

УДК 539.3 : 534.1

© 2003 г. А. Г.Куликовский, Е. И.Свешникова

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНТРОПИИ НА ФОРМУ УДАРНОЙ АДИАБАТЫ КВАЗИПОПЕРЕЧНЫХ УПРУГИХ ВОЛН

Рассматривается ударная адиабата квазипоперечных ударных волн в слабоанизотропной упругой среде. Для волн не слишком большой интенсивности упругий потенциал среды Φ представляется разложением в ряд по деформациям и изменению энтропии. Ранее авторами были подробно исследованы ударные волны, когда в разложении Φ оставлены только главные члены, выявляющие эффекты нелинейности и анизотропии, влияние изменения энтропии на упругие свойства среды не учитывалось. Ниже указанные результаты приняты за нулевое приближение и методом линеаризации около нулевого приближения найдены поправки, вызванные следующими членами разложения Φ . Подробно рассматривается модель слабонелинейной упругой среды, когда в разложении Φ дополнительно учитываются слагаемые в виде перекрестных произведений деформаций и энтропии и квадрата изменения энтропии. Для такой среды в явном виде получены изменения вида ударной адиабаты и расположения эволюционных участков на ней, вызванные учетом влияния скачка энтропии в ударной волне.

1. Исходные соотношения. Нулевое приближение. Соотношения на ударных волнах в упругих средах имеют вид [1]

$$[\partial\Phi/\partial u_i] = \rho_0 W^2 [u_i], \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

$$[\Phi] = -1/2 [\partial\Phi/\partial u_i][u_i] + (\partial\Phi/\partial u_i)^+ [u_i] \quad (1.2)$$

$$[v_i] + W[u_i] = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $u_i = \partial w_i / \partial x$, $v_i = \partial w_i / \partial t$, w_i – вектор перемещения точек среды, $\partial\Phi/\partial u_i$ – компоненты тензора напряжений Пиолы – Кирхгоффа, x – лагранжева координата, в качестве которой взята нормальная к фронту декартова координата в начальном состоянии, оси x_1, x_2 лежат в плоскости фронта волны. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Величины u_i характеризуют деформацию среды при одномерных движениях и вместе с компонентами скорости v_i испытывают разрыв на фронте ударной волны, ρ_0 – плотность среды перед ударной волной, $\Phi = \rho_0 U(u_i, S)$ – упругий потенциал среды, т.е. внутренняя энергия (в текущем состоянии), отнесенная к единице начального (до прохождения ударной волны) объема, $U(u_i, S)$ – внутренняя энергия единицы массы, S – энтропия единицы массы среды, W – лагранжева скорость распространения ударной волны $W = dx/dt$. Квадратные скобки, как обычно, обозначают скачок заключенной в них величины $[A] = A^+ - A^-$, A^- – значение перед и $A^+ = A$ – за разрывом.

В качестве упругого потенциала $\Phi(u_i, S)$ при описании квазипоперечных волн малой амплитуды в слабоанизотропных средах было использовано приближенное выражение [2]

$$\Phi^0(u_i, S) = \frac{f}{2}r^2 + \frac{d}{2}u_3^2 + br^2u_3 + \frac{h}{4}r^4 + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \rho_0 T_0(S - S_0), \quad r^2 = u_1^2 + u_2^2 \quad (1.4)$$

Здесь f, g, d, b, h – постоянные коэффициенты разложения, имеющие смысл упругих постоянных среды, причем считается, что коэффициент g , ответственный за анизотропию, много меньше остальных коэффициентов (если принять, что величины деформаций и их изменений имеют порядок ϵ , то влияние анизотропии и нелинейности на напряжения будет одного порядка, если $g \sim \epsilon^2$). Величины $T_0 = T^-, S_0 = S^-$, $\rho_0 = \rho^-$ соответствуют состоянию перед разрывом. В выражении (1.4) оставлены только те члены степени выше второй, которые существенны для описания главных нелинейных эффектов в квазипоперечных ударных волнах. Здесь отсутствуют слагаемые, имеющие более высокий порядок малости, в частности слагаемые, содержащие произведение изменения энтропии на какие-либо функции от u_i , ответственные за влияние изменения энтропии на механические свойства среды. Отсутствуют также анизотропные члены, содержащие u_i в степени выше второй (вследствие предполагаемой малости анизотропии) и члены, содержащие $u_1^2 + u_2^2$ в степенях выше второй (из-за предполагаемой малости нелинейности).

Будем называть соотношения на разрыве (1.1) с упругим потенциалом $\Phi = \Phi^0$ и следствия из них нулевым приближением. В частности, в этом приближении для квазипоперечных волн при всех u_1 и u_2 имеет место равенство [2, 3]

$$[u_3] = -\frac{b}{d-f}[r^2] \quad (1.5)$$

Оно позволяет исключить u_3 из первых двух соотношений (1.1) и рассматривать их отдельно, считая, что Φ^0 – функция u_1 и u_2 . При этом уравнения (1.1)–(1.3) сохраняют свой вид, только надо считать $i = 1, 2$, а функцию Φ^0 следует заменить на

$$H(u_1, u_2, S) = \frac{f}{2}r^2 + \frac{g}{2}(u_2^2 - u_1^2) - \frac{\kappa}{4}r^4 + \rho_0 T_0(S - S_0), \quad \kappa = \frac{2b^2}{d-f} - h \quad (1.6)$$

В указанном нулевом приближении была получена и исследована ударная адиабата [2, 3]. Ее проекция на плоскость (u_1, u_2) имеет вид

$$\mathcal{F}_0(u_1, u_2) \equiv (r^2 - R^2)(U_1 u_2 - U_2 u_1) + 2\frac{g}{\kappa}(u_1 - U_1)(u_2 - U_2) = 0 \quad (1.7)$$

$$U_\alpha = u_\alpha^-, \quad R^2 = U_1^2 + U_2^2, \quad \alpha = 1, 2$$

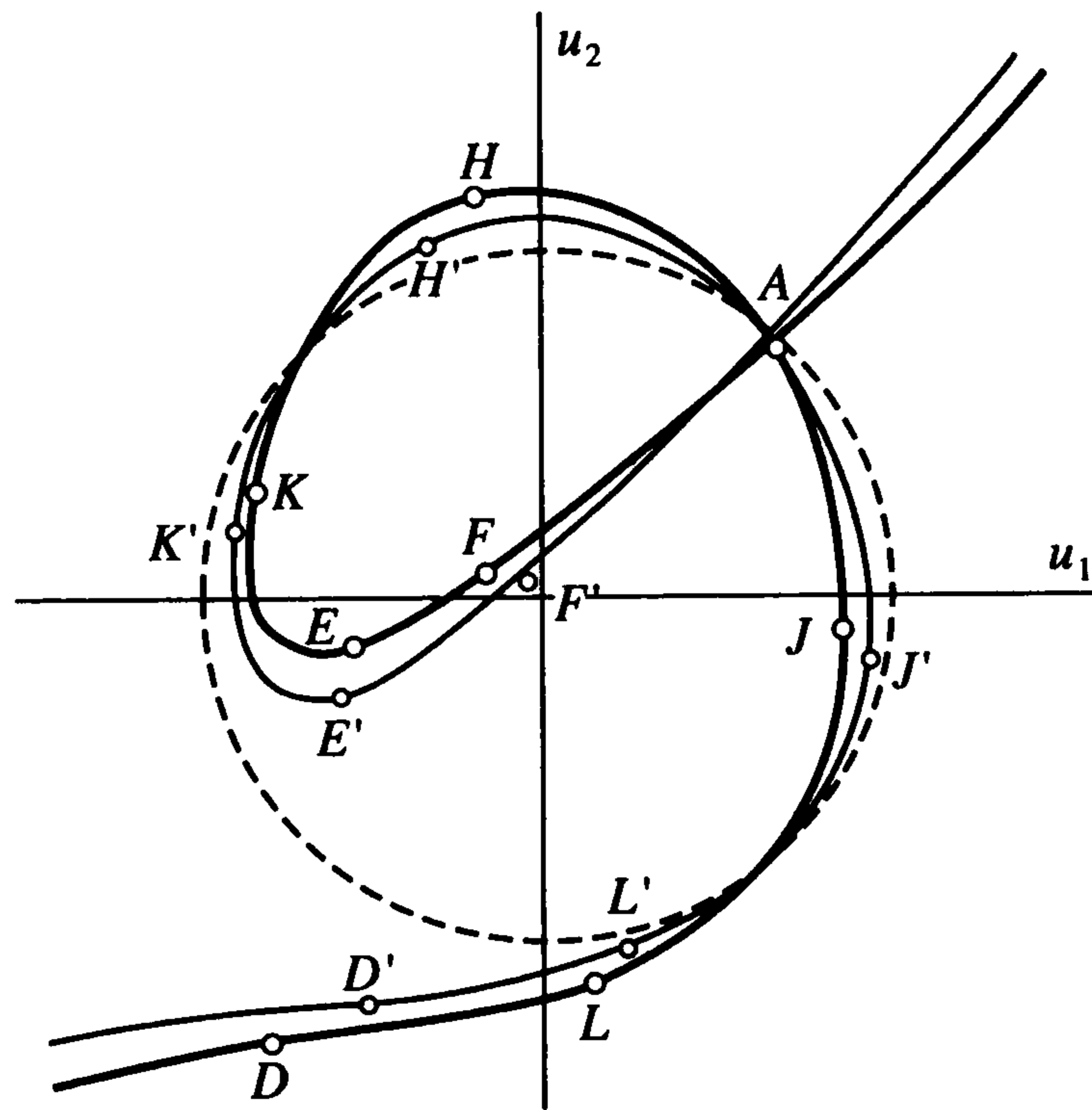
В том же приближении были получены выражения для изменения энтропии в квазипоперечных ударных волнах и для скорости ударной волны

$$[S]^0 = -\frac{\kappa}{4\rho_0 T_0}(r^2 - R^2)\tilde{u}^2, \quad \rho_0 W_0^2 - f + D_0(u_1, u_2) = 0 \quad (1.8)$$

где

$$D_0(u_1, u_2) = -\kappa\{r^2 - R^2 + U_1 u_1 + U_2 u_2 + \frac{1}{\tilde{u}^2}\left(\frac{g}{\kappa}((u_1 - U_1)^2 - (u_2 - U_2)^2) + 2(U_1(u_1 - U_1) + U_2(u_2 - U_2))^2\right)\}$$

$$\tilde{u}^2 = ((u_1 - U_1)^2 + (u_2 - U_2)^2)$$



Фиг. 1

В эти выражения следует подставлять значения u_1 и u_2 , удовлетворяющие равенству (1.7). Величина $[S]^0$ оказалась четвертого порядка малости (по ϵ), и поэтому в нулевом приближении ее влияние на свойства ударной адиабаты не учитывалось. Это позволило рассматривать первую группу соотношений на разрыве (1.1) независимо от уравнения энергии (1.2), следствием которого является первое из равенств (1.8).

На ударных волнах должны быть выполнены требования неубывания энтропии

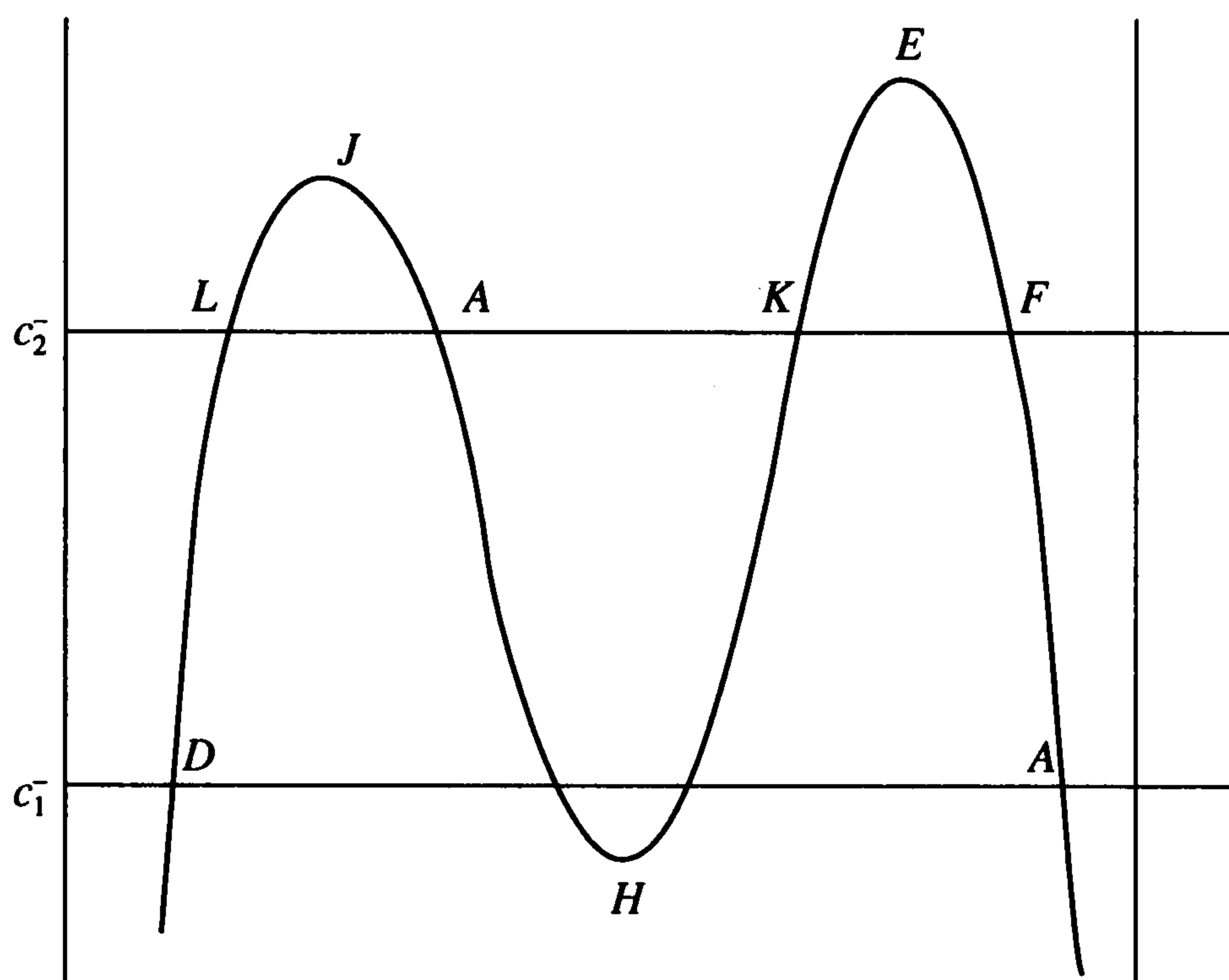
$$S - S_0 \geq 0 \quad (1.9)$$

и условия эволюционности, накладывающие ограничения на соотношение между скоростью скачка W и скоростями малых возмущений $c_\alpha^\pm$. Для волн, идущих в положительном направлении оси x , условия эволюционности для квазипоперечных упругих ударных волн имеют вид двух систем неравенств, соответствующих двум типам волн:

$$\begin{aligned} \text{а) } c_1^- \leq W \leq c_2^-, \quad 0 < W \leq c_1^+ \quad \text{для медленных волн} \\ \text{б) } c_2^- \leq W, \quad c_1^+ \leq W \leq c_2^+ \quad \text{для быстрых волн} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь c_α^- и c_α^+ ($\alpha = 1, 2$) – скорости малых возмущений перед и за разрывом.

Одновременное выполнение условий (1.9) и (1.10) выделяет на ударной адиабате (1.7) отрезки, пригодные для использования при построении решений (эволюционные отрезки). На фиг.1 на плоскости сдвиговых деформаций (u_1, u_2) жирной линией изображена ударная адиабата нулевого приближения. Состояние перед разрывом представлено точкой A с координатами (U_1, U_2) , штрихпунктиром изображена окружность, на которой согласно первому равенству (1.8) $S = S_0$, причем $S \geq S_0$ внутри окружности для сред с $\kappa > 0$ и вне окружности – для сред с $\kappa < 0$. Буквами F, K, E, J, D, L, H на ударной адиабате отмечено положение точек Жуге (в которых $W = c_\alpha^\pm$),



Фиг. 2

служащих границами эволюционных отрезков. Заметим, что как вид ударной адиабаты, так и положение точек Жуге на ней не зависят от знака κ . Однако примем далее для определенности $\kappa > 0$.

На фиг. 2 для нулевого приближения приведен примерный график зависимости скорости скачка W_0 в среде с $\kappa > 0$ от некоторого параметра l , монотонно меняющегося вдоль ударной адиабаты. На пересечении графика $W_0(l)$ с горизонтальными прямыми $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ лежат точки Жуге F, K, D, L по состоянию перед разрывом. Точки экстремума скорости E, J и H являются точками Жуге по состоянию за разрывом. В этих точках функция $S(l)$ также имеет экстремум [2, 4, 5]. Одинаковыми буквами на фиг. 1 и 2 обозначены соответствующие точки. Точке A на фиг. 1, представляющей начальное состояние, соответствуют две точки на фиг. 2.

2. Первое приближение. Общие формулы. Найдем теперь уточнение вида ударной адиабаты и положения точек Жуге на ней при более полном представлении упругого потенциала, продолжая предполагать деформации не слишком большими. Задача заключается в учете следующих членов разложения упругого потенциала среды $\Phi(u_1, u_2, u_3, S)$ по сравнению с выписанными в соотношении (1.4). Положим

$$\Phi = \Phi^0 + \Phi^1, \quad \Phi^1 \ll \Phi^0 \quad (2.1)$$

Функция Φ^0 определена равенством (1.4), а Φ^1 представляет малые добавки, влияние которых требуется учесть. Будем считать, что постулированное в (2.1) сильное неравенство между Φ^0 и Φ^1 выполняется также для первых и вторых производных этих функций.

Для изучения проекции ударной адиабаты на плоскость u_1, u_2 используем третье ($i = 3$) уравнение (1.1) для исключения $[u_3]$ из первых двух. Запишем это уравнение в виде

$$[u_3] + \frac{b}{d-f}[r^2] = q_3, \quad q_3 = \frac{b(\rho_0 W^2 - f)}{(d-f)^2}[r^2] - \frac{1}{d-f} \left[\frac{\partial \Phi^1}{\partial u_2} \right] \quad (2.2)$$

Первые два ($i = 1, 2$) уравнения (1.1) приводятся к виду

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u_\alpha} \right] - \rho_0 W^2 [u_\alpha] = q_\alpha, \quad q_\alpha = -b u_\alpha q_3 - \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial u_\alpha} \right], \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.3)$$

Функция H представлена равенством (1.6). Левые части уравнений (2.2), (2.3) соответствуют нулевому приближению. Правые части происходят от добавления Φ^1 к функции Φ^0 и предполагаются малыми. Вместо $[u_3]$ и $[S]$ в правые части должны быть подставлены выражения (1.5) и (1.8). При этом q_α – функции начального состояния U_1, U_2, U_3, S_0 , а также координат u_1 и u_2 , задающих состояние за разрывом. Ввиду малости q величины u_1 и u_2 в этих выражениях могут быть взяты с невозмущенной ударной адиабаты. При изучении ударной адиабаты, когда состояние перед разрывом задано, q_α являются функциями переменных u_1 и u_2 , представляющих состояние за разрывом.

Используя малость q_α , можно линеаризовать левые части уравнений (2.3). Получим

$$(H_{\alpha\beta} - \rho_0 W^2 \delta_{\alpha\beta}) \delta u_\beta = \rho_0 [u_\alpha] \delta W^2 + q_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (2.4)$$

$$H_{\alpha\beta} = \partial^2 H / \partial u_\alpha \partial u_\beta$$

Здесь δu_α – изменения u_α , происходящие из-за отличия от нуля правых частей уравнений (2.3) и изменения δW – скорости ударной волны, которое считается малой произвольной величиной. Все величины, не помеченные знаком δ , предполагаются известными из нулевого приближения.

Положение и вид ударной адиабаты на плоскости u_1, u_2 для уточненной модели можно представить, используя вектор смещения $\delta \mathbf{u}$ точек ударной адиабаты нулевого приближения. Смещение точек $\delta \mathbf{u}$ можно рассматривать как сумму двух векторов $\delta \mathbf{u}^{(1)} + \delta \mathbf{u}^{(2)}$, происходящих от двух слагаемых в правой части равенства (2.4).

Если в этих равенствах положить $q_\alpha = 0$, то отличие δu_α от нуля связано только с изменением W^2 вдоль ударной адиабаты нулевого приближения. При этом вектор $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{(1)}$ оказывается касательным к этой ударной адиабате, а его компоненты $\delta u_\alpha^{(1)}$ находятся из уравнений

$$(H_{\alpha\beta} - \rho_0 W^2 \delta_{\alpha\beta}) \delta u_\beta^{(1)} = \rho_0 [u_\alpha] \delta W^2 \quad (2.5)$$

Если же $\delta W^2 = 0$, то получим $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^{(2)}$. Смещение $\delta u_i^{(2)}$ точек ударной адиабаты, соответствующих одинаковым значениям W (т.е. при $\delta W^2 = 0$), может быть найдено из уравнений

$$(H_{\alpha\beta} - W^2 \delta_{\alpha\beta}) \delta u_\beta^{(2)} = q_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.6)$$

В уравнениях (2.4)–(2.6) удобно перейти в систему координат v_i с началом в рассматриваемой точке ударной адиабаты и с осями параллельными собственным векторам матрицы $H_{\alpha\beta}$ в этой точке, (которые касаются интегральных кривых волн Римана). При этом компоненты векторов $[u_\alpha]$, δu_α , q_α подвергнутся ортогональному преобразованию и будут обозначаться соответственно $[v_\alpha]$, v_α , h_α . Матрица $H_{\alpha\beta}$ после преобразования станет диагональной с квадратами характеристических скоростей c_1^2 и c_2^2 по главной диагонали. Уравнения (2.4) примут вид

$$(c_\alpha^2 - W^2) \delta v_\alpha = [v_\alpha] \delta W^2 + h_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.7)$$

Здесь в левой части номер α у характеристической скорости взят в скобки, чтобы подчеркнуть, что по этому индексу не производится суммирование.

Вектор $\delta \mathbf{u}^{(1)}$ касательной к ударной адиабате получим при $h_1 = h_2 = 0$. Его компоненты $v_\alpha^{(1)}$ в новой системе координат

$$\tau_\alpha = v_\alpha^{(1)} = \frac{[v_\alpha]}{c_\alpha^2 - W^2} \delta W^2, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.8)$$

При $\delta W^2 = 0$ получим компоненты $v_\alpha^{(2)}$ вектора $\delta \mathbf{u}^{(2)}$

$$v_\alpha^{(2)} = \frac{h_\alpha}{c_\alpha^2 - W^2}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (2.9)$$

В точках Жуге, где $W = c_\alpha$ (c_α – характеристическая скорость за разрывом), W достигает экстремума. Если величину δW^2 считать пропорциональной изменению W^2 на некоторой длине dl ударной адиабаты, то $c_\alpha^2 - W^2$ и δW^2 одновременно будут изменять знак при переходе через точку Жуге. Можно нормировать касательный вектор τ , так чтобы $|\tau| = 1$, путем подбора соответствующего значения $|\delta W^2|$ (которое при этом вдали от точек Жуге уже не будет малым).

Для того чтобы выяснить, с какой стороны от ударной адиабаты нулевого приближения лежит уточненная ударная адиабата, запишем векторное произведение векторов (2.9) и (2.8) (которое направлено по оси u_3)

$$(\mathbf{v}^{(2)} \times \boldsymbol{\tau})_3 = (\mathbf{h} \times [\mathbf{v}])_3 \frac{\delta W^2}{(c_1^2 - W^2)(c_2^2 - W^2)} \quad (2.10)$$

Если считать, что знак δW^2 совпадает со знаком приращения W^2 при перемещении вдоль ударной адиабаты в некотором направлении, то, согласно сказанному выше, знак коэффициента при векторном произведении векторов $\mathbf{h}$ и $\mathbf{v}$ не будет меняться при прохождении точек Жуге. Таким образом, знак векторного произведения (2.10) определяется знаком векторного произведения $\mathbf{h} \times [\mathbf{v}]$. Последнее может быть записано также в исходной системе координат

$$\rho_0(\mathbf{h} \times [\mathbf{v}])_3 = (\mathbf{q} \times [\mathbf{u}])_3 = q_1[u_2] - q_2[u_1] \quad (2.11)$$

Точкам пересечения "старой" и уточненной ударных адиабат соответствует обращение в нуль выражения (2.11).

Найдем изменение положения точек Жуге. Это важно, поскольку точки Жуге являются концами эволюционных отрезков ударной адиабаты. Если условие Жуге выполняется перед разрывом, т.е. $W^2 = (c_\alpha^-)^2$, то можно отдельно вычислить изменение $\delta(c_\alpha^-)^2$, а δu_β для точек Жуге находить из уравнения (2.4), где положено $\delta W^2 = \delta(c_\alpha^-)^2$. В переменных v_α результат может быть представлен в виде

$$v_\alpha = \frac{h_\alpha + [v_\alpha] \delta(c_\alpha^-)^2}{c_\alpha^2 - W^2} \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь изменения ударной адиабаты вблизи точек Жуге, в которых W достигает своих экстремальных значений $W = c_\alpha^+ = c_\alpha$, а также изменение положения

самой точки Жуге. Исключая W^2 из уравнений (2.3), получим новое уравнение ударной адиабаты

$$\mathcal{F}_0(u_1, u_2) = P, \quad P = (q_1[u_2] - q_2[u_1])/k \quad (2.13)$$

и новое соотношение для W^2

$$\rho_0 W^2 - f + D_0(u_1, u_2) = Q, \quad Q = \rho_0 \frac{q_1[u_1] - q_2[u_2]}{[u_1]^2 + [u_2]^2} \quad (2.14)$$

Равенства (2.13) и (2.14) только правыми частями отличаются от соответствующих равенств нулевого приближения.

В точке Жуге нулевого приближения по состоянию за разрывом, где $W_0 = c_0$, ударная адиабата касается интегральной кривой волн Римана, поэтому введенные выше оси координат v_1 и v_2 направлены соответственно по касательной и нормали к ударной адиабате в этой точке. Поскольку в рассматриваемой точке Жуге W_0^2 имеет экстремум, производная от функции $D_0(u_1, u_2)$ по v_1 равна нулю. Это позволяет в окрестности точки Жуге нулевого приближения представить уравнение ударной адиабаты (1.7) и выражение для скорости разрыва соответственно в виде

$$A v_2 + 1/2 B v_1^2 = 0, \quad \rho_0 W^2 - \rho_0 W_*^2 = a v_2 + 1/2 b v_1^2$$

Здесь A, B, a, b – значения соответствующих производных от функций $\mathcal{F}_0$ и D_0 , W_* – значение скорости в точке Жуге в нулевом приближении. При этом равенства (2.13) и (2.14), учитывающие малые добавочные члены, будут иметь вид:

$$A v_2 + 1/2 B v_1^2 + C v_1 + P = 0, \quad \rho_0 W^2 - \rho_0 W_*^2 = a v_2 + 1/2 b v_1^2 + c v_1 + Q \quad (2.15)$$

$$C = \partial P / \partial v_1, \quad c = \partial Q / \partial v_1$$

Значения C, c, P и Q – малые величины, взятые в точке Жуге нулевого приближения. Коэффициенты, отличные от нуля в нулевом приближении, которые не малы, оставлены без изменения. Выражая из первого равенства (2.15) v_2 и подставляя во второе, получим

$$v_2 = -\frac{1}{A} \left(P + \frac{1}{2} B v_1^2 + C v_1 \right) \quad (2.16)$$

$$\rho_0 W^2 - \rho_0 W_*^2 = Q - \frac{aP}{A} + \left(c - \frac{a}{A} C \right) v_1 + \frac{1}{2} \left(b - \frac{a}{A} B \right) v_1^2$$

Первое равенство (2.16) – это уточненное уравнение ударной адиабаты, а второе задает значение W на ней. Положение точки Жуге соответствует экстремуму W^2 . Ее координаты при сделанных приближениях таковы:

$$v_2 = -\frac{P}{A}, \quad v_1 = -\frac{cA - Ca}{bA - Ba} \quad (2.17)$$

3. Влияние изменения энтропии. В нелинейной теории упругости часто используется модель [6], в которой кроме принятого выше нулевого приближения в выражении для упругого потенциала Φ учитываются еще члены с произведениями

деформаций на изменение энтропии, а также член с квадратом изменения энтропии, т.е.

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi^0 + \Phi_1, \quad \Phi_1 = \rho_0 T_0 (\gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2) (S - S_0) + \beta T_0 (S - S_0)^2 \\ I_1 &= \varepsilon_{ii}, \quad I_2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad \gamma_1, \gamma_2, \beta - \text{const}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Такое уточнение, например, потребуется для материалов типа каучуков, в которых упругие деформации, вызванные изменением энтропии (температуры), могут оказаться вполне сравнимыми с деформациями от силовых воздействий [7]. В то же время для подобных материалов хорошо выполняется условие несжимаемости, что и примем далее. Для одномерных движений условие несжимаемости сводится к равенству $u_3 = \text{const} = 0$, так что продольные волны отсутствуют. При этом каждый из инвариантов I_1 и I_2 тензора деформаций с принятой относительной точностью пропорционален выражению $r^2 = u_1^2 + u_2^2$. Таким образом, упругий потенциал нулевого приближения представлен выражением (1.6), а уточняющий добавок Φ_1 имеет вид

$$\Phi_1 = \rho_0 T_0 \gamma r^2 (S - S_0) + \beta (S - S_0)^2 \quad (3.2)$$

Для выяснения смысла коэффициентов заметим, что термодинамическое тождество $T = \partial U / \partial S$ (где $U = \Phi / \rho_0$) с использованием выражений (3.1) и (3.2) дает

$$T = T_0 [1 + \gamma r^2] + 2\beta (S - S_0) / \rho_0 \quad (3.3)$$

Из этого равенства видно, что при адиабатическом процессе ($S = \text{const}$) величина γ определяет зависимость температуры от деформации, а также зависимость напряжений от температуры, поскольку $\partial \Phi / \partial u_i$ – напряжения на площадке, нормальной к оси x . Далее будем считать $\gamma > 0$, что наблюдается у резин в области не слишком малых температур. Так как при постоянной деформации приток тепла $dQ = c_u dT$, где c_u – теплоемкость при $u_i = \text{const}$, причем $dQ = T dS$, то получим $dT = (T / c_u) dS$. С другой стороны, дифференцируя равенство (3.3) при $u_i = \text{const}$, получим $dT = (2\beta / \rho_0) dS$, откуда видно, что коэффициент β определяется теплоемкостью при постоянной деформации:

$$\beta = \rho_0 T_0 / (2c_u)$$

Очевидно, $\beta > 0$.

Для принятой модели линеаризация около нулевого приближения позволяет найти ударную адиабату и уточняющие добавки к скорости скачка W и скачку энтропии $S - S_0$ в явном виде.

В рассматриваемом случае

$$q_\alpha = -2\gamma \rho_0 T_0 (S - S_0) u_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.4)$$

и уравнения (2.3) принимают вид

$$[\partial H / \partial u_\alpha] - \rho_0 W^2 (u_\alpha - U_\alpha) = -2\gamma \rho_0 T_0 (S - S_0) u_\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.5)$$

Исключая W , получим уравнение ударной адиабаты (2.13) в виде

$$\mathcal{F}_0(u_1, u_2) = P, \quad P = 2\gamma \rho_0 T_0 \kappa^{-1} (S - S_0) (u_1[u_2] - u_2[u_1]) \quad (3.6)$$

В отличие от нулевого приближения, в котором $\mathcal{F}_0 = 0$, теперь форма ударной адиабаты зависит еще и от изменения энтропии. Для величины $S - S_0$ в правой части

равенства (3.6) можно использовать выражение (1.8) из нулевого приближения. Получим

$$P = -\frac{1}{2}\gamma\tilde{u}^2(r^2 - R^2)(U_1u_2 - U_2u_1) \quad (3.7)$$

Тогда уточненная ударная адиабата представляется зависимостью только от деформаций сдвига u_1, u_2 :

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0 - P = 0 \quad (3.8)$$

Она изображена на той же фазовой плоскости u_1, u_2 на фиг. 1 тонкой линией. Обе кривые $\mathcal{F}_0 = 0$ и $\mathcal{F} = 0$, построенные для начального состояния U_1, U_2 имеют одну и ту же асимптоту и пересекаются между собой в точках, симметричных с начальной относительно осей u_1 и u_2 . Взаимное расположение двух кривых можно выяснить, пользуясь общими правилами разд. 2. Но для данного частного случая, когда известен явный вид уравнений обеих кривых, проще это сделать, сравнив взаимное положение точек пересечения этих кривых с осями координат u_1 и u_2 . При этом можно заметить, что при $\gamma/\kappa < 0$ новая ударная адиабата имеет еще дополнительные ветви, но они находятся за пределами, обусловленными предположением о малости u_α .

Скорость разрыва W находится из условий на разрыве (3.5)

$$\rho_0 W^2 = \rho_0 W_0^2 + Q \quad (3.9)$$

$$Q = 2\gamma\rho_0 T_0(S - S_0)\{u_1(u_1 - U_1) + u_2(u_2 - U_2)\}/\tilde{u}^2$$

Для вычисления изменения энтропии на скачке имеем уравнение

$$\rho_0 T_0(S - S_0) + \frac{1}{4}\kappa(r^2 - R^2)\tilde{u}^2 = -\gamma\rho_0 T_0(S - S_0)(U_1u_1 + U_2u_2) + \beta(S - S_0)^2$$

Равенство нулю левой части соответствует нулевому приближению (1.8), правая часть – уточняющие добавки. Линеаризация по $S - S_0$ дает уточненное выражение для изменения энтропии в ударной волне

$$S - S_0 = -\frac{\kappa}{4T_0\rho_0}(r^2 - R^2)\tilde{u}^2 \left\{ 1 - \frac{\gamma\rho_0}{\kappa}(U_1u_1 + U_2u_2) \right\} \quad (3.10)$$

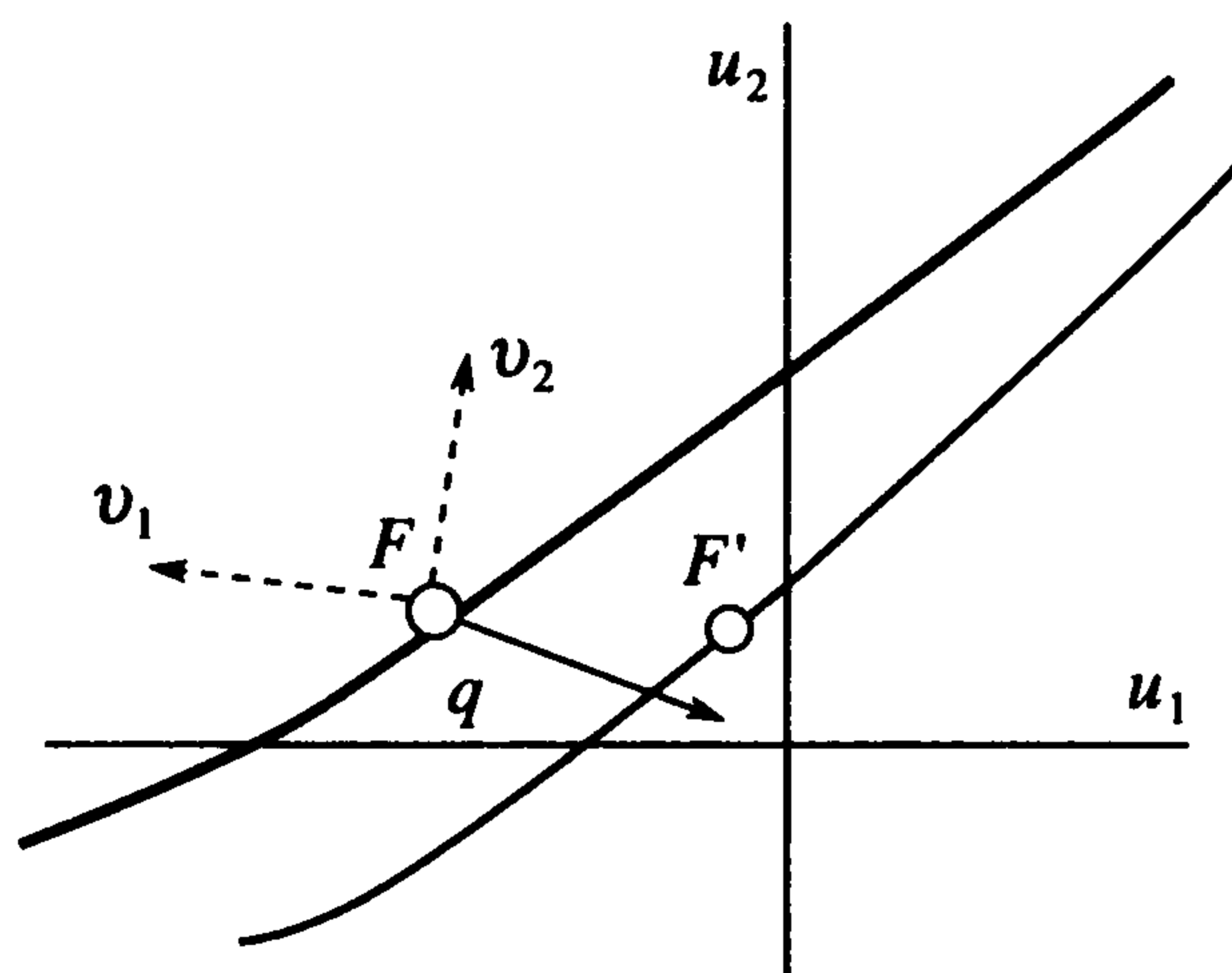
Как и в нулевом приближении, $S = S_0$ на окружности, проходящей через начальную точку (U_1, U_2) с центром в начале координат (на фиг. 1 она изображена штриховой линией). В принятой области изменения u_α выражение в фигурных скобках в (3.10) знака не меняет, и условию возрастания энтропии удовлетворяют те состояния за разрывом, которые лежат внутри энтропийной окружности $r^2 = R^2$ для сред с $\kappa > 0$ и вне этой окружности для сред с $\kappa < 0$. В выражение для $S - S_0$ не вошел коэффициент β .

Температура за скачком находится из условия $T = (\partial\Phi/\partial S)_{u_\alpha = \text{const}}$. Имеем:

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \gamma(r^2 - R^2) + 2\beta(S - S_0) = \kappa(r^2 - R^2)(\gamma\rho_0/\kappa - \beta\tilde{u}^2)$$

Член с γ отвечает за адиабатическое изменение температуры, а член с β – за изменение температуры, вызванное скачком энтропии.

Для эволюционных отрезков на ударной адиабате, определяемых условиями (1.10), выясним, как сместились их концы – точки Жуге F, K, L, D по состоянию перед скачком ($W = c_\alpha^-$) (фиг. 1) по отношению к их положению в нулевом приближе-



Фиг. 3

нии. Поскольку в рассматриваемом случае $\delta c_{\alpha}^{-} = 0$, то при нахождении смещения v_{α} этих точек Жуге следует считать $\delta W^2 = 0$ и пользоваться формулами (2.9). Напомним, что компоненты $\{v_{\alpha}\}$ отсчитываются от рассматриваемой точки на нулевой ударной адиабате вдоль касательных к интегральным кривым волн Римана, проходящим через эту точку. Два семейства интегральных кривых представлены симметричными относительно осей u_1, u_2 овалами, вытянутыми вдоль оси u_2 , и ортогональными к ним линиями, переходящими на бесконечности в лучи [8]. Как видно из формул (3.4), вектор $\mathbf{q} = \{q_{\alpha}\}$ направлен по радиус-вектору u_{α} в сторону начала координат (так как было принято $\gamma > 0$). Знание ориентации вектора $\mathbf{q}$ относительно осей v_{α} позволяет указать знаки компонент h_{α} в формуле (2.9). Знаки знаменателя в этой формуле определяются условиями эволюционности (1.10). Из них следует [2]

$$W^F < c_1 < c_2, \quad c_1 < W^K < c_2, \quad c_1 < c_2 < W^{L,D} \quad (3.11)$$

В качестве примера покажем, как определяется направление смещения, т.е. знаки компонент v_{α} для точки Жуге F , представляющей конец эволюционного отрезка медленных ударных волн при $\kappa > 0$. На фиг. 3 изображена в увеличенном масштабе окрестность точки F плоскости u_1, u_2 (фиг.1). Как и прежде, жирной линией изображена часть ударной адиабаты нулевого приближения, тонкой линией – участок уточненной ударной адиабаты, штриховыми линиями представлены элементы интегральных кривых волн Римана, по касательным к которым в точке F направлены оси координат v_{α} . Очевидно, в точке F вектор $\mathbf{q}$ имеет компоненты $h_1^F < 0, h_2^F < 0$. Учитывая знаки знаменателей в равенствах (2.9) в соответствии с неравенствами (3.11), получим $v_1^F < 0, v_2^F < 0$, что определяет качественно положение точки F' на уточненной ударной адиабате. Аналогично для других точек Жуге получим

$$h_1^K < 0, \quad h_2^K > 0, \quad h_1^L < 0, \quad h_2^L > 0, \quad h_1^D < 0, \quad h_2^D < 0$$

Смещенные точки K', L', D' указаны на фиг. 1. Положение указанных точек Жуге в нулевом приближении и в уточненном случае можно найти также численно, воспользовавшись их определением $W = c_{\alpha}$. Выражение для W определяется формулой (3.9). Характеристические скорости находятся стандартным способом [1]

$$c_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Phi_{11} - \Phi_{22})^2 + 4\Phi_{12}}, \quad \Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}}$$

Для нулевого приближения

$$\rho_0(c_{1,2}^2)^0 = f - \kappa \left(2(u_1^2 + u_2^2) \pm \sqrt{(u_1^2 - u_2^2 + g)^2 + 4u_1^2 u_2^2} \right)$$

Для добавочного слагаемого Φ^1 упругого потенциала имеем

$$\Phi_{11}^1 = \Phi_{22}^1 = 2\gamma\rho_0 T_0(S - S_0), \quad \Phi_{12}^1 = 0$$

и, следовательно, уточненные выражения для характеристических скоростей имеют вид

$$c_\alpha^- = (c_\alpha^-)^0, \quad c_\alpha^2 = (c_\alpha^2)^0 + 2\gamma\rho_0 T_0(S - S_0)$$

На фазовой плоскости u_1, u_2 пересечение ударной адиабаты $\mathcal{F}_0 = 0$ с линией $W^0 = c_2^-$ дает точки Жуге F, K, D , а пересечение с линией $W^0 = c_1^-$ – точку L . Новые положения соответствующих точек F', K', D', L' находятся из пересечения ударной адиабаты $\mathcal{F} = 0$ с линиями $W = c_\alpha^-$ ($\alpha = 1, 2$). Численные результаты подтверждают сделанные выше качественные выводы.

Исследование смещений точек Жуге E, J, H по состоянию за скачком ($W = c_\alpha^+$) с помощью формул (2.15)–(2.17) слишком сложно. Поэтому для этих точек сразу воспользуемся предложенным выше численным способом. Полученные таким способом точки E', J', H' показаны на фиг.1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00729, 02-01-00613, 00-15-96005).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bland D.R.* Nonlinear Dinamic Elasticity. Toronto; London; Waltham, 1969 = Бленд Д.Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.
2. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
3. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Исследование ударной адиабаты квазипоперечных ударных волн в предварительно напряженной упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 831–840.
4. *Hanyga A.* On the solution to the Riemann problem for arbitrary hyperbolic system of conservation laws // Polish Acad. Sci. Publ. Inst. Geophys., Ser. A. 1976. № 1(98). 123 p.
5. *Куликовский А.Г.* О свойствах ударных адиабат в окрестности точек Жуге // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 2. С. 184–186.
6. *Bazer J., Ericson W.B.* Nonlinear wave motion in magnetoelasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1974 V. 55. № 2. P. 124–192.
7. *Treloar L.R.* The Physics of Rubber Elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1949 = Трелоар Л. Физика упругости каучука. М: Изд. иностр. лит., 1953. 240 с.
8. *Свешникова Е.И.* Простые волны в нелинейно-упругой среде // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 642–646.