

УДК 532.5:534.1

© 2003 г. А. М. Тер-Крикоров

**ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ИСТОЧНИКА В ДВУХСЛОЙНОЙ АТМОСФЕРЕ,
ОГРАНИЧЕННОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

В линейной постановке исследуется задача о внутренних волнах, возбуждаемых точечным источником в двухслойной атмосфере. Нижний слой ограничен горизонтальной плоскостью, верхний слой неограничен. Предполагается, что на границах слоев вертикальные смещения и скорости частиц меняются непрерывно, частота Брента–Вяйсяля постоянна в каждом слое, но терпит разрывы на общей границе слоев, источник расположен в нижнем слое. Исследуется асимптотическое поведение возмущений в верхнем слое на больших временах. Решение находится методом интегральных преобразований и выражается через двойные интегралы от многозначных аналитических функций. Предлагается преобразование, позволяющее представить решение в виде суммы однократных интегралов. Поведение этих интегралов на больших временах находится методом стационарной фазы. Показано, что существует критический конус, при переходе через который асимптотика меняет свой характер.

Ранее рассматривалась аналогичная задача для случая, когда нижний слой неограничен [1], и был изучен случай трехслойной атмосферы, когда ограничен только средний слой [2].

1. Постановка задачи и интегральное представление решения. Рассматривается идеальная атмосфера, заполняющая трехмерное пространство и разделяющаяся на два слоя с постоянными, но различными частотами Брента–Вяйсяля (БВ). Единица времени выбирается так, что частота БВ в верхнем слое равна единице. Частота БВ в нижнем слое равна $N < 1$. В качестве единицы длины выбирается толщина нижнего слоя. Начало декартовой системы координат x, y, z выбирается на невозмущенной границе раздела слоев, ось z направлена противоположно силе тяжести, источник находится в точке $(0, 0, -c)$. Мощность источника $Q(t)$ – непрерывно дифференцируемая финитная функция с носителем на отрезке $[0, T]$. Предполагается, что $Q(0) = \dot{Q}(0) = 0$. Вертикальное отклонение жидких частиц от положения равновесия выражается через производную по z функции $w(x, y, z, t)$, которая является решением следующей задачи

$$\begin{aligned}(\Delta w)_{tt} + N^2 \Delta_2 w &= \frac{\dot{Q}(t)}{4\pi} \delta(x) \delta(y) \delta(z + c), \quad -1 < z < 0 \\ (\Delta w)_{tt} + \Delta_2 w &= 0, \quad 0 < z < +\infty\end{aligned}\tag{1.1}$$

Функция w и частные производные первого порядка этой функции ограничены и меняются непрерывно при переходе через границы слоев. Начальные условия нулевые. На нижней границе вертикальные смещения равны нулю, следовательно, $w_z(-1) = 0$ (индекс z означает производную по z).

Применяя преобразование Лапласа по переменной t с нулевыми начальными условиями и преобразование Ганкеля по $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ищем решение задачи (1.1) в виде

$$w = \frac{1}{16\pi^3 i} \int_0^{+\infty} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \varphi(u, p, z) J_0(ru) R(p, t) du dp \quad (1.2)$$

$$R(p, t) = \int_0^T Q(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau \quad (1.3)$$

Обозначим

$$\alpha(p) = \sqrt{1 + p^2}/p, \quad \omega(p) = \sqrt{N^2 + p^2}/p \quad (1.4)$$

При $z > 0$ функция $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{zz} - u^2 \alpha(p)^2 \varphi = 0, \quad 0 < z < +\infty \quad (1.5)$$

Любое ограниченное при $z > 0$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$ решение уравнения (1.5) удовлетворяет условию $\varphi_z(z) + u\alpha\varphi(z) = 0$.

Так как функция $\varphi_z(z)$ непрерывна в точке $z = 0$, то для определения функции $\varphi(z)$ на отрезке $[-1, 0]$ нужно решить граничную задачу (построить функцию Грина)

$$\begin{aligned} \varphi_{zz}(z) - u^2 \omega^2 \varphi(z) &= (u/p) \delta(z + c) \\ \varphi_z(0) + u\alpha\varphi(0) &= 0, \quad \varphi_z(-1) = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Вронскиан двух решений уравнения (1.6)

$$\varphi_1(z) = \operatorname{ch}(u\omega(z+1)), \quad \varphi_2(z) = (\omega \operatorname{ch}(u\omega z) - \alpha \operatorname{sh}(u\omega z))/\omega. \quad (1.7)$$

равен

$$-\varphi_2'(-1) = u\zeta(p) \quad (1.8)$$

$$\zeta(p) = \alpha \operatorname{ch} u\omega + \omega \operatorname{sh} u\omega = (\alpha + \omega) e^{u\omega} + (\alpha - \omega) e^{-u\omega}$$

и решение граничной задачи (1.6) имеет вид

$$\varphi(u, p, z, c) = \frac{1}{p\zeta(p)} \begin{cases} \varphi_1(z)\varphi_2(-c), & -1 \leq z \leq -c \\ \varphi_1(-c)\varphi_2(z), & -c \leq z \leq 0 \end{cases}$$

Подставляя эту функцию в равенство (1.2), получаем решение задачи (1.1).

При $z > 0$ это решение может быть представлено в виде

$$w = v(r, z, c, t) + v(r, z, 2 - c, t) \quad (1.9)$$

$$v(r, z, c, t) = \frac{1}{16\pi^3 i} \int_0^{+\infty} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \psi(u, p, z, c) J_0(ru) R(p, t) du dp \quad (1.10)$$

$$\psi(u, p, z, c) = (p\zeta(p))^{-1} e^{u(\omega(1-c) - \alpha z)} \quad (1.11)$$

функция $R(p, t)$ определена равенством (1.3).

В дальнейшем ограничимся исследованием поведения решения в верхнем слое.

2. Представление решения в виде суммы однократных интегралов. Полюсы функции ψ в формуле (1.10) являются нулями функции $\zeta(p)$, определенной равенством (1.8). Заметим, что в силу равенств (1.4) $\omega(p)$ и $\zeta(p)$ – четные функции и $\zeta(\bar{p}) = \overline{\zeta(p)}$.

Если p – нуль $\zeta(p)$, то $\bar{p}$ и $-p$ также нули этой функции. Вне мнимой оси нулей нет. В самом деле, пусть точка p лежит в четвертом квадранте и $\operatorname{Re} p > 0$. Точка $1/p$ лежит в первом квадранте, точки $1/p^2$ и $1 + 1/p^2$ – в верхней полуплоскости, точка $\alpha(p)$ – в первом квадранте. Аналогично точка $\omega(p)$ лежит в первом квадранте. Но

$$\left| \frac{\alpha(p) - \omega(p)}{\alpha(p) + \omega(p)} \right| \leq 1, \quad |e^{u\omega(p)}| > 1$$

и p не может быть нулем функции ζ . Тогда $\bar{p}$ и $-p$ также не могут быть нулями $\zeta(p)$, и следовательно, если $\operatorname{Re} p \neq 0$, то p не может быть нулем функции ζ .

Пусть $p = iq$ и $|q| > 1$. В этом случае

$$\alpha(iq) = \sqrt{q^2 - 1}/q, \quad \omega(iq) = \sqrt{q^2 - N^2}/q$$

$$\zeta(iq) = 2\alpha(iq)\cos(u\omega(iq)) + 2i\omega(iq)\sin(u\omega(iq))$$

и, следовательно, $\zeta(iq) \neq 0$ при q вещественном и $|q| > 1$.

Рассмотрим внутренний интеграл в формуле (1.2). Соединим разрезом по мнимой оси точки $[-i, i]$. В плоскости с таким разрезом подынтегральная функция регулярна. Если C – симметричный относительно вещественной и мнимой осей простой гладкий контур, окружающий разрез, то в силу теоремы Коши формулу (1.10) можно записать в виде

$$v(r, z, c, t) = \frac{1}{16\pi^3} \int_0^{+\infty} \int_C \psi(u, p, z, c) J_0(ru) R(p, t) du dp \quad (2.1)$$

Обозначим через C_i пересечение контура C с i -м квадрантом.

При движении точки p в положительном направлении по дуге $C_1 + C_2$ точка $-p$ движется в положительном направлении по дуге $C_3 + C_4$. Интеграл по второй дуге можно свести к интегралу по первой дуге, делая в нем замену $p = -p_1$. В комплексно-сопряженных точках подынтегральная функция принимает комплексно-сопряженные значения. При движении по контуру C_1 в положительном направлении сопряженная точка движется по контуру C_2 в отрицательном направлении. Учитывая четность функций $\alpha(p)$ и $\omega(p)$, после перестановки в формуле (2.1) порядка интегрирования получаем

$$v(r, z, t, c) = \frac{1}{4\pi^3} \operatorname{Im} \int_0^T Q(\tau) \int_{C_1}^{+\infty} \psi(u, p, z, c) J_0(ru) \operatorname{sh} p(t - \tau) dp du d\tau \quad (2.2)$$

Замечая, что на контуре C_1 выполнено условие $\operatorname{Re} \omega > 0$, преобразуем подынтегральное выражение. Так как в силу выражений (1.10) и (1.11)

$$\psi(u, p, z, c) = \frac{1}{p(\alpha + \omega)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\alpha - \omega}{\alpha + \omega} \right)^n e^{-u(\omega(c + 2n) + \alpha z)}$$

то, используя равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-vu} J_0(ru) du = \frac{1}{\sqrt{v^2 + r^2}}$$

запишем выражение (2.2) в виде

$$v_n = v_{n1} + v_{n2}$$

$$v_{nk} = \operatorname{Im} \int_0^T Q(\tau) \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{p f_n(p) \operatorname{sh} p(t - \tau)}{(1 + p^2) \sqrt{R_n(r, z, p)}} dp d\tau, \quad k = 1, 2 \quad (2.3)$$

где

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \alpha_2 = iN, \quad \beta_2 = i$$

$$f_n(p) = (1 - \kappa)^n (1 + \kappa)^{-(n+1)}, \quad \kappa = \sqrt{(N^2 + p^2)/(1 + p^2)} \quad (2.4)$$

$$R_n(r, z, p) = (p^2/(1 + p^2))r^2 + ((c + 2n)\kappa + z)^2$$

Заметим, что

$$R_n(r, z, iN) = z^2 - (Nr/b)^2, \quad b^2 = 1 - N^2$$

Назовем конус

$$K = \{(r, z): bz = Nr\} \quad (2.5)$$

критическим. Если точка $(r, z) \notin K$, а точка p лежит в некоторой окрестности точки iN , то подынтегральная функция в выражении (2.3) будет аналитической функцией p . Вклады от концевой точки iN в асимптотику функций v_{n1} и v_{n2} при сложении взаимно уничтожатся. Если же $(r, z) \in K$, то точка $p = iN$ становится критической точкой. Исследование асимптотики в этом случае будет проведено в следующем разделе.

Делая при $k = 1$ в интеграле (2.3) замену переменной интегрирования

$$\sqrt{(N^2 + p^2)/(1 + p^2)} = N \sin \varphi, \quad 0 < \varphi < \pi/2$$

и полагая

$$B_n = \sqrt{(c + 2n)^2 + \left(\frac{r}{b}\right)^2}, \quad \sin \alpha_n = \frac{r}{bB_n}, \quad \cos \alpha_n = \frac{c + 2n}{B_n} \quad (2.6)$$

получаем

$$v_{n1} = \operatorname{Re} \frac{N}{B_n} \int_0^T Q(\tau) \int_0^{\pi/2} A_n^-(\varphi) F_n(\varphi) \sin \varphi \sin(N(t - \tau)A(\varphi)) d\varphi d\tau \quad (2.7)$$

где

$$F_n(\varphi) = A_n^+(\varphi) \cos \varphi \frac{(1 - N \sin \varphi)^{n-1}}{(1 + N \sin \varphi)^{n+2}} \quad (2.8)$$

$$A(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - N^2 \sin^2 \varphi}}, \quad A_n^\pm(\varphi) = (z/NB_n + \sin(\varphi \pm \alpha_n))^{-1/2}$$

Преобразуем выражение (2.3) при $k = 2$. Делая замену переменной

$$\sqrt{1 + p^2} = b \cos \varphi, \quad \sqrt{N^2 + p^2} = ib \sin \varphi, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

получаем

$$v_{n2} = \operatorname{Re} \int_0^T Q(\tau) \int_0^{\pi/2} \frac{D_n(\varphi) \sin \varphi \sin((t - \tau)B(\varphi))}{\sqrt{S_n(r, z, \varphi)}} d\varphi d\tau \quad (2.9)$$

где

$$B(\varphi) = \sqrt{1 - b^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{N^2 + b^2 \sin^2 \varphi}$$

$$S_n(r, z, \varphi) = (z \cos \varphi + i(c + 2n) \sin \varphi)^2 - (1 - b^2 \cos^2 \varphi)(r/b)^2 \quad (2.10)$$

$$D_n(\varphi) = e^{-i(2n+1)\varphi} \cos \varphi$$

3. Асимптотическое поведения функций v_{n1} и v_{n2} при $t \rightarrow +\infty$. Из общей теории известно, что с точностью до произвольной отрицательной степени t основной вклад в асимптотику вносят концы интервалов интегрирования и стационарные точки. Оценим вклады концов. В интегралах (2.7) и (2.9) конец $\varphi = 0$ соответствует точке $p = iN$. Как уже отмечалось, эти вклады взаимно погашаются и их не нужно вычислять. Из формул (2.8) следует, что точка $\varphi = \pi/2$ не является стационарной точкой фазы $A(\varphi)$ и что $F_n(\pi/2) = 0$. Следовательно, вклад точки $\varphi = \pi/2$ в асимптотику интеграла v_{n1} убывает при $t \rightarrow +\infty$ не медленнее, чем t^{-2} . Из формул (2.10) следует, что точка $\varphi = \pi/2$ является стационарной точкой фазы и что $D_n(\pi/2) = 0$. Вклад точки $\varphi = \pi/2$ в асимптотику интеграла v_{n1} убывает при $t \rightarrow +\infty$ не медленнее, чем $t^{-3/2}$.

Оценим вклад в выражение v_{n1} от стационарной точки. Из формулы (2.7) следует, что стационарная точка лежит на отрезке $[0, \pi/2]$, только если $z/(NB_n) < 1$. Полагая

$$\sin \beta_n = z/(NB_n) \quad (3.1)$$

Получаем, что стационарная точка

$$\gamma_n = \alpha_n - \beta_n \quad (3.2)$$

принадлежит отрезку $[0, \pi/2]$, только если $bz < Nr$. При выполнении этого неравенства выражение (2.7) принимает следующий вид:

$$v_{n1} = \frac{N}{B_n} \int_0^T Q(\tau) \int_{\gamma_n}^{\pi/2} \frac{F_n(\varphi) \sin \varphi \sin(N(t-\tau)A(\varphi))}{\sqrt{\sin(\beta_n + \sin(\varphi - \alpha_n))}} d\varphi d\tau \quad (3.3)$$

Главный вклад от стационарной точки $\varphi = \gamma_n$ равен вкладу от точки $u = 0$ эталонного интеграла [3]

$$\begin{aligned} (v_{n1})_0 &\approx \frac{NF_n(\gamma_n) \sin \gamma_n}{B_n \sqrt{\cos \beta_n}} \int_0^T Q(\tau) \int_0^\infty \sin(N(t-\tau)(A(\gamma_n) + A'(\gamma_n)u)) \frac{du}{\sqrt{u}} = \\ &= \frac{F_n(\gamma_n) \sqrt{\pi N} \sin \gamma_n}{B_n \sqrt{|A'(\gamma_n)|} \cos \beta_n} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \sin\left(N(t-\tau)A(\gamma_n) - \frac{\pi}{4}\right) d\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функции F_n и A определяются формулой (2.8), $A'(\gamma_n) \neq 0$, число β_n определено формулой (3.1), α_n – формулой (2.6), γ_n – формулой (3.2).

Заметим, что на критическом конусе $bz = Nr$ выполнены условия

$$\gamma_n = 0, \quad A'(\gamma_n) = 0$$

правая часть в выражении (3.4) обращается в нуль и, следовательно, не может быть главным членом асимптотики. Дело в том, что на этом конусе точка $\varphi = 0$ будет стационарной точкой для интегралов v_{n1} и v_{n2} . Вычислим в этом случае вклады от стационарной точки $\varphi = 0$. В силу соотношений (2.5) при $bz = Nr + 0$ и $\varphi \rightarrow 0$ выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{z}{NB_n} + \sin(\varphi - \alpha_n) &= \varphi \cos \alpha_n + o(\varphi), \quad A(\varphi) = 1 - \frac{b^2}{2} \varphi^2 + o(\varphi^2) \\ S_n &= 2iz(c + 2n)\varphi + o(\varphi) \\ D_n(\varphi) &= 1 + o(1), \quad B(\varphi) = N + \frac{b^2}{2N} \varphi^2 + o(\varphi^2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из формул (2.7) и (2.9) следует, что в этом случае главный вклад точки $\varphi = 0$ равен эталонным интегралам [2]

$$(v_{nk})_0 = G_{nk} I_{nk}, \quad k = 1, 2$$

$$G_{n1} = \frac{NF_n(0)}{B_n \sqrt{\cos \alpha_n}}, \quad G_{n2} = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{2iz(c+2n)}} \quad (3.6)$$

$$I_{nk} = \int_0^T Q(\tau) \int_0^{+\infty} \sqrt{\varphi} \sin \left(N(t-\tau) \left(1 + (-1)^k \frac{b^2}{2} \varphi^2 \right) \right) d\varphi d\tau$$

Из формул (2.6) и (2.8) и (3.5) следует, что $G_{n1} = G_{n2}$. Вычисляя внутренние интегралы в выражениях (3.6), получаем, что на критическом конусе справедлива асимптотическая формула

$$v_n = (v_{n1})_0 + (v_{n2})_0 = \frac{2(N/2)^{1/2} \cos(3\pi/8)}{B_n b^{3/2} \sqrt{\sin \alpha_n \cos \alpha_{n0}}} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(t-\tau)^{3/4}} \sin N(t-\tau) d\tau$$

Таким образом, возмущения в верхнем слое от источника в нижнем слое затухают при $t \rightarrow \infty$. Асимптотика неравномерна относительно пространственных переменных. Внутри критического конуса $K = \{(r, z): bz = Nr\}$ возмущения имеют порядок $t^{-1/2}$, вне критического конуса возмущения имеют порядок $t^{-3/2}$. В переходной зоне вблизи критического конуса возмущения имеют порядок $t^{-3/4}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Крикоров А.М. Фундаментальное решение уравнения внутренних волн для среды с разрывной частотой Брента-Вяйсяля // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 621–627.
2. Тер-Крикоров А.М. Возмущения от источника в трехслойной атмосфере // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 62–68.
3. Федорюк М.В. Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
3.VI.2002