{4}\sqrt{n}C|q|\dot{q}^2 \le \frac{2\sqrt{n}C}{m\sqrt{M}}V^{3/2} \tag{3.11}$$

Подставив соотношения (3.8), (3.9) и (3.11) в выражение (3.7) для производной $\dot{V}(q, \dot{q})$ и перенеся последнее слагаемое в (3.7) в левую часть, приходим к неравенству

$$B\dot{V} \le -\delta(q, \dot{q})V^{1/2} \tag{3.12}$$

где

$$\delta(q, \dot{q}) = \frac{\sqrt{3}U}{2\sqrt{2M}} - S_0\sqrt{\frac{5}{m}} - \frac{2\sqrt{n}C}{m\sqrt{M}}V(q, \dot{q})$$

$$B(q, \dot{q}) = 1+\frac{b(q, \dot{q})}{2V(q, \dot{q})}q^2+\frac{a(q, \dot{q})}{4V(q, \dot{q})}A_1(q, \dot{q}) = \frac{1}{V}\left(T+bq^2+\frac{3a}{4}A_1\right)$$

(последнее равенство в цепочке получено с помощью выражения (2.3)).

В силу неравенства Коши, формулы (2.2) и условия (1.2) справедливы соотношения

$$\left|\frac{3}{4}aA_1(q, \dot{q})\right| \le \frac{1}{2}T(q, \dot{q})+\frac{9a^2}{16}\langle Aq, q\rangle \le \frac{1}{2}T+\frac{3b}{4}q^2$$

$$\left|\frac{3}{4}aA_1(q, \dot{q})\right| \le \frac{3}{2}T(q, \dot{q})+\frac{3a^2}{16}\langle Aq, q\rangle \le 2T+\frac{b}{2}q^2$$

Используя первое неравенство для оценки функции $B(q, \dot{q})$ снизу, а второе – для оценки сверху, получаем

$$0 < \frac{1}{4V}(2T+bq^2) \le B(q, \dot{q}) \le \frac{3}{V}\left(T+\frac{b}{2}q^2+\frac{a}{2}A_1\right) = 3 \tag{3.13}$$

Так как $B(q, \dot{q}) > 0$, то для того, чтобы производная $\dot{V}(q, \dot{q})$ была отрицательна, достаточно, чтобы было отрицательно выражение в скобках в правой части неравенства (3.12). Положим

$$V(t) = V(q(t), \dot{q}(t)),\ B(t) = B(q(t), \dot{q}(t)),\ \delta(t) = \delta(q(t), \dot{q}(t)) \tag{3.14}$$

и запишем неравенство (3.12) в виде

$$\dot{V}(t) \le -\frac{\delta(t)}{B(t)} V^{1/2}(t) \tag{3.15}$$

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени t_0 выполнено условие

$$\delta(t_0) > 0 \tag{3.16}$$

Тогда производная функции V в силу системы (1.1), (2.1) удовлетворяет неравенству

$$\dot{V}(t) \le -\frac{\delta(t_0)}{3} V^{1/2}(t),\ t \ge t_0 \tag{3.17}$$

Доказательство. Из соотношений (3.13), (3.15) и условия (3.16) вытекает

$$\dot{V}(t_0) \le -\frac{\delta(t_0)}{B(t_0)} V^{1/2}(t_0) \le -\frac{\delta(t_0)}{3} V^{1/2}(t_0) < 0$$

Следовательно, при $t > t_0$ в достаточно малой окрестности точки t_0 выполнено неравенство $V(t) < V(t_0)$. Это неравенство оказывается выполненным при всех $t > t_0$.

Действительно, предположим противное. Пусть $t' > t_0$ – первый момент времени, когда функция V вновь принимает значение $V(t_0)$. Тогда $V(t) < V(t_0)$ при $t \in (t_0, t')$. Отсюда, из вида (3.14) функции $\delta(t)$ и условия (3.16) заключаем, что

$$\delta(t) > \delta(t_0) > 0 \tag{3.18}$$

и, следовательно, в силу (3.15) выполнено неравенство $\dot{V}(t) < 0$ при $t \in (t_0, t')$.

С другой стороны, так как $V(t_0) = V(t')$, то по теореме Лагранжа существует такая точка $t'' \in (t_0, t')$, что $\dot{V}(t'') = 0$. Данное противоречие показывает, что $V(t) < V(t_0)$ при $t > t_0$.

Из полученного неравенства вытекает справедливость оценки $\delta(t) > \delta(t_0) > 0$ при всех $t > t_0$, откуда в силу соотношений (3.13), (3.15) получаем неравенство (3.17). Теорема доказана.

Из соотношений (3.3), (3.17) следует, что значение функции V вдоль траектории системы (1.1), (2.1) стремится к нулю, а сама траектория стремится к началу координат.

Для оценки времени движения проинтегрируем неравенство (3.17) на отрезке $[t_0, t]$. Получим

$$t - t_0 \le \frac{6}{\delta(t_0)} (V^{1/2}(t_0) - V^{1/2}(t))$$

Учитывая, что $V(t) \to 0$ с ростом t, приходим к следующей оценке времени движения τ системы (1.1), (2.1) из начального состояния $q_0 = q(t_0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(t_0)$ до терминального состояния $q = \dot{q} = 0$:

$$\tau \le 6V^{1/2}(q_0, \dot{q}_0)/\delta(q_0, \dot{q}_0) \tag{3.19}$$

Проверим теперь, что управляющая вектор-функция $u(q, \dot{q})$ удовлетворяет условию (1.5). В силу неравенства Коши имеем

$$u^2 = a^2|A\dot{q}|^2 + b^2q^2 + 2abA_1 \le \frac{4}{3}(a^2|A\dot{q}|^2 + b^2q^2 + abA_1) \tag{3.20}$$

Известно [8], что если $A(q)$ – положительно определенная симметрическая матрица, удовлетворяющая условиям (1.2), то матрица $A^{-1}(q)$ также положительно определенная и симметрическая, а ее собственные числа принадлежат отрезку $[1/M,\ 1/m]$. Следовательно,

$$z^2/M \le \langle A^{-1}(q)z, z\rangle,\ \ \forall q,\ \ z \in R^n$$

Подставив в это неравенство $z = A(q)\dot{q}$, получим соотношения

$$|A\dot{q}|^2 = z^2 \le M\langle A^{-1}z, z\rangle = 2MT$$

с помощью которых оценку (3.20) можно продолжить следующим образом:

$$u^2 \le \frac{4}{3}(2Ma^2T + b^2q^2 + abA_1)$$

Воспользовавшись выражениями (2.2), (2.3) для функций a и V, приходим к неравенству

$$u^2 \le \frac{8b}{3}V = U^2$$

из которого вытекает, что ограничения (1.5) выполняются вдоль траектории системы (1.1), (2.1).

Отметим некоторые свойства управляющей вектор-функции $u(q,\ \dot{q})$. Вычислим ее значения на подпространствах $q = 0$ и $\dot{q} = 0$ фазового пространства $(q,\ \dot{q}) \in R^{2n}$. Пусть $q = 0$. Тогда

$$V(0, \dot{q}) = T(0, \dot{q}),\ \ a(0, \dot{q}) = \frac{\sqrt{3}U}{2(2MT(0, \dot{q}))^{1/2}}$$

Следовательно,

$$u(0, \dot{q}) = -\frac{\sqrt{3}U}{2(2MT(0, \dot{q}))^{1/2}}A(0)\dot{q} = -\frac{\sqrt{3}U}{2(2MT(0, \dot{e}))^{1/2}}A(0)\dot{e} \tag{3.21}$$

где e – единичный вектор, коллинеарный вектору $\dot{q}$.

Если $\dot{q} = 0$, то

$$V(q, 0) = \frac{b(q, 0)}{2}q^2,\ \ b(q, 0) = \frac{3U^2}{4b(q, 0)q^2}$$

откуда получаем

$$b(q, 0) = \frac{\sqrt{3}U}{2|q|},\ \ u(q, 0) = -\frac{\sqrt{3}U}{2|q|}q \tag{3.22}$$

Таким образом, вектор управляющей силы $u(q,\ \dot{q})$ на подпространствах $q = 0$ и $\dot{q} = 0$ постоянен вдоль любой прямой, проходящей через начало координат фазового пространства, и направлен к началу координат.

Предложенный закон управления может быть сформулирован без использования функций $a(q,\ \dot{q})$ и $b(q,\ \dot{q})$. Подставим с этой целью в выражение (2.1) для $u(q,\ \dot{q})$ формулы (2.2) для a и b. Получим новое определение управляющей вектор-функции

$$u(q, \dot{q}) = -\frac{\sqrt{3}U}{2(2MV(q, \dot{q}))^{1/2}}\dot{q} - \frac{3U^2}{8V(q, \dot{q})}q$$

причем функция $V(q,\ \dot{q})$ задается неявно с помощью уравнения (2.4).

4. Достаточные условия приведения. Из соотношений (3.14), (3.16) вытекают следующие достаточные условия достижения системой заданного терминального состояния:

$$U > S_* + \frac{4\sqrt{2n}C}{\sqrt{3}m}V(q_0, \dot{q}_0), \quad S_* = 2\sqrt{\frac{10M}{3m}}S_0 \tag{4.1}$$

Приведенное условие связывает максимально допустимые величины управления U и возмущений S_0 и область допустимых начальных состояний системы. В частности, в окрестности терминального состояния, где функция $V(q, \dot{q})$ мала, условие (4.1) может быть записано в виде

$$U > S_*$$

Данное условие характеризует превосходство управляющих сил над возмущениями, достаточное для достижения цели управления.

Если возмущения отсутствуют, т. е. $S_0 = 0$, то предложенный закон управления приводит систему (1.1) в терминальное состояние за конечное время из любой точки области допустимых начальных состояний, задаваемой неравенством

$$V(q, \dot{q}) \le \sqrt{\frac{3}{2n}\frac{mU}{4C}}$$

Принимая во внимание соотношения (3.3), можно утверждать, что эта область заведомо содержит эллипсоид

$$T(q, \dot{q}) + \left(T^2(q, \dot{q}) + \frac{U^2}{2}q^2\right)^{1/2} \le \frac{mU}{\sqrt{6n}C}$$

Заметим, что закон управления, задаваемый соотношениями (2.1) – (2.3), не зависит от постоянных S_0, C и начального состояния $(q_0, \dot{q}_0)$. Поэтому он может быть формально применен и в случае, когда неравенство (4.1) не выполнено. Компьютерное моделирование динамики различных систем показывает, что предложенный закон управления эффективен далеко за пределами достаточных условий (4.1). Это объясняется тем, что условие (4.1) гарантирует монотонное убывание функции V вдоль траектории системы (1.1), управляемой по закону (2.1)–(2.3). Однако функция V может стремиться к нулю немонотонно, и траектории системы будут при этом попрежнему приходить в терминальное состояние. Приведенные ниже результаты моделирования иллюстрируют такое поведение системы.

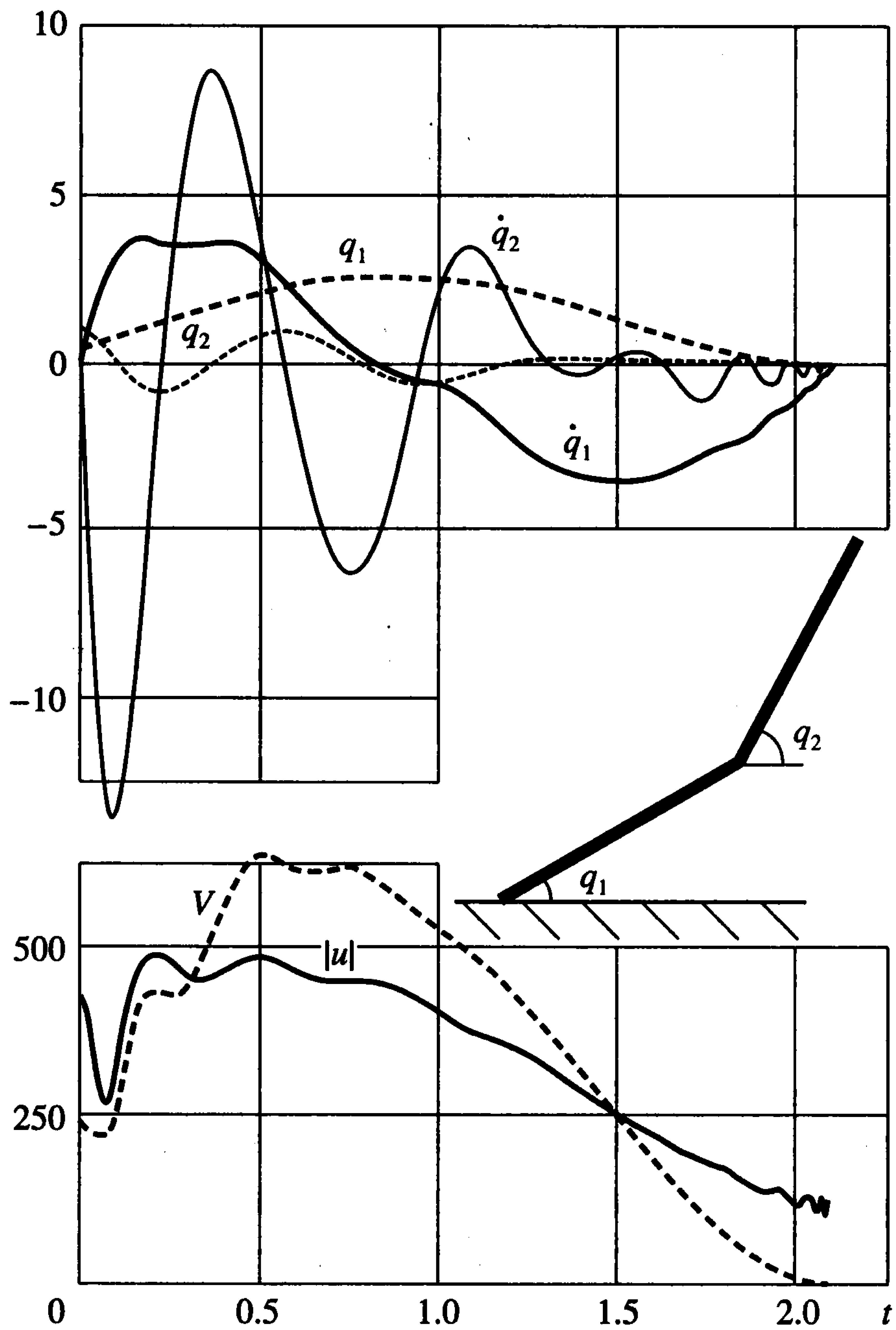
5. Результаты моделирования. Для проверки эффективности предложенного закона управления и иллюстрации его работы было проведено численное моделирование управляемых движений двузвенника на неподвижном основании. Предполагалось, что двузвенник перемещается в горизонтальной плоскости, т. е. в отсутствие силы тяжести. В качестве обобщенных координат системы q_1, q_2 были выбраны шарнирные углы звеньев в неподвижной системе координат (врезка к фиг. 1).

Матрица кинетической энергии двузвенника имеет вид

$$A(q) = \left\| \begin{matrix} R_1 & R_3\cos(q_1 - q_2) \\ R_3\cos(q_1 - q_2) & R_2 \end{matrix} \right\|$$

а уравнения движения могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= (R_2Q_1 - R_3Q_2\cos(q_1 - q_2))/\Delta \\ \ddot{q}_2 &= (R_1Q_2 - R_3Q_1\cos(q_1 - q_2))/\Delta \end{aligned} \tag{5.1}$$



Фиг. 1

где

$$Q_1 = u_1 + S_1 - R_3 \sin(q_1 - q_2)\dot q_2^2, \; Q_2 = u_2 + S_2 + R_3 \sin(q_1 - q_2)\dot q_1^2$$

$$\Delta = \det A = R_1 R_2 - R_3^2 \cos^2(q_1 - q_2)$$

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $R_1 = 13.9$, $R_2 = 2.1$, $R_3 = 3$ кг · м^2. При этом собственные числа матрицы инерции оказались заключены между постоянными $m = 1.4$ и $M = 14.6$ кг · м^2, а ее частные производные ограничены по норме постоянной $C = 3$. Максимальная допустимая величина нормы вектора управляющих моментов была выбрана равной $U = 500$ Н · м.

Двузвенник переводился из начального состояния $q_1 = 0.5$, $q_2 = 1$ рад, $\dot q_1 = \dot q_2 =$ $= 0$ рад/с (это состояние изображено на врезке к фиг. 1) в положение "горизонтально вытянутой руки" $q_1 = q_2 = \dot q_1 = \dot q_2 = 0$.

Система уравнений (5.1) интегрировалась методом Рунге – Кутта. Интегрирование прекращалось, когда величина $(q_1^2 + q_2^2 + \dot q_1^2 + \dot q_2^2)^{1/2}$ – евклидово расстояние в фазовом пространстве между текущим состоянием системы и началом координат – становилась меньше 0.005.

Достаточное условие (4.1) приведения рассматриваемой механической системы в терминальное состояние с помощью предложенного закона управления при таком выборе параметров может быть переписано в виде

$$U > 11.8S_0 + 9.9V(q_0, \dot{q}_0)$$

При моделировании возмущающий момент задавался постоянной вектор-функцией $S(t) = (0, 250)$. Следовательно, модуль вектора возмущений в ограничении (1.4) не превосходит по норме величины $S_0 = 250$, а достаточное условие приведения системы в терминальное состояние принимает вид

$$U > 2950 + 9.9V(q_0, \dot{q}_0)$$

т.е. при выбранной величине U заведомо не выполняется ни при каких начальных значениях фазовых переменных. Тем не менее, предложенный закон управления справляется с возмущениями и приводит систему в терминальное состояние.

В верхней части фиг. 1 представлены графики зависимости фазовых переменных системы от времени. Штриховые линии отвечают обобщенным координатам (рад), сплошные – обобщенным скоростям (рад/с), жирные линии описывают движение первого звена, а тонкие – второго.

В нижней части фиг. 1 показаны зависимость абсолютной величины вектора управляющих моментов $|u|$ от времени и поведение функции V вдоль рассматриваемой траектории. Видно, что функция V стремится к нулю, а управление удовлетворяет ограничению $|u| < 500$. Как уже отмечалось, немонотонное стремление к нулю функции V объясняется тем, что достаточное условие (4.1), обеспечивающее отрицательность производной $\dot{V}$, не выполняется.

В соответствии с алгоритмом управление u определяется через функцию V, которая задается неявно уравнением (2.4). Величина $x = \sqrt{V}$ как корень полиномиального уравнения четвертого порядка (2.6) и, следовательно, функция V могут быть выражены аналитически по формулам Кардано. Однако для реализации алгоритма необходимости в явном представлении функции V нет. С вычислительной точки зрения выгоднее находить текущее значение этой функции, решая уравнение (2.6) численно, например методом Ньютона. На каждом шаге интегрирования в качестве начального приближения удобно брать значение функции V с предыдущего шага. Учитывая, что функция V монотонно убывает вдоль траектории и непрерывна, старое значение чуть больше искомого.

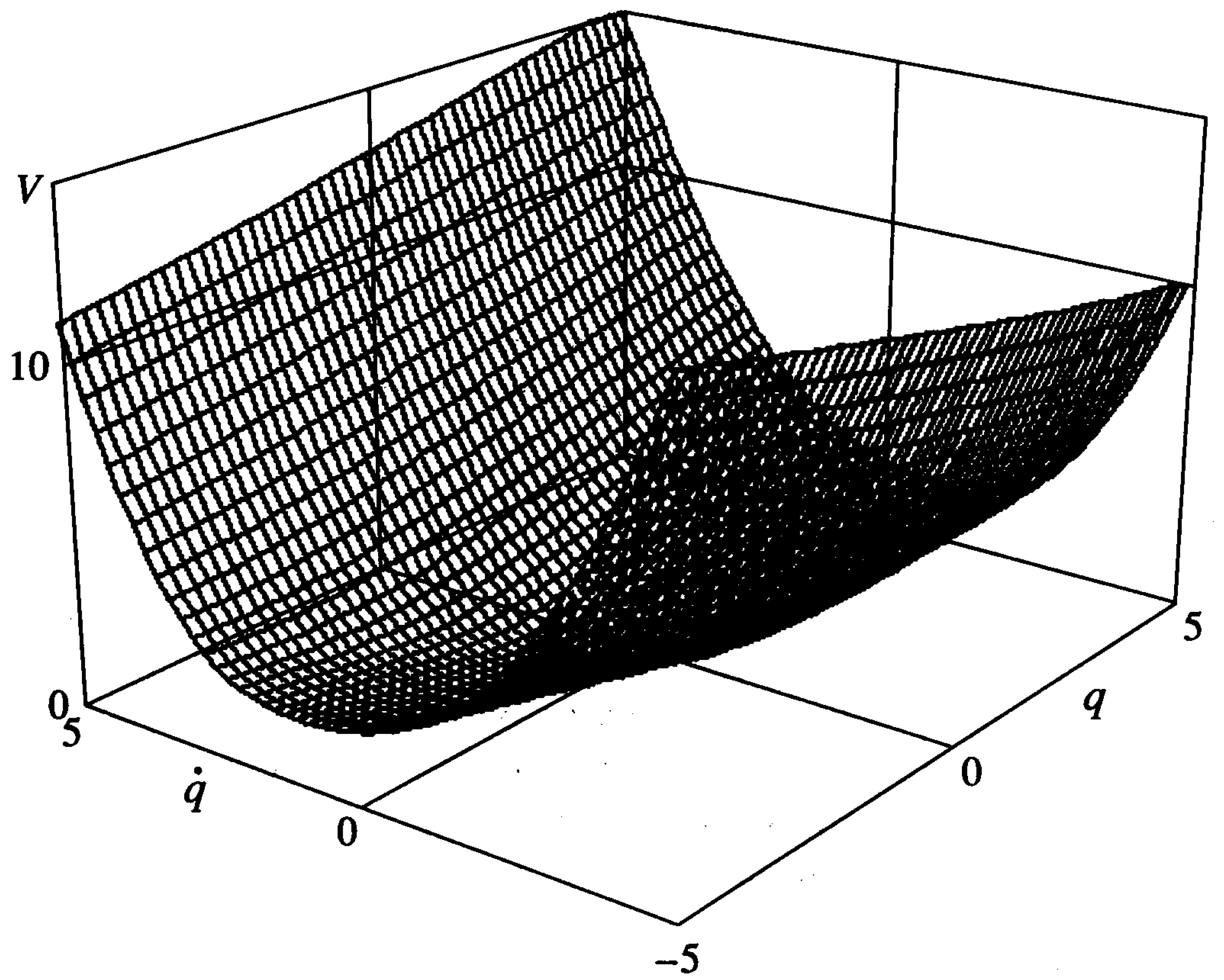
Исследуем с помощью численного моделирования предельные возможности разработанного алгоритма и сравним его с оптимальным по быстродействию законом управления. Рассмотрим для этого механическую систему, представляющую собой материальную точку единичной массы, перемещающуюся вдоль горизонтальной прямой. Уравнения движения точки имеют вид

$$\ddot{q} = u + S \tag{5.2}$$

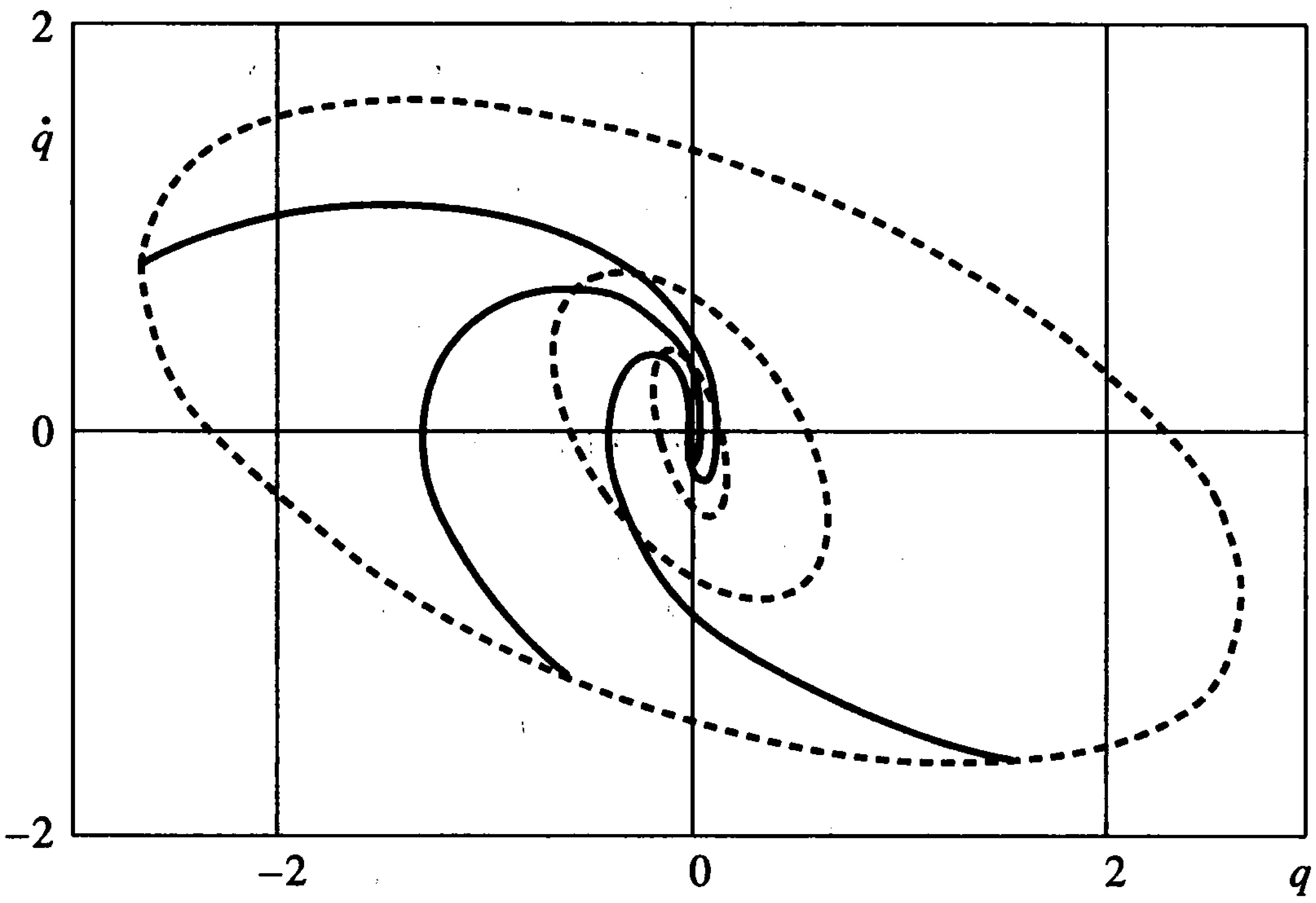
где q – координата точки на прямой. На управляющую силу u и возмущения S наложены ограничения

$$|u| \le 1, \quad |S| \le S_0 < 1 \tag{5.3}$$

Простота и низкая размерность данной системы позволяют представить функции $V(q, \dot{q})$, $u(q, \dot{q})$, а также другие характеристики движения графически. На фиг. 2 изображен график функции $V(q, \dot{q})$, через которую выражается закон управления (2.1), (2.2) и которая служит функцией Ляпунова для системы (5.2).



Фиг. 2



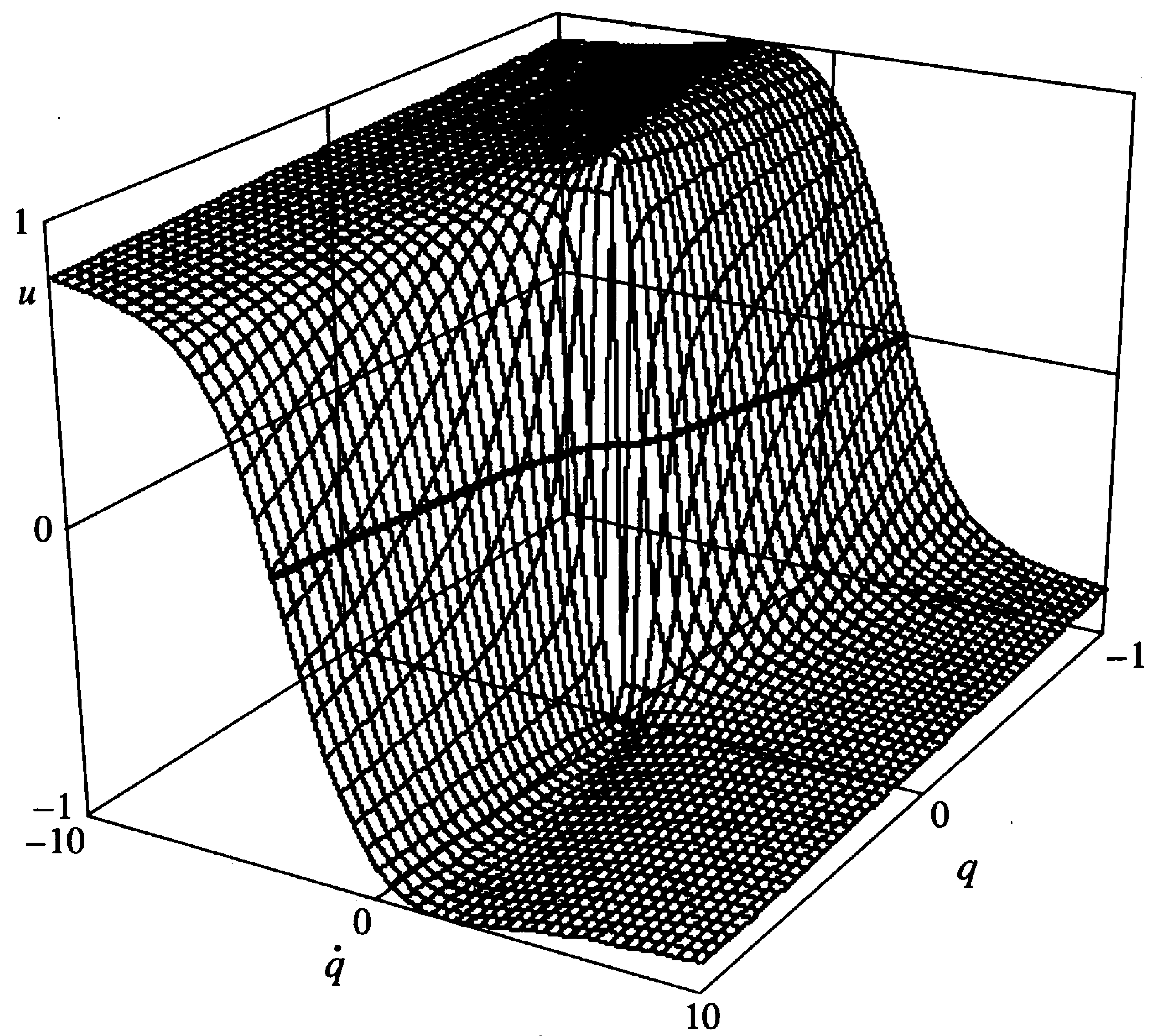
Фиг. 3

На фиг. 3 показан фазовый портрет системы (5.2) для случая отсутствия возмущений, т. е. при $S \equiv 0$. Сплошными линиями изображены фазовые траектории движения материальной точки, а штриховыми – линии уровня функции V.

В силу определения функции V она симметрична относительно начала координат, т.е. $V(q, \dot q) = V(-q, -\dot q)$. Тем же свойством обладают функции a, b и u. Поэтому фазовый портрет невозмущенной системы также симметричен относительно точки (0, 0).

График управляющей функции $u(q, \dot q)$ представлен на фиг. 4. Из формул (3.21), (3.22) вытекает, что на прямых $q = 0$ и $\dot q = 0$ при выбранных значениях параметров функция u удовлетворяет соотношениям

$$u(0, \dot q) = u(q, 0) = \sqrt{3}/2$$



Фиг. 4

Видно, что в областях $q,\ \dot q > 0$ и $q,\ \dot q < 0$, а также при больших по модулю значениях скорости $\dot q$ изображенная на фиг. 4 поверхность имеет почти горизонтальные участки, отвечающие значениям функции u, близким к $\pm\sqrt{3}/2$.

Как и следовало ожидать, в окрестности начала координат функция $u(q,\ \dot q)$ имеет сколь угодно большие по модулю частные производные. Это объясняется тем, что управляющая сила должна парировать любые, в том числе разрывные возмущения, удовлетворяющие условию (5.3), и обеспечивать монотонное убывание функции V вдоль траектории. Следовательно, чем ближе к началу координат, тем выше должна быть допустимая скорость изменения управляющей силы u (в самой точке (0, 0) функция u не определена).

Найдем кривую, на которой управление меняет знак. Из фиг. 4 видно, что эта кривая задается уравнением $u(q,\ \dot q) = 0$. Отсюда, в силу соотношения (2.1) и учитывая, что для системы (5.2) в обозначениях разд. 1 выполнены равенства $A(q) = m = M = 1$, получаем

$$a(q,\dot q) = -\dot q/q \tag{5.4}$$

Выразим в уравнении (2.3) с помощью соотношений (2.2) функции $V(q,\ \dot q)$ и $b(q,\ \dot q)$ через $a(q,\ \dot q)$ и подставим в полученное равенство выражение (5.4). Учитывая, что $U = 1$, после преобразований приходим к уравнению $3q^2 = 4\dot q^4$. Функция $a(q,\ \dot q)$ по определению положительна, следовательно, в силу равенства (5.4) в каждой точке искомой кривой координата q и скорость $\dot q$ имеют разные знаки. Поэтому сама кривая задается соотношениями

$$q = \begin{cases} -2\sqrt{3}\dot q^2/3, & \dot q > 0 \\ 2\sqrt{3}\dot q^2/3, & \dot q < 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

и состоит из двух симметричных относительно начала координат ветвей парабол (жирная линия на фиг. 4).

Сравним изложенный выше закон управления с управлением, доставляющим минимум времени движения. Известно [9], что для системы (5.2) в случае $S \equiv 0$ оптимальное по быстродействию управление имеет вид

$$u_{\text{opt}} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad \dot{q} > 0 \quad \text{и} \quad q \ge -\dot{q}^2/2 \\ -1, & \text{если} \quad \dot{q} < 0 \quad \text{и} \quad q > \dot{q}^2/2 \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{5.6}$$

Фазовое пространство $(q, \dot{q})$ разбивается на две области кривой, которая называется кривой переключений (КП) и состоит из двух ветвей парабол $q = \pm\dot{q}^2/2$, симметричных относительно начала координат. Функция u_{opt} принимает два значения: выше КП и на ее левой ветви $u_{\text{opt}} = -1$, а ниже КП и на ее правой ветви $u_{\text{opt}} = 1$. Видно, что функция u, график которой изображен на фиг. 4, и функция u_{opt}, заданная соотношениями (5.6), качественно близки. КП для u_{opt} и ее аналог (5.5) для управления u состоят каждая из двух ветвей парабол с коэффициентами при $\dot{q}^2$, равными 1/2 и $2\sqrt{3}/3$ соответственно.

Если в системе (5.2) возмущения присутствуют, т. е. условие $S \equiv 0$ не предполагается, то оптимальный по быстродействию закон управления принимает вид [10]

$$u'_{\text{opt}} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad \dot{q} > 0 \quad \text{и} \quad q \ge -\dot{q}^2/(2(1 - S_0)) \\ -1, & \text{если} \quad \dot{q} < 0 \quad \text{и} \quad q > \dot{q}^2/(2(1 - S_0)) \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{5.7}$$

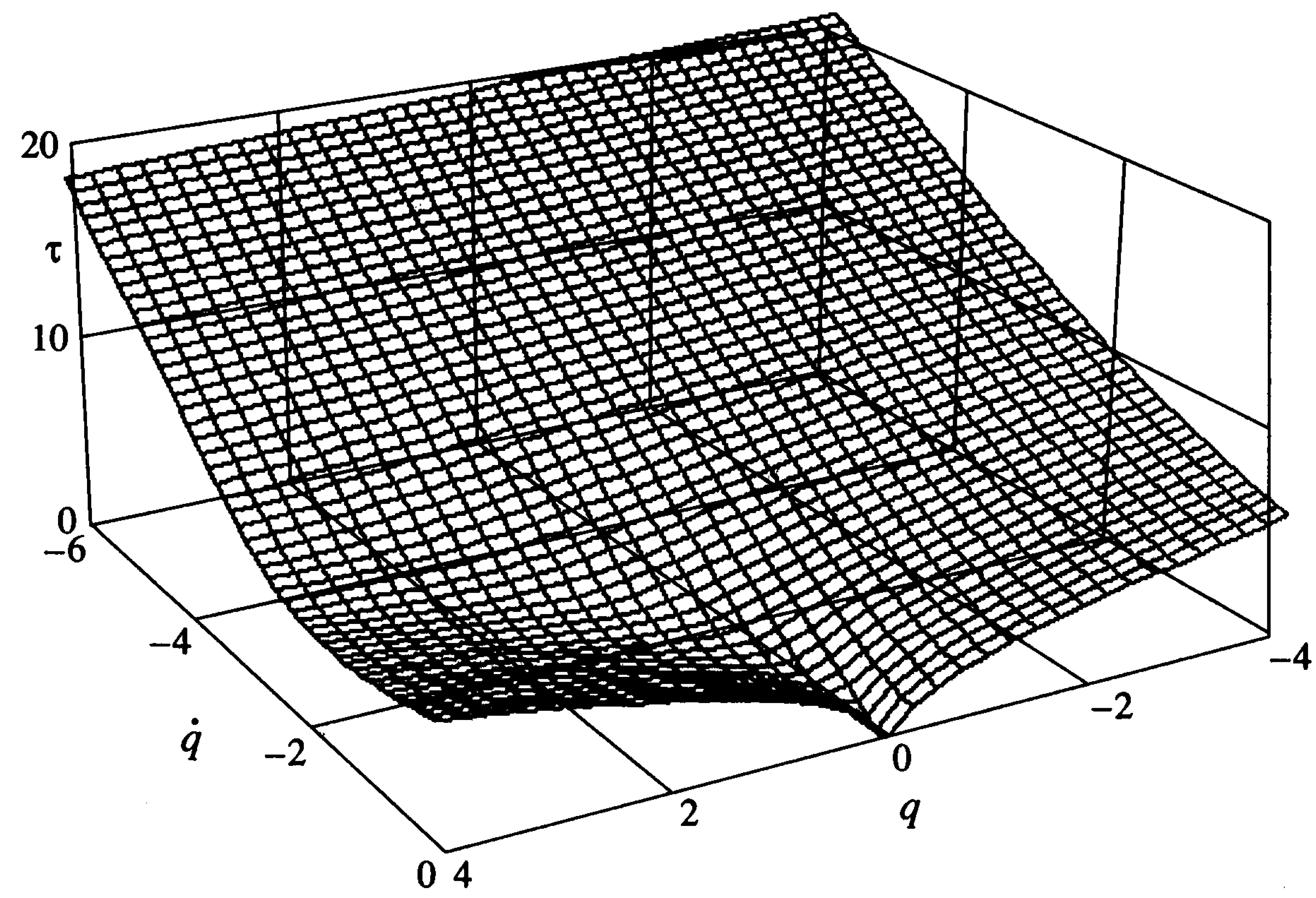
В этом случае КП состоит из ветвей парабол $q = \pm\dot{q}^2/(2(1-S_0))$ и совпадает с кривой $u(q, \dot{q}) = 0$, задаваемой соотношениями (5.5) при $S_0 = 1 - \sqrt{3}/4$.

На фиг. 5 представлен график функции $\tau(q, \dot{q})$ для системы (5.2), управляемой по предложенному закону (2.1)–(2.3) в отсутствие возмущений, т. е. при $S \equiv 0$. По определению эта функция в каждой точке фазового пространства принимает значение, равное времени движения системы из этой точки до терминального состояния. Для сравнения на фиг. 6 изображен график функции Беллмана, в каждой точке равной минимальному возможному времени движения из этой точки до терминального состояния. Видно, что время движения системы, управляемой с помощью предложенного алгоритма, примерно в 1.5 раза больше минимального.

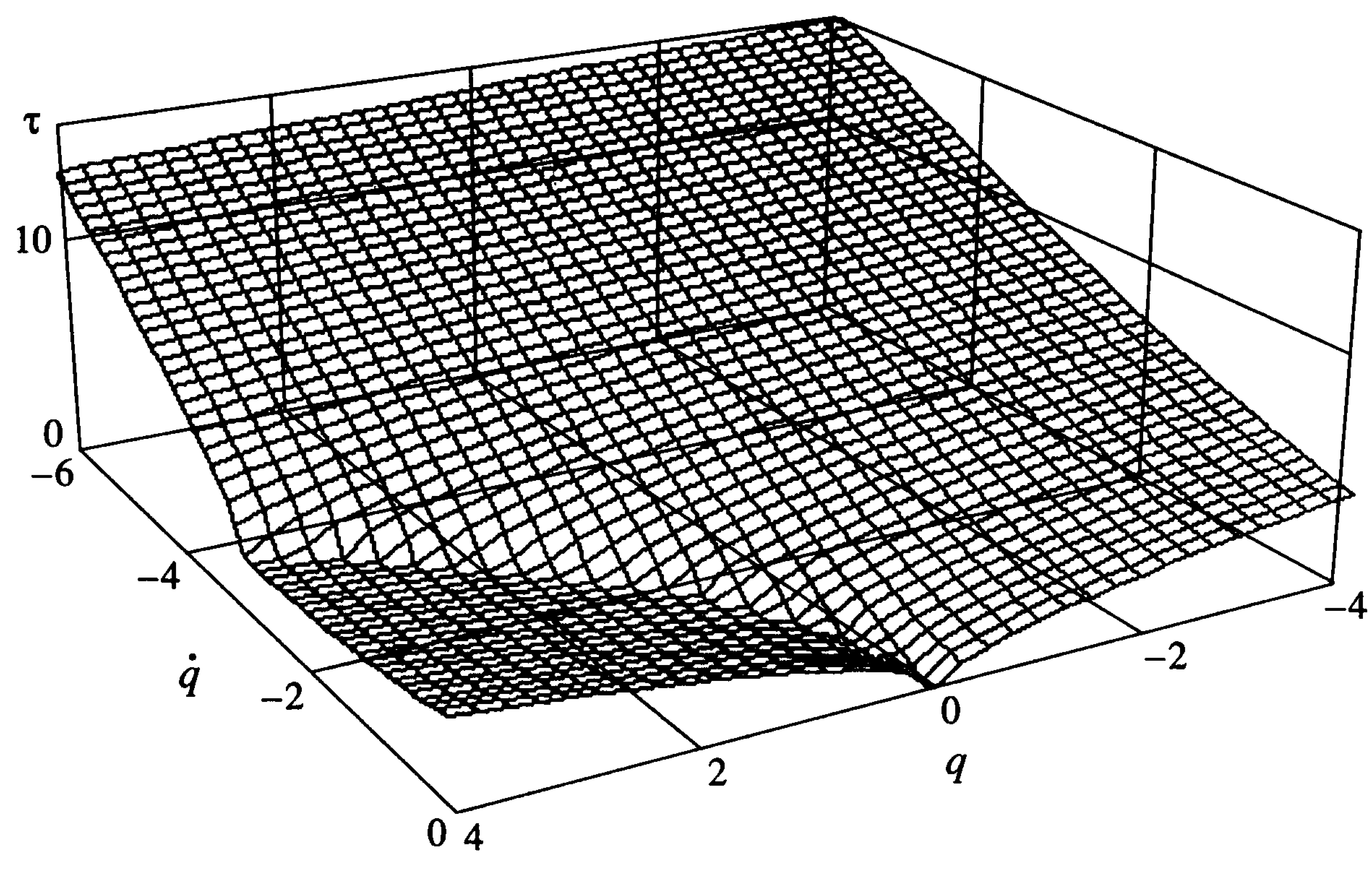
Для выявления предельных возможностей разработанного алгоритма управления было проведено численное моделирование движения системы (5.2), в которой возмущения задавались соотношением

$$S(q, \dot{q}) = -S_0 u_{\text{opt}}$$

причем u_{opt} определено формулой (5.6), при различных S_0. Оказалось, что предельно допустимая величина возмущений S_0, при которой система приводится в терминальное состояние с помощью предложенного алгоритма (2.1)–(2.3), приблизительно равна $0.87 \approx \sqrt{3}/2$, т.е. значению функции u на прямой $q = 0$. Этому значению отвечают горизонтальные участки графика, описанные выше. Напомним [10], что для оп-



Фиг. 5



Фиг. 6

тимального закона управления необходимое и достаточное условие приведения системы задается неравенством $S_0 < 1$.

Таким образом, изложенный выше подход позволяет строить алгоритмы, в результате применения которых получаются ограниченные управляющие функции, гладким образом зависящие от фазовых переменных и времени. Эти алгоритмы применимы для управления произвольной склерономной механической системы и позволяют приводить ее в заданное терминальное состояние за конечное время. Представленные результаты численного моделирования управляемых движений материальной точки вдоль горизонтальной прямой показывают качественную близость предложенного закона управления и оптимального по быстродействию закона управления.

Работа выполнена в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00-15-96013), при финансовой поддержке Министерства образования РФ (Е00-1.0-94) и Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00157 и 02-01-00201).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф.Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883–893.
2. *Черноусько Ф.Л.* Синтез управления нелинейной динамической системой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179–191.
3. *Пятницкий Е.С.* Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 2. С. 300–303.
4. *Матюхин В.И., Пятницкий Е.С.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 67–81.
5. *Ананьевский И.М.* Управление механической системой с неизвестными параметрами посредством ограниченной силы // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 1. С. 52–62.
6. *Ананьевский И.М.* Ограниченное управление механической системой в условиях неопределенности // Докл. РАН. 1998. Т. 359. № 5. С. 607–609.
7. *Ананьевский И.М.* Ограниченное управление реономной механической системой в условиях неопределенности // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 5. С. 809–821.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1965. 431 с.
9. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
10. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

Москва
e-mail: anan@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
11.IV.2002