

УДК 539.3

© 2003 г. Ю. А. Устинов

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА
ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**

Решения задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией представлены в виде линейной комбинации однородных элементарных решений, построение которых сведено к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. На основе аналитических и численных методов осуществлено интегрирование этих задач и проведено исследование элементов матрицы жесткостей в широком диапазоне параметров. Установлено, что при растяжении цилиндра знак и величина крутильной деформации существенно зависят от величины относительного угла закручивания винтовых спиралей.

Цилиндр с винтовой анизотропией можно представить, в частности, как результат винтовой намотки слоев тонких нитей из жесткого материала на цилиндрическую поверхность с одновременным покрытием их полимерным материалом. Для определения приведенных упругих характеристик можно использовать методы гомогенизации [1, 2]. Таким образом получается трансверсально-изотропный материал с осью симметрии, направленной по касательным к винтовым спиральям. При растяжении–сжатии цилиндра с винтовой анизотропией помимо продольной деформации возникает крутильная и, наоборот, при кручении помимо крутильной – продольная деформация. Аналогичными свойствами обладают и естественно закрученные стержни [3]. Поэтому такие стержни могут быть использованы в устройствах, преобразующих продольные деформации в продольно-крутильные и наоборот.

1. Основные соотношения теории упругости в случае винтовой анизотропии и постановка задачи для цилиндра с винтовой анизотропией. Рассмотрим цилиндрическое тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$, где S – поперечное сечение цилиндра, L – его длина. Боковую поверхность обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$, ∂S – граница S . С геометрически центром тяжести одного из торцов цилиндра свяжем начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 . Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем сопутствующую цилиндрическую систему координат r, θ, z , связанную с основной соотношениями

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \cos \tau z - r \sin \theta \sin \tau z \\x_2 &= r \cos \theta \sin \tau z + r \sin \theta \cos \tau z \\x_3 &= z\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь и ниже предполагается, что $\tau = \text{const}$.

Соотношения (1.1) при $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии, при этом $\tau = 2\pi/h$, где h – шаг винтовой спирали. Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}'_1 + z\mathbf{e}'_3$$

Здесь

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1(\cos\theta\cos\tau z - \sin\theta\sin\tau z) + \mathbf{i}_2(\cos\theta\sin\tau z + \sin\theta\cos\tau z)$$

$$\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1(\sin\theta\cos\tau z + \cos\theta\sin\tau z) + \mathbf{i}_2(\cos\theta\cos\tau z - \sin\theta\cos\tau z)$$

$$\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_z$$

$\mathbf{i}_n$ – единичные орты основной системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный репер

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t}$$

где $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ – орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно. Используя формулы

$$d\mathbf{R}/ds = \mathbf{t}, \quad d\mathbf{t}/ds = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

$$ds = g dz, \quad g^2 = (1 + x^2), \quad x = \tau r$$

где $k = \tau^2 r / g^2$ – кривизна винтовой спирали, после преобразований получаем ортогональную матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_j$ к базису $\mathbf{e}'_i$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/g & x/g \\ 0 & x/g & 1/g \end{vmatrix}$$

Будем считать материал цилиндра локально трансверсально-изотропным с осью симметрии механических свойств, направленной по касательной к винтовой линии. Для обобщенного закона Гука будем использовать матричную форму записи напряжений и деформаций [4]

$$\sigma_i = c_{ij}e_j, \quad c_{ji} = c_{ij}$$

Здесь

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12}$$

Аналогичная символика используется для компонент тензора деформаций.

Для трансверсально-изотропного материала упругие свойства в базисе $\mathbf{e}_j$ определяются пятью модулями c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} , c_{44} , при этом

$$c_{22} = c_{11}, \quad c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$$

$$c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{25} = c_{26} = c_{35} = c_{36} = 0.$$

Введем обозначения

$$\Sigma_1 = \begin{vmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}'_l = \begin{vmatrix} c'_{l1} \\ c'_{l2} \\ c'_{l3} \\ 2c'_{l4} \end{vmatrix}, \quad l = 1, \dots, 4 \tag{1.2}$$

$$\Sigma_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}'_5 = \begin{vmatrix} c'_{55} \\ c'_{56} \end{vmatrix}, \quad \mathcal{C}'_6 = \begin{vmatrix} c'_{65} \\ c'_{66} \end{vmatrix}$$

В результате перехода от базиса e_j к базису e'_i получаем следующие соотношения обобщенного закона Гука в сопутствующей системе координат:

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \mathcal{C}'_1 e_{rr} + \mathcal{C}'_2 e_{\theta\theta} + \mathcal{C}'_3 e_{zz} + \mathcal{C}'_4 e_{\theta z}, \quad \Sigma_2 = \mathcal{C}'_5 e_{rz} + \mathcal{C}'_6 e_{r\theta} \\ c'_{11} &= c_{11}, \quad c'_{12} = (c_{12} + c_{13}x^2)/g^2 \\ c'_{13} &= (c_{13} + c_{12}x^2)/g^2, \quad c'_{14} = x(c_{13} - c_{12})/g^2 \\ c'_{22} &= [c_{11} + (2c_{13} + 4c_{44})x^2 + c_{33}x^4]/g^4 \\ c'_{23} &= [c_{13} + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})x^2 + c_{13}x^4]/g^4 \\ c'_{24} &= [(c_{13} + 2c_{44} - c_{11})x + (c_{33} - c_{13} - 2c_{44})x^3]/g^4 \\ c'_{33} &= [c_{33} + 2(c_{13} + 2c_{44})x^2 + c_{11}x^4]/g^4 \\ c'_{34} &= [(c_{33} - c_{13} - 2c_{44})x + (c_{44} + 2c_{13} - 2c_{11})x^3]/g^4 \\ c'_{44} &= [c_{44} + (-2c_{13} + c_{11} + c_{33} - 2c_{44})x^2 + c_{44}x^4]/g^4 \\ c'_{55} &= (c_{44} + c_{66}x^2)/g^2, \quad c'_{56} = x(c_{44} - c_{66})/g^2 \\ c'_{66} &= (c_{66} + c_{44}x^2)/g^2 \\ c'_{ji} &= c'_{ij}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Компоненты тензора деформаций в базисе сопутствующей системе координат выражаются через смещения u_r, u_θ, u_z следующими формулами:

$$\begin{aligned}e_{rr} &= \partial_r u_r, \quad e_{\theta\theta} = (u_r + \partial_\theta u_\theta)/r, \quad e_{zz} = Du_z \\ 2e_{r\theta} &= \partial_r u_\theta + (\partial_\theta u_r - u_\theta)/r, \quad 2e_{rz} = \partial_r u_z + Du_r, \quad 2e_{z\theta} = \partial_\theta u_z + Du_\theta\end{aligned}\tag{1.4}$$

Уравнения равновесия в напряжениях в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned}\partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta \sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} &= 0 \\ \partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta \sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{\theta z} &= 0 \\ \partial_r(r\sigma_{rz}) + \partial_\theta \sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

В формулах (1.4), (1.5)

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \quad D = \partial - \tau \partial_\theta$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжения, т.е.

$$n_r \sigma_{rr} + n_\theta \sigma_{r\theta} = 0, \quad n_r \sigma_{r\theta} + n_\theta \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad n_r \sigma_{rz} + n_\theta \sigma_{z\theta} = 0\tag{1.6}$$

Введя вектор $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$, поставленную задачу можно представить в векторно-операторном виде

$$M(\partial, \tau)\mathbf{u} \equiv \partial^2 A_0 \mathbf{u} + \partial A_1 \mathbf{u} + A_2 \mathbf{u} = 0\tag{1.7}$$

$$N(\partial, \tau)\mathbf{u} \equiv (\partial B_0 \mathbf{u} + B_1 \mathbf{u})|_\Gamma = 0\tag{1.8}$$

Здесь (1.7) – уравнения равновесия в смещениях, (1.8) – граничные условия (1.6), A_k , B_i – матричные дифференциальные операторы по переменным r , θ нулевого, первого и второго порядков соответственно; конкретный вид этих операторов здесь не приводится из-за их громоздкости и очевидности способа их построения. Заметно только, что в силу соотношений (1.3) коэффициенты этих операторов зависят от r и τ .

Отыскивая решение задачи (1.7), (1.8) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}e^{\gamma z}$$

получаем спектральную задачу на сечении

$$M(\gamma)\mathbf{a} = 0, \quad N(\gamma)\mathbf{a} = 0 \quad (1.9)$$

Общая структура спектра, свойства системы собственных и присоединенных векторов уравнений типа (1.9), а свойства элементарных решений достаточно подробно описаны [5, 6]. Поэтому остановимся на описании той группы элементарных решений, на которой основывается построение решения задачи Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе цилиндра с винтовой анизотропией. Эту группу элементарных решений будем называть элементарными решениями Сен-Венана (ЭРС).

2. Решение Сен-Венана. Обратимся вначале к построению ЭРС. Сохраняя основную идею [3], запишем вектора твердого смещения в сопутствующей системе координат. Имеем

$$\begin{aligned} u_r^0 &= C_1 e^{i\psi} + C_2 e^{-i\psi} + zC_3 e^{i\psi} + zC_4 e^{-i\psi} \\ u_\theta^0 &= iC_1 e^{i\psi} - iC_2 e^{-i\psi} + izC_3 e^{i\psi} - izC_4 e^{-i\psi} - C_6 r \\ u_z^0 &= -C_3 r e^{i\psi} - C_4 r e^{-i\psi} + C_5 \\ \psi &= \tau z + \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(a_1^0 - ia_2^0), \quad C_2 = \bar{C}_1, \quad C_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + i\omega_1), \quad C_4 = \bar{C}_3$$

$$C_5 = a_3^0, \quad C_6 = \omega_3$$

Здесь a_k^0 , ω_k – проекции вектора поступательного смещения и поворота цилиндра как твердого тела на оси основной системы координат.

Из формул (2.1) вытекает, что

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = i\tau, \quad \gamma_{-1} = -i\tau$$

являются собственным значением спектральной задачи (1.9). Структура корневых подпространств этих собственных значений остается такой же, как и в случае естественно закрученного стержня [3], что позволяет в случае цилиндра с кольцевым поперечным сечением $r_1 \leq r \leq r_2$ записать ЭРС в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(z) &= \mathbf{a}_5, \quad \mathbf{u}_2(z) = \mathbf{a}_6, \quad \mathbf{u}_3(z) = e^{i\psi} \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{u}_4(z) &= \bar{\mathbf{u}}_3(z), \quad \mathbf{u}_5(z) = e^{i\psi} (z\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_5), \quad \mathbf{u}_6(z) = \bar{\mathbf{u}}_5(z) \\ \mathbf{u}_7(z) &= z\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_7, \quad \mathbf{u}_8(z) = z\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_8 \\ \mathbf{u}_9(z) &= e^{i\psi} \left(\frac{z^2}{2} \mathbf{a}_3 + z\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_9 \right), \quad \mathbf{u}_{10}(z) = \bar{\mathbf{u}}_9(z) \\ \mathbf{u}_{11}(z) &= e^{i\psi} \left(\frac{z^3}{6} \mathbf{a}_3 + \frac{z^2}{2} \mathbf{a}_5 + z\mathbf{a}_9 + \mathbf{a}_{11} \right), \quad \mathbf{u}_{12}(z) = \bar{\mathbf{u}}_{11}(z) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \{0, 0, 1\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{0, r, 0\}, \quad \mathbf{a}_3 = \{1, i, 0\}, \quad \mathbf{a}_4 = \bar{\mathbf{a}}_3 \\ \mathbf{a}_5 &= \mathbf{a}_6 = \{0, 0, -r\}, \quad \mathbf{a}_l = \{a_{r,l}, a_{\theta,l}, a_{z,l}\}, \quad l = 7, 8 \\ \mathbf{a}_9 &= \{a_{r,9}, ia_{\theta,9}, a_{z,9}\}, \quad \mathbf{a}_{10} = \bar{\mathbf{a}}_9, \quad \mathbf{a}_{11} = \{ia_{r,7}, a_{\theta,7}, ia_{z,7}\}, \quad \mathbf{a}_{12} = \bar{\mathbf{a}}_{11} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В рассматриваемом случае цилиндра с кольцевым поперечным сечением компоненты векторов $\mathbf{a}_l$ ($l = 7, \dots, 12$) зависят только от r . Для постановки краевых задач для их определения следует обратиться к соотношениям (1.2)–(1.6).

Рассмотрим подробно задачу по определению компонент вектора $\mathbf{a}_7$. Используя соотношения (1.2), (1.4), для компонент тензора напряжений получаем выражения

$$\Sigma_{1,7} = \mathcal{C}'_1 \frac{da_{r,7}}{dr} + \frac{1}{r} \mathcal{C}'_2 a_{r,7} + \mathcal{C}'_3, \quad \Sigma_{2,7} = \mathcal{C}'_5 \frac{da_{z,7}}{dr} + \mathcal{C}'_6 \left(\frac{da_{\theta,7}}{dr} - \frac{a_{\theta,7}}{r} \right) \quad (2.4)$$

Из уравнений равновесия (1.5) и граничных условий (1.6) ($n_r = 1, n_\theta = 0$) имеем

$$\partial_r(r\sigma_{rr,7}) - \sigma_{\theta\theta,7} = 0, \quad \sigma_{rr,7}(r_\alpha) = 0 \quad (2.5)$$

$$\partial_r(r\sigma_{r\theta,7}) + \sigma_{r\theta,7} = 0, \quad \sigma_{r\theta,7}(r_\alpha) = 0 \quad (2.6)$$

$$\partial_r(r\sigma_{rz}) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_\alpha) = 0 \quad (2.7)$$

Из уравнений (2.6), (2.7) вытекает, что

$$\sigma_{r\theta,7} = \sigma_{rz,7} = 0$$

Из этих соотношений и выражений (2.6) для $\sigma_{r\theta,7}, \sigma_{rz,7}$ следует, что

$$a_\theta = X_1 r + X_0, \quad a_z = X_2$$

где X_0, X_1, X_2 – произвольные постоянные, которые можно положить равными нулю.

Подставляя выражения для $\sigma_{rr,7}, \sigma_{\theta\theta,7}$ из (2.4) в (2.5), для определения $a_{r,7}$ получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка

$$\begin{aligned} Za_{r,7} &= F_7, \quad la_{r,7}|_{r=r_\alpha} = f_{\alpha,7} \\ Za &\equiv \frac{d}{dr} \left(rc'_{11} \frac{da}{dr} + c'_{12} a \right) - c'_{12} \frac{da}{dr} - \frac{1}{r} c'_{22} a, \quad la \equiv c'_{11} \frac{da}{dr} + \frac{1}{r} c'_{12} a \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$F_7 = -\frac{d(rc'_{13})}{dr} + c'_{23}, \quad f_{\alpha,7} = -c'_{13}(r_\alpha)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\mathbf{a}_8 = \{a_{r,8}, 0, 0\}$$

И в этом случае определение $a_{r,8}$ сводится к краевой задаче (2.8) с новыми правыми частями

$$F_8 = -\frac{d(r^2 c'_{14})}{dr} + rc'_{24}, \quad f_{\alpha,8} = -r_\alpha c'_{14}(r_\alpha)$$

Напряжения определяются следующими формулами:

$$\Sigma_{1,8} = \mathcal{C}'_1 \frac{da_{r,8}}{dr} + \frac{1}{r} \mathcal{C}'_2 a_{r,8} + r \mathcal{C}'_4, \quad \Sigma_{2,8} = 0 \quad (2.9)$$

Введем обозначения

$$\mathcal{B}_{1,l} = \begin{Bmatrix} b_{rr,l} \\ b_{\theta\theta,l} \\ b_{zz,l} \\ b_{\theta z,l} \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{2,l} = \begin{Bmatrix} b_{rz,l} \\ b_{r\theta,l} \end{Bmatrix}, \quad l = 9, 11$$

Для элементарного решения $\mathbf{a}_9$ соответствующие ему напряжения определяются по следующим формулам:

$$\Sigma_{1,9} = e^{i\psi} \mathcal{B}_{1,9}, \quad \Sigma_{2,9} = e^{i\psi} \mathcal{B}_{2,9} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} B_{1,9} &= \mathcal{C}'_1 \frac{da_{r,9}}{dr} + \mathcal{C}'_2 \frac{a_{r,9} - a_{\theta,9}}{r} - \mathcal{C}'_3 r - \mathcal{C}'_4 \frac{a_{z,9}}{r} \\ B_{2,9} &= \mathcal{C}'_5 \frac{da_{z,9}}{dr} + \mathcal{C}'_6 \left(\frac{da_{\theta,9}}{dr} + \frac{a_{r,9} - a_{\theta,9}}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

В этом случае все компоненты вектора $\mathbf{a}_9$ отличны от нуля и определяются интегрированием краевой задачи, которая получается после подстановки выражений (2.11) в следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d(rb_{rr,9})}{dr} - b_{r\theta,9} - b_{\theta\theta,9} &= 0, \quad b_{rr,9}(r_\alpha) = 0 \\ \frac{d(rb_{r\theta,9})}{dr} + b_{r\theta,9} + b_{\theta\theta,9} &= 0, \quad b_{r\theta,9}(r_\alpha) = 0 \\ \frac{d(rb_{rz,9})}{dr} + b_{z\theta,9} &= 0, \quad b_{rz,9}(r_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Как следует из первых двух уравнений (2.12), эта система имеет первый интеграл

$$b_{rr,9} + b_{r\theta,9} = 0$$

Для элементарного решения $\mathbf{a}_{11}$ соответствующие ему напряжения определяются по формулам

$$\Sigma_{1,11} = e^{i\psi} (z\mathcal{B}_{1,9} + i\mathcal{B}_{1,11}), \quad \Sigma_{2,11} = e^{i\psi} (iz\mathcal{B}_{2,9} + \mathcal{B}_{2,11}) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} B_{1,11} &= \mathcal{C}'_1 \frac{da_{r,11}}{dr} + \mathcal{C}'_2 \frac{a_{r,11} - a_{\theta,11}}{r} + \mathcal{C}'_4 \frac{a_{z,11}}{r} + \mathcal{C}'_3 a_{z,9} + \mathcal{C}'_4 a_{\theta,9} \\ B_{2,11} &= \mathcal{C}'_5 \frac{da_{z,11}}{dr} + \mathcal{C}'_6 \left(\frac{da_{\theta,11}}{dr} + \frac{a_{r,11} + a_{\theta,11}}{r} \right) + \mathcal{C}'_5 a_{r,9} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Подстановка выражений (2.13) в уравнения равновесия и граничные условия приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{d(rb_{rr,11})}{dr} + b_{r\theta,11} - b_{\theta\theta,11} + rb_{rz,9} &= 0, \quad b_{rr,11}(r_\alpha) = 0 \\ \frac{d(rb_{r\theta,11})}{dr} + b_{r\theta,11} - b_{\theta\theta,11} + rb_{z\theta,9} &= 0, \quad b_{r\theta,11}(r_\alpha) = 0 \\ \frac{d(rb_{rz,11})}{dr} - b_{z\theta,11} + rb_{zz,9} &= 0, \quad b_{rz,11}(r_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Эти соотношения после подстановки в них выражений (2.14) приводят к краевой задаче для трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент $a_{r,11}$, $a_{\theta,11}$, $a_{z,11}$. Из первых двух уравнений (2.15) вытекает следующий первый интеграл:

$$b_{rr,11} - b_{r\theta,11} = \frac{1}{r} \int_{r_1}^r (b_{rz,9} - b_{\theta z,9}) r dr$$

Рассмотрим теперь задачу Сен-Венана. Будем считать, что на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$u_j = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad (2.16)$$

$$\sigma_{j3} = p_j \quad \text{при} \quad z = L \quad (2.17)$$

Здесь u_j, p_j – проекции вектора смещений и вектора заданных внешних усилий на оси основной системы координат.

Решение Сен-Венана будем отыскивать в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^6 C_l \mathbf{u}_l(z) + \sum_{l=7}^{12} C_l \mathbf{u}_l(z-L) \quad (2.18)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{zz}\} = \sum_{l=7}^{12} C_l \boldsymbol{\sigma}_l(z-L) \quad (2.19)$$

Удовлетворяя граничному условию (2.19) в интегральном смысле и используя соотношения обобщенной ортогональности [6], получаем

$$\begin{aligned} d_{11}C_7 + d_{12}C_8 &= Q_3, \quad d_{12}C_7 + d_{22}C_8 = M_3 \\ d_{33}C_9 + d_{35}C_{11} &= M_2 + iM_1, \quad d_{33}C_{11} = -Q_1 + iQ_2 \\ C_8 &= \bar{C}_7, \quad C_{10} = \bar{C}_9 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{zz,7} dr, \quad d_{12} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_{zz,8} dr, \quad d_{22} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 \sigma_{rz,8} dr \\ d_{33} &= -2\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 b_{zz,9} dr, \quad d_{35} = 2\pi i \int_{r_1}^{r_2} r^2 b_{zz,11} dr \end{aligned} \quad (2.21)$$

Q_j, M_j – проекции главного вектора и главного момента внешних усилий на оси основной системы координат.

Соотношения (2.20), (2.21) позволяют дать следующую интерпретацию элементам матрицы жесткостей: d_{11} – жесткость стержня на растяжение–сжатие, d_{22} – жесткость на кручение, d_{12} – коэффициент связи растяжения–сжатия и кручения, d_{33} – жесткость на изгиб.

Соотношения (2.20), (2.21) являются точными в том смысле, что погранслойная часть решения трехмерной задачи, которая порождается самоуравновешенной частью внешних напряжений (2.17), не влияет на их вид.

Постоянные $C_1, \dots, C_6$ определяются при удовлетворении граничным условиям (2.16). Точные их значения можно определить только на основе решения бесконечных систем алгебраических уравнений, аналогичным построенным ранее [7] для

изотропного цилиндра. В случае длинных цилиндров ($h = r_2/L \ll 1$) эти постоянные определяются следующими приближенными формулами:

$$\begin{aligned} C_1 &= -LC_7, \quad C_2 = -LC_8, \quad C_3 = -\frac{1}{2}L^2C_{11}e^{-i\tau L}, \quad C_4 = \bar{C}_3 \\ C_5 &= \left(\frac{1}{6}L^3C_{11} - \frac{1}{2}L^2C_9\right)e^{-i\tau L}, \quad C_6 = \bar{C}_5 \end{aligned} \quad (2.22)$$

3. О методах построения элементарных решений Сен-Венана и результаты численного анализа. Обратимся к вопросу о построении решений задач (2.8), (2.11), (2.12), (2.15) и вычислению на их основе элементов матрицы жесткостей d_{ij} .

Остановимся вначале на построении аналитических решений методом малого параметра в предположении, что безразмерный параметр $\tau_0 = \tau r_2 \ll 1$. Такие решения, помимо того что позволяют получить наглядное представление о влиянии различных параметров задачи на ее решение, полезны как тест для численного решения.

Для построения приближенных решений обратимся к формулам (1.3) и разложим c'_{ml} в ряды по τ . Сохраняя главные члены разложений, получаем

$$\begin{aligned} c'_{11} &= c'_{22} = c_{11}, \quad c'_{12} = c_{12}, \quad c'_{13} = c'_{23} = c_{13} \\ c'_{33} &= c_{33}, \quad c'_{44} = c'_{55} = c_{44}, \quad c'_{66} = c_{66} \\ c'_{14} &= \tau r(c_{13} - c_{12}), \quad c'_{24} = \tau r(c_{13} + 2c_{44} - c_{11}) \\ c'_{34} &= \tau r(c_{33} - c_{13} - 2c_{44}), \quad c'_{56} = \tau r(c_{44} - c_{66}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Будем отыскивать решение краевой задачи (2.8) в виде

$$a_{r,7} = a_7^{(0)} + \tau a_7^{(1)} + \dots \quad (3.2)$$

После подстановки выражений (3.1), (3.2) в соотношения (2.8) для определения главного члена получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 a_7^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_7^{(0)}}{dr} - \frac{a_7^{(0)}}{r^2} = 0 \quad \left(c_{11} \frac{da_7^{(0)}}{dr} + c_{12} \frac{a_7^{(0)}}{r} \right)_{r=r_a} = -c_{13}$$

Опуская дальнейшие элементарные этапы интегрирования, приведем окончательный вид решения. Имеем

$$a_{r,7} = -v'r + O(\tau^2) \quad (3.3)$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} a_{r,8} &= \frac{\tau r_2}{8c_{11}} \left\{ K_0 \frac{r^3}{r_2^2} + K_1 \left[\frac{(1+\rho^2)r}{c_{11}+c_{12}} + \frac{\rho^2 r_2^2}{r(c_{11}-c_{12})} \right] \right\} + O(\tau^3) \\ a_{r,9} &= \frac{v'r^2}{2} + O(\tau^2), \quad a_{\theta,9} = -\frac{v'r^2}{2} + O(\tau^2) \\ a_{z,9} &= \frac{\tau K_2}{8} \left[r^3 - 3(r_1^2 + r_2^2)r - \frac{3r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau^3) \\ a_{z,11} &= \frac{\tau K_2}{8} \left[r^3 - \kappa(r_1^2 + r_2^2)r - \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau^2) \\ a_{r,11} &= O(\tau), \quad a_{\theta,11} = O(\tau) \end{aligned} \quad (3.4)$$

В формулах (3.3), (3.4)

$$E' = c_{33} - 2\nu'c_{13}, \quad G' = c_{44}$$

$$K_0 = 3c_{12} - 2c_{13} - c_{11} + 2c_{44}$$

$$K_1 = -3c_{12}^2 + 3c_{11}^2 - 2c_{13}(c_{11} - c_{12}) - 2c_{44}(2c_{12} + 6c_{11})$$

$$K_2 = E' - 2(1 + \nu')G', \quad \kappa = 3K_2 + \nu'G'/2, \quad \rho = r_1/r_2$$

$$\nu' = (c_{11} + c_{12})/c_{13}$$

Приведем выражения для главных членов компонент тензоров напряжений.

В случае $l = 7, 8$ имеем

$$\sigma_{zz,7} = E' + O(\tau^2), \quad \sigma_{\theta z,8} = E'r + O(\tau^2), \quad \sigma_{r\theta,l} = \sigma_{rz,l} \equiv 0$$

$$\sigma_{rr,7} \approx \sigma_{\theta\theta,7} \approx O(\tau^2), \quad \sigma_{\theta z,7} \approx \sigma_{rr,8} \approx \sigma_{\theta\theta,8} \approx \sigma_{zz,8} \approx O(\tau)$$

В случае $l = 9, 11$ ограничимся тем, что приведем главные члены разложений следов напряжений

$$b_{zz,9} = -E'r + O(\tau^2)$$

$$b_{rz,9} = \frac{\tau K_2}{8} \left(r^2 - r_1^2 - r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) + O(\tau^3)$$

$$b_{\theta z,9} = -\frac{\tau K_2}{8} \left(3r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) + O(\tau^3)$$

$$b_{rr,9} \approx b_{\theta\theta,9} \approx b_{r\theta,9} \approx O(\tau^2)$$

$$b_{rz,11} = G' \left[\left(\frac{3K_2}{8} + \frac{\nu'}{2} \right) r^2 - \kappa(r_1^2 + r_2^2)r + \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r^2} \right]$$

$$b_{\theta z,11} = G' \left[\left(\frac{K_2}{8} - \frac{\nu'}{2} \right) r^2 - \kappa(r_1^2 + r_2^2)r - \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r^2} \right]$$

$$b_{rr,11} \approx b_{\theta\theta,11} \approx b_{zz,11} \approx b_{r\theta,11} \approx O(\tau)$$

Главные члены разложений d_{ij} имеют вид

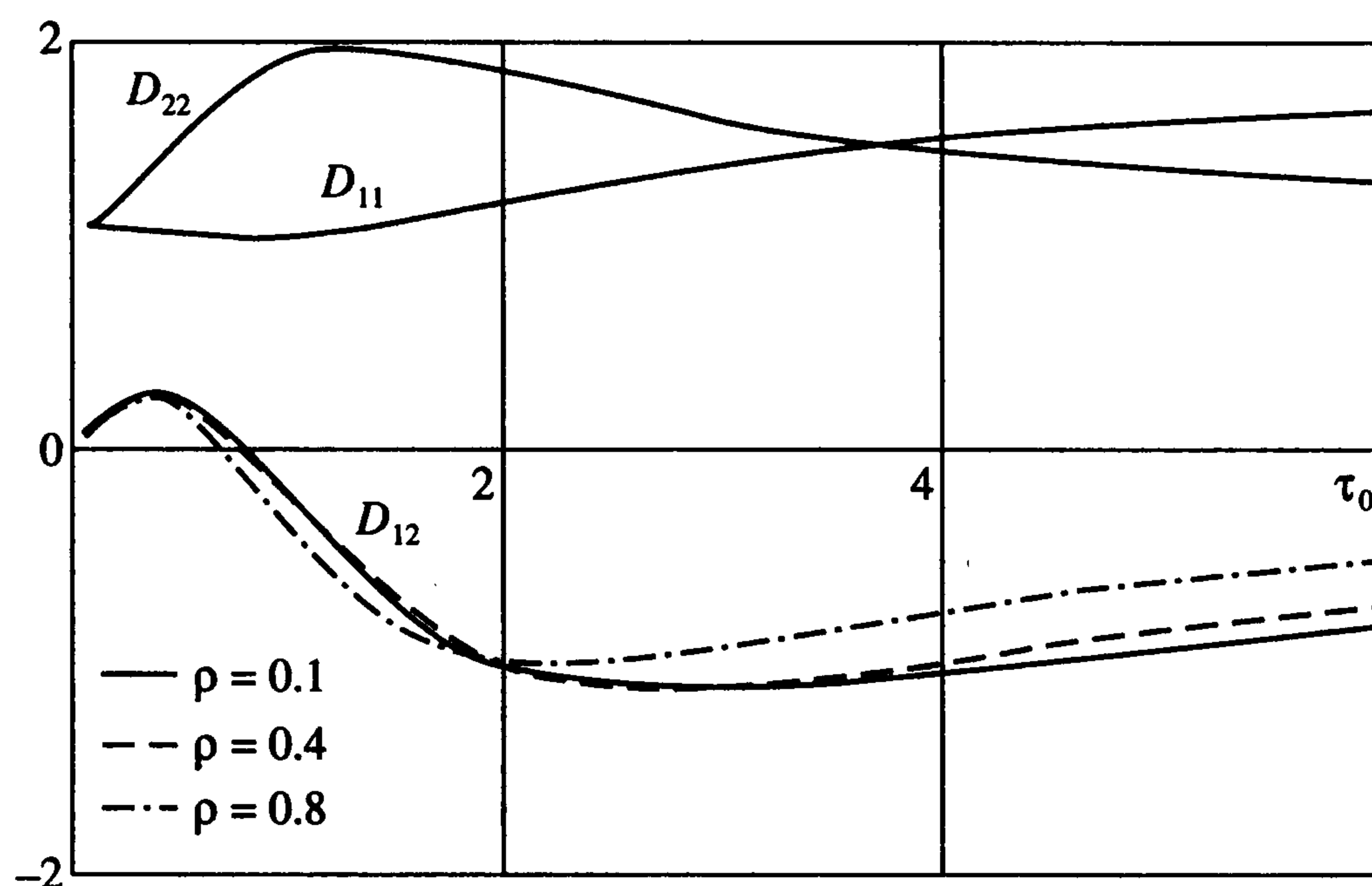
$$d_{11}^0 = SE', \quad d_{22}^0 = c_{44}J_p$$

$$d_{12}^0 = \tau J_p K_2, \quad d_{33} = E'J_p, \quad d_{31} = O(\tau)$$

$$S = \pi(r_2^2 - r_1^2), \quad J_p = \pi(r_2^4 - r_1^4)/2$$

Формула для d_{12}^0 дает представление о влиянии параметров задачи на взаимодействие кручения с растяжением–сжатием при малых значениях τ_0 . В частности, коэффициент K_2 характеризует степень анизотропии трансверсально-изотропного материала. В этой формуле E', G', ν' – технические упругие постоянные [4]: соответственно модули на растяжение, сдвиг и коэффициент Пуассона. Заметим, что для изотропного материала $K_2 = 0$.

Для оценки влияния на элементы d_{ij} параметров τ_0 и ρ в широком диапазоне их изменения была проведена серия расчетов на основе численного интегрирования задач



по определению компонент $a_{r,7}, a_{r,8}$. Для расчетов был выбран волокнистый композиционный материал со следующими приведенными упругими характеристиками:

$$E' = 3.685 \cdot 10^9 \text{ Па}, E = 9.398 \cdot 10^9 \text{ Па}, G' = 1.272 \cdot 10^9 \text{ Па}, \nu' = 0.0147, \nu = 0.375$$

При пересчете на постоянные c_{ij} получается

$$c_{11} = 5.294 \cdot 10^9 \text{ Па}, c_{12} = 1.770 \cdot 10^9 \text{ Па}, c_{13} = 0.104 \cdot 10^9 \text{ Па}, c_{33} = 3.688 \cdot 10^9 \text{ Па}, c_{44} = G'$$

На фигуре приведены зависимости безразмерных элементов матрицы жесткости

$$D_{11} = \frac{d_{11}}{d_{11}^0}, \quad D_{22} = \frac{d_{22}}{d_{22}^0}, \quad D_{12} = \frac{J_{12}}{J_p B}$$

от τ_0 при $\rho = 0.1$ (сплошные линии); приведены также зависимости D_{12} от τ_0 при $\rho = 0.4, 0.8$ (штриховая и штрих-пунктирная линии).

Кривые, описывающие поведение D_{12} , указывают на то, что при растяжении цилиндра в случаях малых значений параметра имеет место эффект "раскручивания", а при достаточно больших значениях – эффект "закручивания".

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00454, 00-15-96087).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cristensen R.M.* Mechanics of Composite Materials. N.Y.: Wiley, 1979 = *Кристensen Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 335 с.
3. *Друзь А.Н., Поляков Н.А., Устинов Ю.А.* Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 660–668.
4. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
5. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1993. 144 с.
7. *Друзь А.Н., Устинов Ю.А.* Тензор Грина для упругого цилиндра и приложения его к развитию теории Сен-Венана // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 102–110.