

УДК (532.59+533.6+533.95):534.1

© 2003 г. И.Б. Бахолдин

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В БЕЗДИССИПАТИВНЫХ МОДЕЛЯХ С УСЛОЖНЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Анализируются стационарные решения обратимых эволюционных уравнений механики с высшими производными. Описывается двумерный графический метод исследования решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющий находить специальные типы решений: периодические волны, уединенные волны, структуры разрывов. При этом уединенные волны могут быть получены предельным переходом из последовательностей периодических волн, а структуры разрывов – предельным переходом из последовательностей уединенных волн. Этот общий подход позволил непосредственно проверить существование всех ранее предсказанных структур, выявить новые их типы (трехволновые структуры) и найти все необходимые условия на разрывах. Найдены все ранее известные и выявлены новые типы уединенных волн (обобщенные обычные и 1:1 мульти-солитоны). Определены методы нахождения обобщенных уединенных волн, в том числе с конечной амплитудой периодической составляющей. Для системы четвертого порядка приведены примеры решения следующих задач: обобщенные уединенные волны как предельные решения двухволновых резонансных решений, обобщенные уединенные волны и структура разрыва с тремя волнами, 1:1 солитон и структура разрыва с одной излучаемой волной, уединенная волна с фиксированной скоростью распространения и структура разрыва типа кинка с излучением. Для систем шестого порядка рассматривается обобщенный 1:1 солитон и структура разрыва с двумя излучаемыми волнами. Изложение ведется в основном на примере бегущих волн, описываемых обобщенными уравнениями Кортевега-де Вриза. Рассматриваются также другие модели с усложненной дисперсией (плазма, слоистая жидкость).

Для моделей без диссипации был описан [1] способ определения типа структуры разрыва по взаимному расположению дисперсионной кривой и прямой, соответствующей фазовой скорости (под разрывами понимаются любые не расширяющиеся со временем переходы между однородными, периодическими, квазипериодическими состояниями). Основные типы разрывов: солитонного типа, кинк, скачок с излучением. Производные типы разрывов: обобщенного солитонного типа, кинк с излучением, скачок с двумя излучаемыми волнами. Аналогичный анализ был проведен [2] для уединенных волн.

Необходимым условием устойчивости разрыва является условие эволюционности: число граничных условий на разрыве равно числу уходящих характеристик упрощенной системы плюс одно; основные граничные условия получаются из интегрального вида исходной системы, дополнительные – при анализе структуры разрыва [3]. Разрывы типа кинка, скачка с излучением, кинка с излучением, скачка с двумя излучаемыми волнами эволюционны, причем число дополнительных граничных условий для этих типов разрывов 1, 2, 3, 4 соответственно [1]. Роль упрощенных уравнений для волновых зон могут играть усредненные уравнения (способ их вывода см. [4, 5]).

Был намечен [1, 6] и метод поиска структур, но он трудно реализуем. Ниже разрабатывается единый, эффективный при реализации метод нахождения структур указанных выше разрывов и дополнительных граничных условий на них. Основная идея метода: подобно тому, как уединенная волна ищется как предельное решение для периодических волн, структура разрыва ищется как предельное решение для последовательности уединенных волн. Метод базируется на обратимости разрывов без диссипации. Решение, составленное из прямого и обратного разрывов, удаленных на достаточно большое расстояние, можно рассматривать как обычную или обобщенную уединенную волну. Для нахождения уединенных волн и периодических решений используется графический метод, являющийся обобщением метода фазовых портретов для систем уравнений второго порядка.

1. Типичные бездиссипативные уравнения и метод нахождения стационарных решений специального типа. Скалярные уравнения – это аналоги уравнений Кортевега-де Вриза (КдВ)

$$a_t - (a^3)_x + b_3 a_{xxx} = 0 \quad (1.1)$$

$$a_t + (a^2)_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} = 0 \quad (1.2)$$

$$a_t - (a^3)_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} = 0 \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) представляет собой модифицированное уравнение КдВ с кубической нелинейностью и описывает модели с вырождением квадратичной нелинейности. Обобщенное КдВ с пятой производной (1.2) описывает распространение волн при наличии ледового покрытия [7] и в плазме [8], обобщенное КдВ с пятой производной и кубической нелинейностью (1.3), совмещающее в себе свойства уравнений (1.1) и (1.2), в данной работе рассматривается как модельное для разработки метода получения структуры типа кинка с излучением.

Обобщенное нелинейное уравнение Шредингера с производной третьего порядка

$$A_t + b_1 A_x + ib_2 A_{xx} + b_3 A_{xxx} + i|A|^2 A = 0 \quad (1.4)$$

описывает огибающую волновых пакетов с волновым числом вблизи точки перегиба дисперсионной кривой, в частности и для волн на воде [9]. Это комплексное уравнение при переходе к действительным переменным a, w , где $A = a e^{i\psi}$, $w = \psi_x$, эквивалентно двум уравнениям с производными третьего порядка [6].

Уравнения холодной плазмы [8] – пример системы уравнений со многими неизвестными

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right) = 0 \\ \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= 0, \quad \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(uB_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(uB_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad R_e = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \gg 1, \quad R_i = R_e^{-1} \ll 1$$

n – ионная плотность, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ – вектор магнитной индукции, $B_x = \text{const}$, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – скорость ионов.

При исследовании бегущих волн (см. ниже) уравнение (1.1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, остальные уравнения – к системам четвертого порядка. Имеет смысл исследовать также уравнения, приводящие к системам более высокого порядка, при этом появляются новые типы разрывов. Источником такого рода уравнений являются слоистые и многокомпонентные среды. Например, применяя стандартные методы вывода уравнений длинных волн [10] с учетом упругих эффектов на поверхностях раздела [7, 11], можно вывести аналоги уравнений Буссинеска для многослойной жидкости с упругими пластинами между слоями

$$u_{it} + u_i u_{ix} + g \eta_{ix} - \frac{1}{3} H_i^2 u_{ixx} + \frac{1}{2} H_i \eta_{i+1,xt} + \frac{1}{\rho_1} p_{ix} = 0, \quad \eta_{it} + [(H_i + \eta_i - \eta_{i+1}) u_i]_x = 0$$

$$p_i = p_{i-1} + p_{hi-1} + p_{\sigma i}$$

$$p_{hi} = \rho_i [g(H_i + \eta_i - \eta_{i+1}) - 1/2 H_i^2 u_{ix} + H_i \eta_{i+1,t}]$$

$$p_{\sigma i} = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} \eta_{ixxxx} - h_i \sigma_i \eta_{ixx} + r_{\sigma i} h_i \eta_{itt}$$

u_i – средние скорости, p_i – давления под пластинами, p_{hi} – гидростатические и гидродинамические составляющие, $p_{\sigma i}$ – упругие составляющие, η_i – смещения поверхностей раздела, E_i – модули Юнга, ν_i – коэффициенты Пуассона, H_i – толщины слоев жидкости, h_i – толщины пластин, ρ_i – плотности слоев жидкости, $\rho_{\sigma i}$ – плотности материала пластин. Пластина с номером i разделяет слои $i - 1$ и i , $i = 1, \dots, m$; нулевой слой – воздух, слой $m + 1$ – дно, $p_{h0} = 0$, p_0 и η_{m+1} – заданные функции от x и t .

Для асимптотически корректного учета дисперсионных эффектов высшего порядка в такие уравнения в общем случае должны включаться дополнительные высшие нелинейные и дисперсионные члены. Однако в наиболее простом случае двух слоев жидкости с упругой пластиной между ними (затопленный лед) этого делать не требуется, что связано с наличием в модели упругих параметров, не зависящих от гидродинамических параметров

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + g \eta_{1x} + \frac{1}{3} g H_1^2 \eta_{1xxx} + \frac{1}{2} g H_1 H_2 \eta_{2xxx} = 0$$

$$\eta_{1t} + [(H_1 + \eta_1 - \eta_2) u_1]_x = 0$$

$$u_{2t} + u_2 u_{2x} + g \eta_{2x} + g \frac{\rho_1}{\rho_2} (\eta_{1x} - \eta_{2x}) + c_3 \eta_{2xxx} + c_5 \eta_{2xxxxx} + \frac{\rho_1}{2\rho_2} g H_1^2 \eta_{1xxx} = 0 \quad (1.6)$$

$$\eta_{2t} + [(H_1 + \eta_2) u_2]_x = 0$$

$$c_3 = \frac{1}{3} g H_2^2 - \frac{h \sigma}{\rho_2} + \frac{\rho_{\sigma} h g H_2}{\rho_2} + g H_1 H_2, \quad c_5 = \frac{E h^2}{12(1 - \nu^2) \rho_2}$$

Здесь для упорядочения членов с высшими производными произведена эквивалентная в данном приближении замена временных производных пространственными.

Исследование стационарных решений системы (1.6) приводит к системе шестого порядка. В качестве модельного уравнения для разработки методов исследования таких систем в данной работе рассматривается обобщенное уравнение КдВ с производной седьмого порядка

$$a_t + a a_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} + b_7 a_{xxxxxxx} = 0 \quad (1.7)$$

В описанных выше уравнениях перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью V , производную по времени положим равной нулю и исследуем стационарные решения рассматриваемых уравнений. Исходные уравнения могут быть представлены в виде законов сохранения, поэтому после однократного интегрирования системы уравнений бегущих волн получаем систему уравнений с четным числом неизвестных

$$du/dx = F(u) \quad (1.8)$$

Эта система инвариантна при преобразовании $x \rightarrow -x$, $u_{2p} \rightarrow u_{2p}$ (симметричные неизвестные), $u_{2p+1} \rightarrow -u_{2p+1}$ (антисимметричные неизвестные). Система зависит от параметра фазовой скорости V . Рассматривается одна из точек равновесия. Относительно нее линеаризуется система (1.8)

$$du'/dx = Au', \quad u = u_h + u'$$

Решения линейной системы находятся аналитически и могут использоваться для выбора начальных данных. Считается, что решения нелинейной системы (1.8) с некоторыми начальными данными легко получить численно. Ищутся решения, симметричные по x относительно некоторой точки $x = x_s$ и обладающие при $x \rightarrow \pm\infty$ желаемыми свойствами (периодичностью, стремлением к состоянию равновесия). Для этого в фазовом пространстве рассматривается некоторое множество фазовых траекторий S_1 (инвариантное многообразие), построенное по некоторому множеству начальных данных S_0 , обеспечивающему нужное свойство при $x \rightarrow -\infty$, например стремление к некоторой точке равновесия или к некоторому циклу. Каждой точке пересечения множества S_1 с плоскостью S , где все антисимметричные переменные, за исключением одной, равны нулю, соответствует симметричное решение искомого типа (периодического или солитонного). Скачки в рассматриваемых моделях обратимы, поэтому решение в виде двух взаимно обратных скачков (не всегда оба скачка эволюционны), удаленных на большое расстояние, можно рассматривать как уединенную или обобщенную уединенную волну.

Ниже будут описаны способы нахождения решений разного типа. Примем следующие общие обозначения: ε – малый параметр, связанный с использованием линеаризованных решений, C или const – конечная величина постоянная при расчете, var – величина, варьируемая при расчете с некоторым дискретным шагом, κ – собственное число ($\kappa = ik$, где k – волновое число, значения κ согласуются с условиями существования структур разрывов [1]), u_κ – собственный вектор матрицы A . Указывается только половина собственных чисел, поскольку имеет место их симметрия: если κ – собственное число, то $-\kappa$ – тоже собственное число. Помимо указанных явно, неявным (не требующим при программировании специальной дискретизации, поскольку она автоматически обеспечивается при счете системы (1.8)) варьируемым параметром везде является величина x . При этом используется инвариантность системы относительно сдвига по фазе.

Для уравнений четвертого порядка рассматривается двумерная проекция на плоскость (u_0, u_3) сечения S_1 плоскостью S : $u_1 = 0$ (или (u_0, u_1) при $S : u_3 = 0$). Имеем один явный варьируемый параметр. Можно включать его в число пространственных переменных и рассматривать соответствующие проекции. Проекция в общем случае представляет собой ветвящуюся кривую со счетным числом ветвей, каждой точке пересечения этой кривой с осью неантисимметричной переменной соответствует решение рассматриваемого типа. В связи со сложным строением проекции удобно рассматривать ее графики по точкам, а не в виде связной кривой. При этом видны будут только главные ветви. Второстепенные будут разрежены или не видны вообще. Их

можно последовательно исследовать, уменьшая шаг дискретизации и сокращая при этом область вариации.

Типичные задачи для уравнений четвертого порядка описаны в разд. 2–6. Для уравнений шестого порядка рассматривается проекция на плоскость (u_0, u_3) при $S : u_1 = 0, u_5 = 0$. Здесь два явно варьируемых параметра. Для этих уравнений также можно решать задачи, описанные в разд. 2–6, но появляются и специфические задачи, описанные в разд. 7, 8. Обобщение на системы более высокого порядка очевидно. Задачи озаглавлены по принципу: общее решение – специальное предельное решение.

2. Периодические волны – уединенные волны. Собственные числа

$$\kappa_1 = iq_1, \quad q_1 \in R; \quad \kappa_2 \in R \quad \text{или} \quad \kappa_2 = iq_2, \quad q_2 \in R$$

Начальные данные при $x = 0$

$$u_0 = C, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \text{var} \in [u_{21}, u_{22}], \quad u_3 = 0 \quad (u_2 = \text{const}, u_0 = \text{var})$$

В случае $\kappa_2 \in R$ ветвления не происходит и картина та же, что и для систем второго порядка: при увеличении периода решение начинает стремиться к последовательности уединенных волн, при этом фазовая траектория стремится к одной из точек равновесия.

Если же κ_2 – мнимое число, то проекция ветвится и рассматриваемые решения двухволновые, резонансные с рациональным отношением периодов. Число визуально наблюдаемых периодов в этих решениях может быть сколь угодно большим. Предельным переходом, при котором соотношение длин волн стремится к бесконечности, можно получить обобщенную уединенную волну – комбинацию из уединенной и периодической волн. Способ выделения одноволновых решений: остановка счета уравнения (1.8), если $u_1 = 0$.

Характер всех возможных ограниченных решений в этом случае анализировался ранее другим методом [12, 13]; согласно этим результатам, в пространстве начальных данных имеется перистая область (резонансное дерево), для которой решение ограничено. Во избежание заикливания счета следует ограничить максимальное значение x .

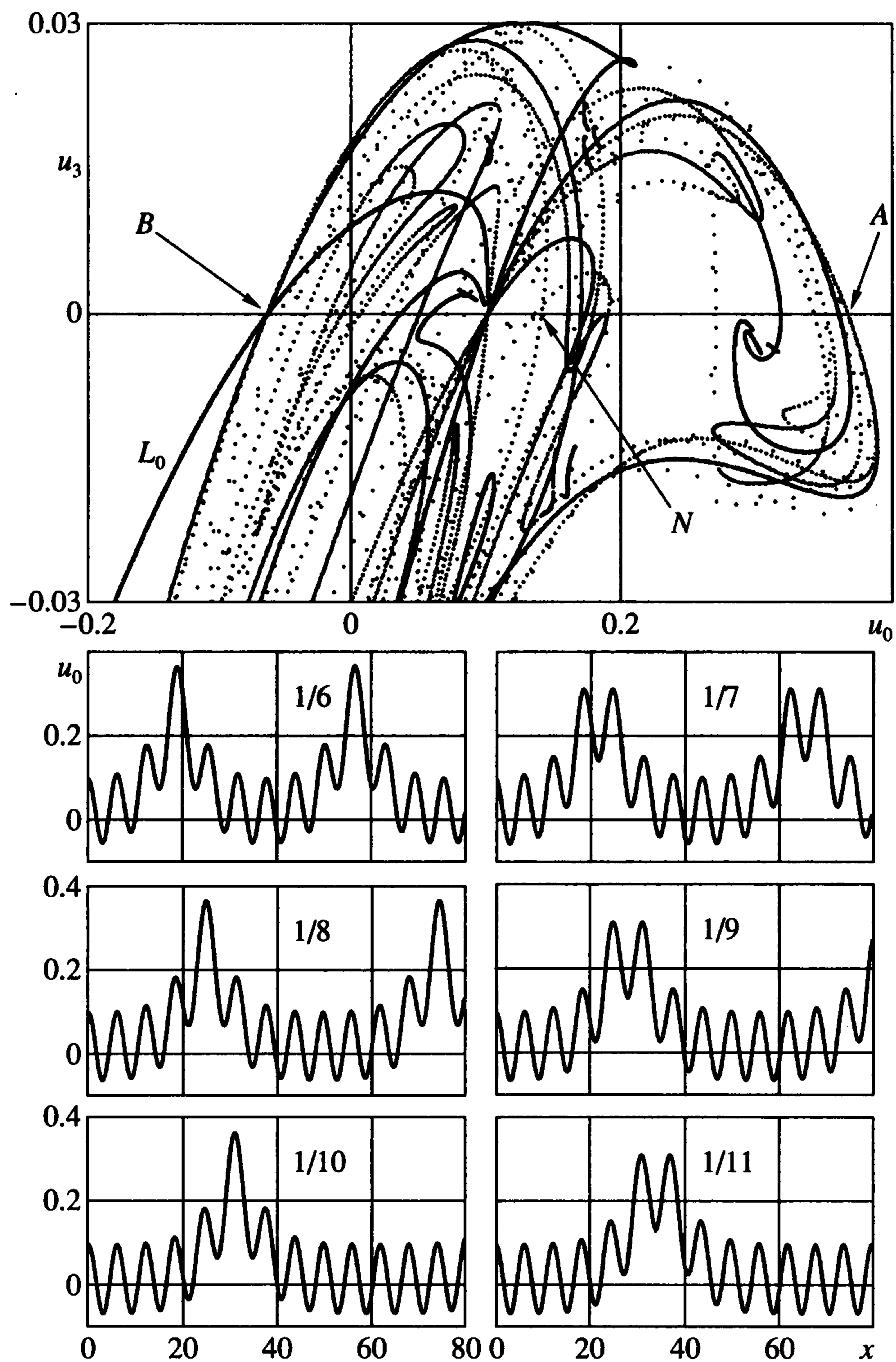
Пример проекции и характерные типы решений для уравнения (1.2) приведены на фиг. 1 при $b_3 = b_5 = 1, V = 0.1, C = 0.1$ ($u_i = \partial^i a / \partial x^i$). Показана проекция сечения S_1 плоскостью $S : u_1 = 0$ на плоскость (u_0, u_3) . Крайняя справа точка сгущения точек пересечения с осью u_0 (точка A на фиг. 1) соответствует горбу обобщенной уединенной волны. В нижней части справа показана соответствующая последовательность резонансных двухволновых решений, сходящихся к обобщенной уединенной волне таким образом, что максимум солитонной части совпадает с максимумом периодической (синфазная уединенная волна). В нижней части слева показана еще и последовательность, сходящаяся к противофазной обобщенной уединенной волне. Соотношение между периодами волн указано на фиг. 1. Можно выделить также последовательности решений, сходящиеся к обобщенным мультисолитонам из разд. 5, а при соответствующем выборе значения V и $C \rightarrow 0$ – к мультисолитонам из разд. 4. Крайняя левая точка пересечения (точка B на фиг. 1) соответствует одноволновому решению (кривая L_0 на фиг. 1 – одноволновая ветвь). Граничный характер точек A и B дает простой способ нахождения соответствующих решений. Точка N соответствует оси симметрии противофазной обобщенной уединенной волны.

3. Классические одnogорбые уединенные волны – кинки. Собственные числа

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 > 0$$

Начальные данные

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_h + \varepsilon(\mathbf{u}_{\kappa_1} \sin \varphi + \mathbf{u}_{\kappa_2} \cos \varphi), \quad \varphi = \text{var} \in [0, 2\pi]$$



Фиг. 1

Кинки могут быть получены из уединенных волн предельным переходом, когда фазовая траектория стремится к двум различным точкам равновесия, при этом график такого решения представляет собой уединенную волну с уплощенной вершиной. Этот способ получения решения в виде кинка для уравнения (1.1), приводящего к системе второго порядка с кубической нелинейностью, продемонстрирован ранее [4]. Анализировался фазовый портрет и подбиралось значение скорости V , когда сепаратрисса проходит через две точки равновесия. При этом имеется еще и третья точка равновесия.

Заметим, что для систем второго порядка используемая здесь методика выборки начальных данных позволяет упростить задачу и построить сепаратриссу, т.е. найти решение типа уединенной волны непосредственно, без построения всего фазового портрета. Для уравнений четвертого порядка в данном случае проекция не ветвится,

поэтому процесс нахождения кинка осуществляется аналогично. В качестве примера, приводящего к системе четвертого порядка, имеющей решения в виде кинков, можно указать уравнение (1.4) [6].

4. Многогорбые уединенные волны – структуры с одной излучаемой волной. Собственные числа

$$\kappa_{1,2} = r \pm iq, \quad r > 0, \quad q \in R$$

Начальные данные

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_h + \varepsilon \operatorname{Re}(\mathbf{u}_k \exp i\varphi), \quad \varphi = \arg \in [0, 2\pi]$$

Данная задача была решена [5] для уравнения (1.2). Ниже приводятся результаты аналогичного исследования для системы уравнений холодной плазмы в целях демонстрации общего подхода. В данном разделе способ исследования рассматривается подробно, в разд. 5–7 используются аналогичные приемы.

Дисперсионная кривая для линеаризованного варианта системы (1.5) содержит магнитозвуковую и альфвеновскую ветви. Важным параметром задачи является величина $\theta = \arctg(B_x/B_{yh})$ [14]. При $\theta > \theta_c$ у магнитозвуковой ветви нет точки перегиба при $k > 0$, а при $\theta < \theta_c$ такая точка есть, θ_c – некоторое критическое значение. Рассматриваются решения, связанные с магнитозвуковой ветвью. Случай четырех комплексно-сопряженных значений k возможен как при $\theta > \theta_c$, так и при $\theta < \theta_c$.

Стационарные решения описываются системой

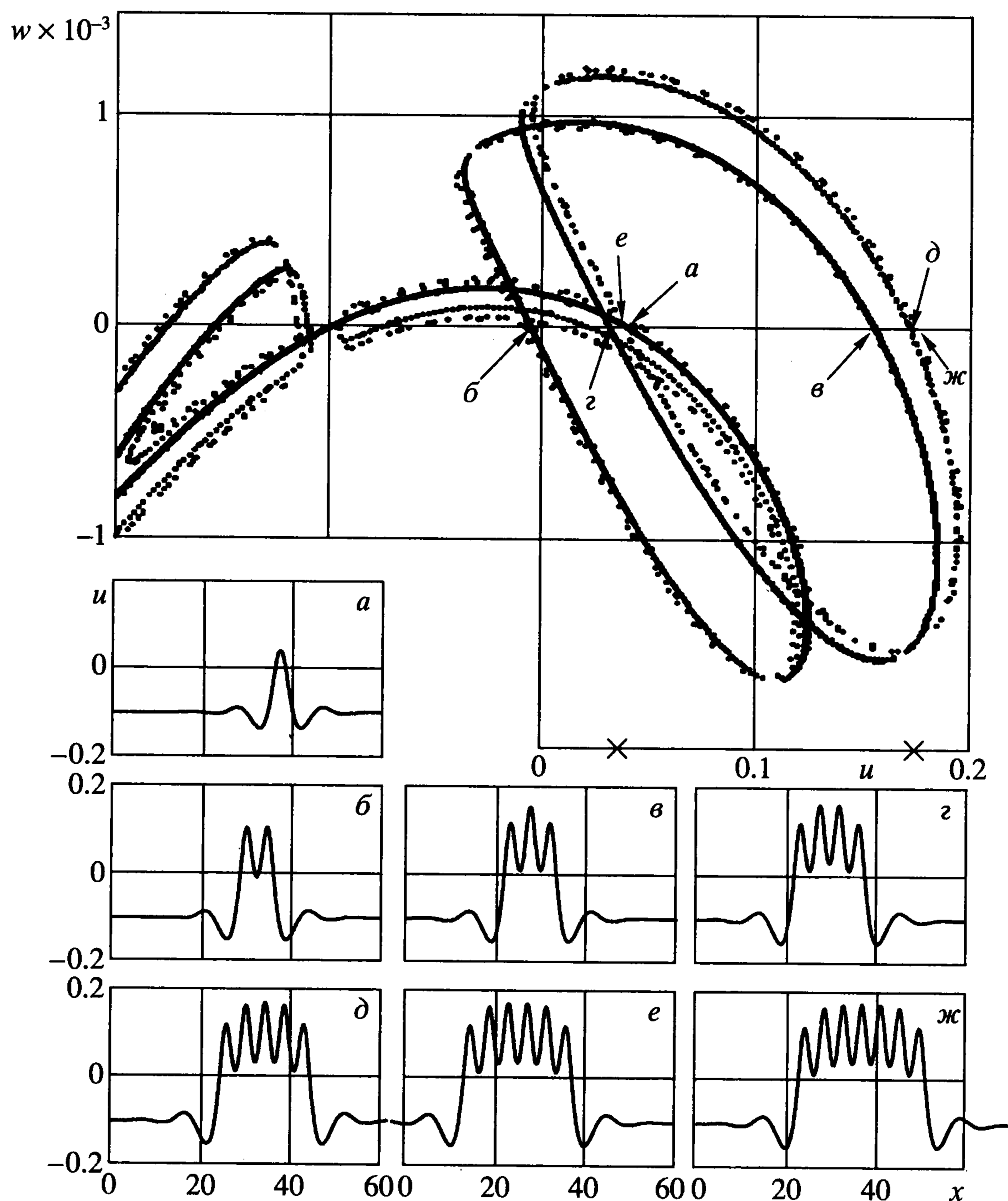
$$\begin{aligned} dv/dx &= (-B_z V + B_z u - B_z w) R_i (V - u)^{-1} \\ dw/dx &= -(-B_y V + B_y u - B_x V - c_{B_y}) R_i (V - u)^{-1} \\ dB_y/dx &= -(-nwV + n w u - B_x B_z) R_e (B - u)^{-1} \\ dB_z/dx &= (-nvV + n v u - B_x B_y - c_v) R_i (V - u)^{-1} \\ u &= n^{-1} c_n + V, \quad n^{-1} = \left(c_u - V c_n - \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} \right) c_n^{-2}; \quad c_n = -n_h V + n_h u_h, \quad c_u = -n_h u_h V + \frac{B_{yh}^2}{2} \\ c_{B_y} &= -B_{uh} + u_h B_{yh} - B_x v_h, \quad c_v = -n_h v_h V + n_h u_h v_h - B_x B_{yh} \end{aligned} \quad (4.1)$$

После линеаризации систему (4.1) можно записать в виде

$$A(v', w', B_y', B_z')^T = 0$$

$$A = \begin{vmatrix} -n_h V + n_h u_h & 0 & -B_x & R_e^{-1}(u_h - V) \frac{d}{dx} \\ 0 & -n_h V + n_h u_h & R_e^{-1}(V - u_h) \frac{d}{dx} & -B_x \\ -B_x & R_i^{-1}(V - u_h) \frac{d}{dx} - V + u_h + \frac{B_{yh}^2}{n_h(V - u_h)} & 0 & \\ R_i^{-1}(u_h - V) \frac{d}{dx} & -B_x & 0 & -V + u_h \end{vmatrix}$$

$$v' = v - v_h, \quad w' = w, \quad B_y' = B_y - B_{yh}, \quad B_z' = B_z$$



Фиг. 2

Найдем частное решение этой системы вида

$$(v', w', B_y', B_z') = (1, w_k, B_{yk}, B_{zk}) \exp \kappa x, \quad \kappa = ik$$

при помощи стандартных алгебраических методов. Значение κ находится из уравнения

$$R(V, \kappa) = B_x^4 + B_x^2 B_{yh}^2 - 2B_x^2 n_h V^2 - B_{yh}^2 n_h V^2 + B_x^2 \kappa^2 R_e^{-2} V^2 + B_{yh}^2 \kappa^2 R_e^{-1} R_i^{-1} V^2 + \\ + B_x^2 \kappa^2 R_i^{-2} V^2 + n_h^2 V^4 - 2\kappa^2 n_h R_e^{-1} R_i^{-1} V^4 + \kappa^4 R_e^{-2} R_i^{-2} V^4 = 0, \quad V = V - u_h$$

Берется корень с $\text{Re} \kappa > 0$ и находятся соответствующие комплексные решения w_κ , $B_{y\kappa}$, $B_{z\kappa}$. Множество траекторий с начальными данными

$$v = v_h + \varepsilon \cos \varphi, \quad w = \varepsilon \text{Re}(w_\kappa z), \quad B_y = B_{yh} + \varepsilon \text{Re}(B_{y\kappa} z), \quad B_z = \varepsilon \text{Re}(B_{z\kappa} z) \\ z = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (4.2)$$

рассматривается как численная модель многообразия S_1 . Здесь ε – малый параметр, характеризующий точность приближения.

Для нахождения уединенной волны нужно взять траекторию с начальными данными (4.2) и достаточно малым значением ε . Посредством вариации φ и x находим траекторию для некоторого отрезка значений $x \in [0, x_l]$ такую, что $w(x_l) = 0, B_z(x_l) = 0$. Для $x \in (-\infty, 0]$ решение пропорционально $\exp ikx$, $\text{Im} k < 0$. При $x > x_l$ решение может быть найдено следующим способом:

$$n, u, v, B_y(x_l + d) + n, u, v, B_y(x_l - d); \quad w, B_z(x_l + d) = -w, -B_z(x_l - d)$$

Геометрический подход дает визуальный способ получения решений типа уединенных волн. Проварьируем параметр φ на отрезке $[0, 2\pi]$ с некоторым дискретным шагом $\Delta\varphi = 2\pi/m$. Получим множество из m траекторий. Пусть M – множество точек на рассматриваемом множестве траекторий, где $B_z = 0$. Рассмотрим проекцию M на подпространство (u, w) . Пример такой проекции показан на фиг. 2, $\theta = 1.535 < \theta_c$.

Численный эксперимент был реализован таким образом, что рассматривалась только область точек, не слишком удаленных от исходной точки равновесия. Если $m \rightarrow \infty$, то это множество стремится к некоторой кривой на плоскости u, w . У этой кривой счетное число ветвей. При конечных m можно определить визуально только конечное число простейших ветвей. Каждое пересечение ветви с осью u соответствует уединенной волне. Несколько уединенных волн показано на фиг. 2. Имеется так называемый 1:1 солитон (основной солитон), фиг. 2, *a*. Все остальные уединенные волны являются мультисолитонами, комбинациями из основных солитонов, сдвинутых на некоторые расстояния друг относительно друга.

Максимальное и минимальное значения u для периодического состояния за скачком с излучением отмечены на фиг. 2 крестиками. Их можно найти без анализа структуры скачка, если использовать дополнительный закон сохранения (закон сохранения энергии). Имеется последовательность пар точек пересечения, стремящаяся к точкам $(u_{\min}, 0), (u_{\max}, 0)$. Уединенные волны, соответствующие этим последовательностям точек пересечения, могут рассматриваться как последовательность решений, стремящихся к комбинации из эволюционного скачка с излучением и обратного к нему скачка с поглощением. Первые шесть уединенных волн из этой последовательности показаны на фиг. 2, *б–ж*. Соответствующие точки пересечения отмечены также на фиг. 2. Как и в случае обобщенного уравнения КдВ, имеется счетное число таких последовательностей уединенных волн и соответственно структур скачков. В нестационарном численном эксперименте реализуется структура простейшего типа. Напомним, что для данного типа разрыва два дополнительных граничных условия можно найти и без анализа структуры, используя дополнительный закон сохранения [5], т.е. эти граничные условия не зависят от структуры и потому неединственность не принципиальна.

В случае, если модель допускает двухволновые решения (для плазмы при $\theta < \theta_c$), 1:1 солитон можно искать методом из разд. 2 как предельное решение последовательности двухволновых решений, в которой отношение длин волн стремится к единице.

5. Обобщенные уединенные волны – трехволновые структуры. Собственные значения

$$\kappa_1 \in R, \quad \kappa_2 = iq, \quad q \in R$$

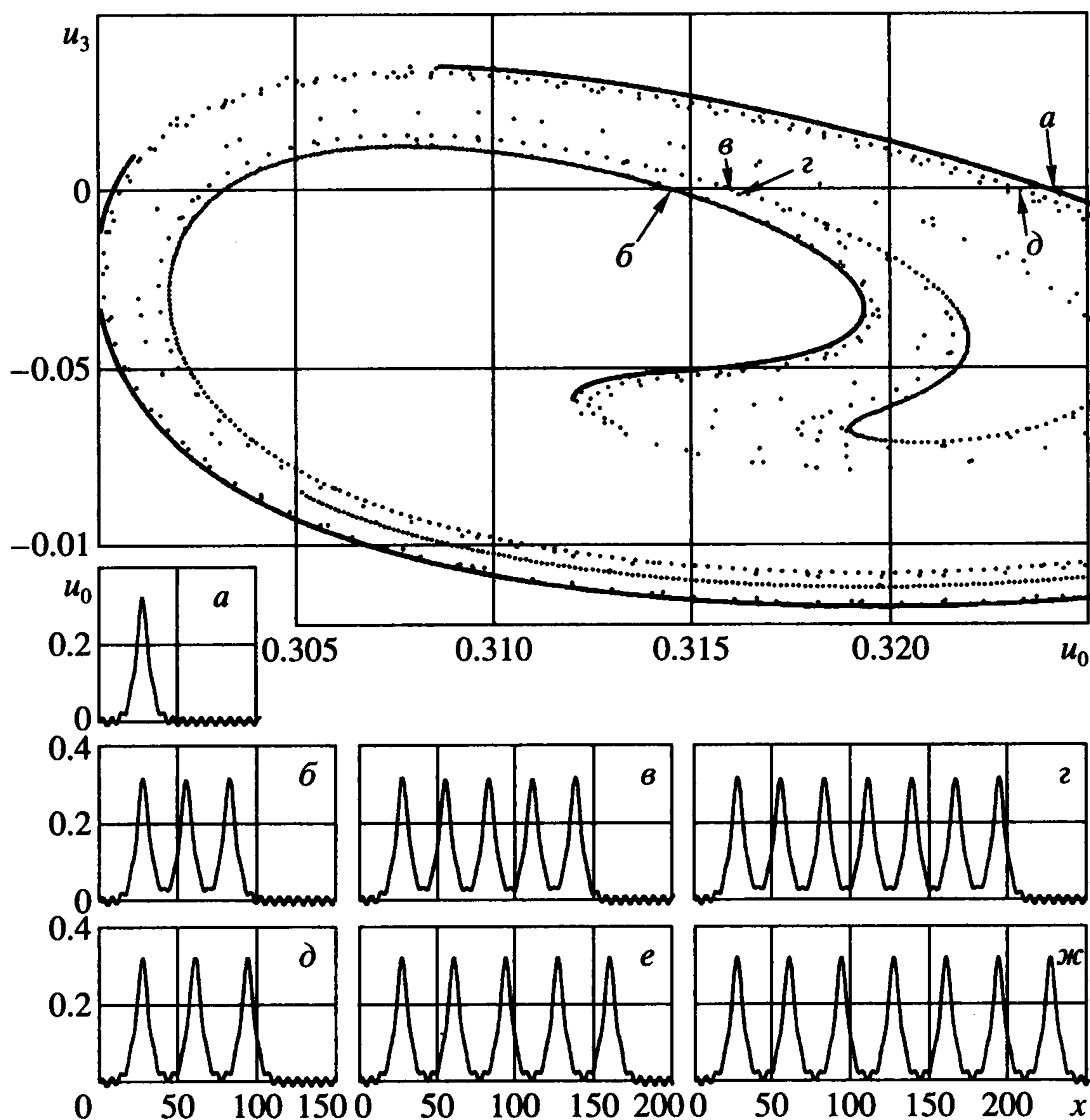
Начальные данные:

для периодической составляющей малой амплитуды

$$u(0) = u_h + \varepsilon u_{\kappa_1} + C \text{Re}(u_{\kappa_2} \exp i\varphi), \quad \varphi = \text{var} \in [0, 2\pi], \quad C = \text{const}$$

для периодической составляющей конечной амплитуды

$$u(0) = l \varepsilon u'(0) + u_p(0), \quad l = \text{var} \in [l_1, 1], \quad 0 < l_1 < 1$$



Фиг. 3

Величина l_1 определяется при решении линеаризованной системы уравнений

$$d\mathbf{u}'/dx = A(x)\mathbf{u}', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_p(x) + \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}'(0) = l_1 \mathbf{u}'(-\Lambda) \quad (5.1)$$

Линеаризация осуществляется относительно периодической составляющей $\mathbf{u}_p$ с периодом Λ . Это однопараметрическое (без учета сдвига по фазе) семейство решений, зависящее от амплитудного параметра C ; способ нахождения одноволнового решения указан в разд. 2.

Для решения задачи (5.1) найдем базис в пространстве линеаризованных решений $\{\mathbf{u}'_j\} : u'_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Пусть $\{X_k\}$ – координаты искомого решения в этом базисе, тогда l_1 – действительное собственное число матрицы

$$B = (\mathbf{u}'_1(-\Lambda), \dots, \mathbf{u}'_n(-\Lambda)), \quad B\mathbf{X} = l_1 \mathbf{X}$$

Для периодической составляющей малой амплитуды в пределе

$$\mathbf{u}'(0) = \mathbf{u}_{\kappa 1}, \quad \mathbf{u}_p(0) = \mathbf{u}_h + C \operatorname{Re} \mathbf{u}_{\kappa 2}, \quad l_1 = \exp(-2\kappa_1 \pi / q)$$

Следовательно, по крайней мере для достаточно малой амплитуды у характеристического полинома $P(\lambda) = \det(B - \lambda E)$ есть действительный корень, точное решение задачи (5.1) существует.

На фиг. 3 в случае малой амплитуды периодической составляющей для уравнения (1.2) при $b_3 = b_5 = 1$, $V = 0.1$, $C = 0.01$, показан фрагмент проекции и последовательно-

сти обобщенных уединенных волн a – $г$ и a , $д$ – $ж$, сходящиеся к двум различным трехволновым структурам. Крайнее правое пересечение (пересечение a на фиг. 3) соответствует решению в виде комбинации одной уединенной волны и периодической волны (обобщенная уединенная волна). Другие пересечения соответствуют комбинациям из нескольких уединенных волн при некотором расстоянии между ними и периодической компоненты (обобщенные мультисолитоны).

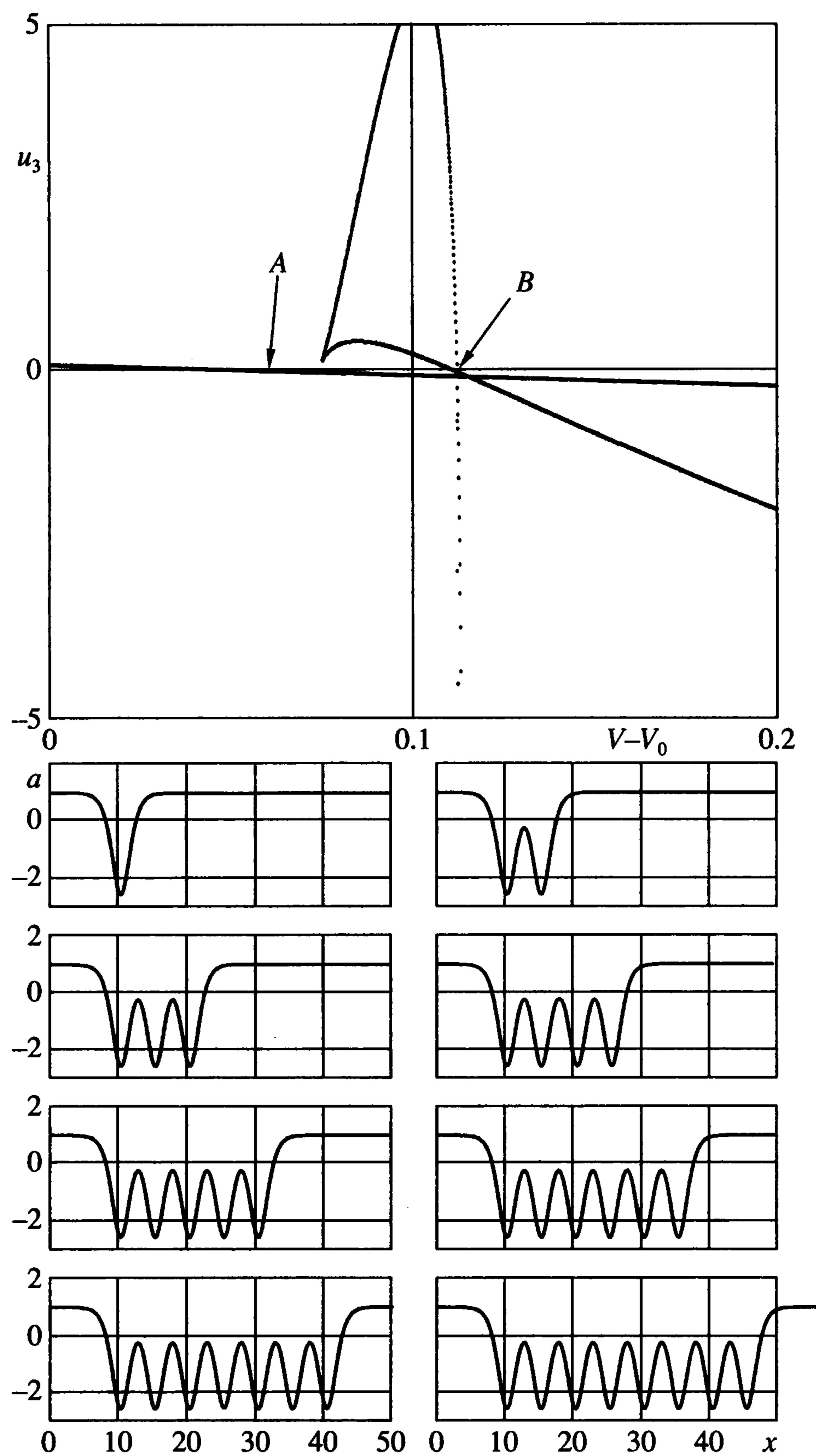
Ограничимся анализом точек пересечения с осью u_0 , расположенных справа, т.е. между точками a и $б$ на фиг. 3. Эти пересечения соответствуют синфазным мультисолитонам, пересечения слева – противофазным. Наиболее заметны трехсолитонные ветви, причем расстояние между солитонами увеличивается по мере того, как точка пересечения, соответствующая рассматриваемому решению, перемещается по оси u_0 от крайнего левого положения (точка $б$) к крайнему правому (точка a).

К каждой трехсолитонной ветви примыкают ветви, соответствующие решениям с большим нечетным числом солитонов, расстояние между которыми близко к некоторому фиксированному для данной последовательности значению. Пересечения, соответствующие четным комбинациям, также существуют, но они расположены в другой части плоскости и не показаны на фиг. 3. Таким образом, можно выделить последовательности решений, сходящиеся к решениям в виде двух взаимно обратных разрывов, удаленных один от другого на большое расстояние. По одну сторону от разрыва имеется периодическое решение, а по другую – двоякопериодическое. Для данного значения V таких структур счетное количество. Имеется структура с максимально близким расстоянием между солитонами (разрыв максимального сжатия) и структуры со сколь угодно удаленными друг от друга солитонами. Формальным пределом последовательности таких структур является скачок обобщенно-солитонного типа – переход от периодического состояния к последовательности обобщенных уединенных волн. Помимо мультисолитонов с регулярным расположением солитонных элементов имеются разнообразные нерегулярные мультисолитоны.

Если начать варьировать значение амплитуды периодической компоненты, уменьшая ее, то для каждой из рассматриваемых ветвей наступает положение, когда она начинает касаться оси u_0 . При этом соответствующие синфазное и противофазное решения совпадают. При дальнейшем уменьшении амплитуды решение данного типа пропадает. Последним исчезает решение в виде одиночной обобщенной уединенной волны.

Наоборот, при увеличении амплитуды периодической компоненты все новые и новые ветви начинают пересекать ось u_0 . Начиная с некоторого значения амплитуды, появляется трехсолитонное решение максимального сжатия, которое не имеет продолжения в виде регулярных решений с большим числом солитонных элементов. Однако при этом имеются нерегулярные решения с меньшим средним расстоянием между солитонами.

В отличие от всех остальных рассматриваемых в данной работе структур, прогнозируемых теоретически, эволюционных и наблюдаемых в нестационарном численном эксперименте [1, 4, 6, 11, 14], вопрос об устойчивости найденных здесь трехволновых структур не вполне ясен. Использование понятия эволюционности здесь затруднено в связи с неясным характером усредненных уравнений для двухволновых зон. Наличие трехволновых структур для уравнений четвертого порядка не прогнозировалось [1], поскольку существование таких структур обусловлено нелинейными резонансными эффектами. В нестационарном численном эксперименте в данном случае наблюдается трехволновой скачок со структурой, близкой к стохастической. Не вполне ясно, так ли это в действительности или же связано с недостаточно продолжительным временем наблюдения, схемными эффектами, машинными ошибками округления. Если предполагать, что должен реализовываться скачок максимального сжатия, то, руководствуясь проведенными здесь исследованиями, можно предвидеть, что в случае



Фиг. 4

скачков малой амплитуды со временем должно сформироваться регулярное решение, а в случае большой – стохастическое.

6. Уединенные волны с фиксированными скоростями – кинки с излучением. Собственные значения

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 = iq, \quad q \in R$$

Начальные данные

$$u(0) = u_h + \varepsilon u_{\kappa_1}, \quad V = \text{var} \in [V_1, V_2]$$

Фиг. 4 иллюстрирует процесс нахождения структуры типа кинка с излучением для уравнения (1.3), $b_3 = b_5 = 1$, $V_0 = -2.618$. Здесь в качестве координаты удобно выби-

рать скорость V . Показано сечение и последовательность уединенных волн-мульти-солитонов, сходящаяся к решению в виде двух взаимно обратных кинков с излучением. Строение проекции здесь проще, чем в разд. 5. Кривая не ветвится, а только счетное число раз пересекает ось V . Точка A соответствует односолитонному решению, B – точка сгущения точек пересечения. На фиг. 4 все точки пересечения, кроме точки A , практически слились, что означает, что уже двухсолитонное решение достаточно близко к структуре типа кинка с излучением. Рассматриваемые в данном разделе решения фактически являются особым случаем решений, рассмотренных в разд. 5, и могли бы искажаться описанным там методом.

Саму структуру скачка для его количественного описания здесь искать необязательно. Использование в качестве координаты скорости позволяет легко найти дополнительное граничное условие на скачке $V = V_*$, где V_* соответствует точке B . Используя дополнительный закон сохранения, как и ранее [5], можно найти параметры однородного волнового состояния.

Рассматриваемые уединенные волны существуют при наличии пересечения прямой $V = \omega/k$ и дисперсионной кривой, но на эти решения наложено дополнительное условие. Отметим, что уединенные волны с фиксированными скоростями ранее находились для уравнения (1.4) [9], обладающего, как и уравнение (1.3), усложненными дисперсионными и нелинейными свойствами.

7. Обобщенные многогорбые уединенные волны (1:1 солитоны) – трехволновые структуры – структуры с двумя излучаемыми волнами. Собственные значения

$$\kappa_{1,2} = r \pm iq_1, \quad \kappa_3 = iq_2, \quad r > 0, \quad q_1 \in R, \quad q_2 \in R$$

Начальные данные для периодической составляющей малой амплитуды

$$u(0) = u_h + \operatorname{Re}(\varepsilon u_{\kappa_1} \exp i\varphi + C u_{\kappa_3} \exp i\psi); \quad \varphi, \psi = \operatorname{var} \in [0, 2\pi]$$

Для нахождения начальных данных в случае периодической составляющей конечной амплитуды делается линеаризация относительно периодического решения

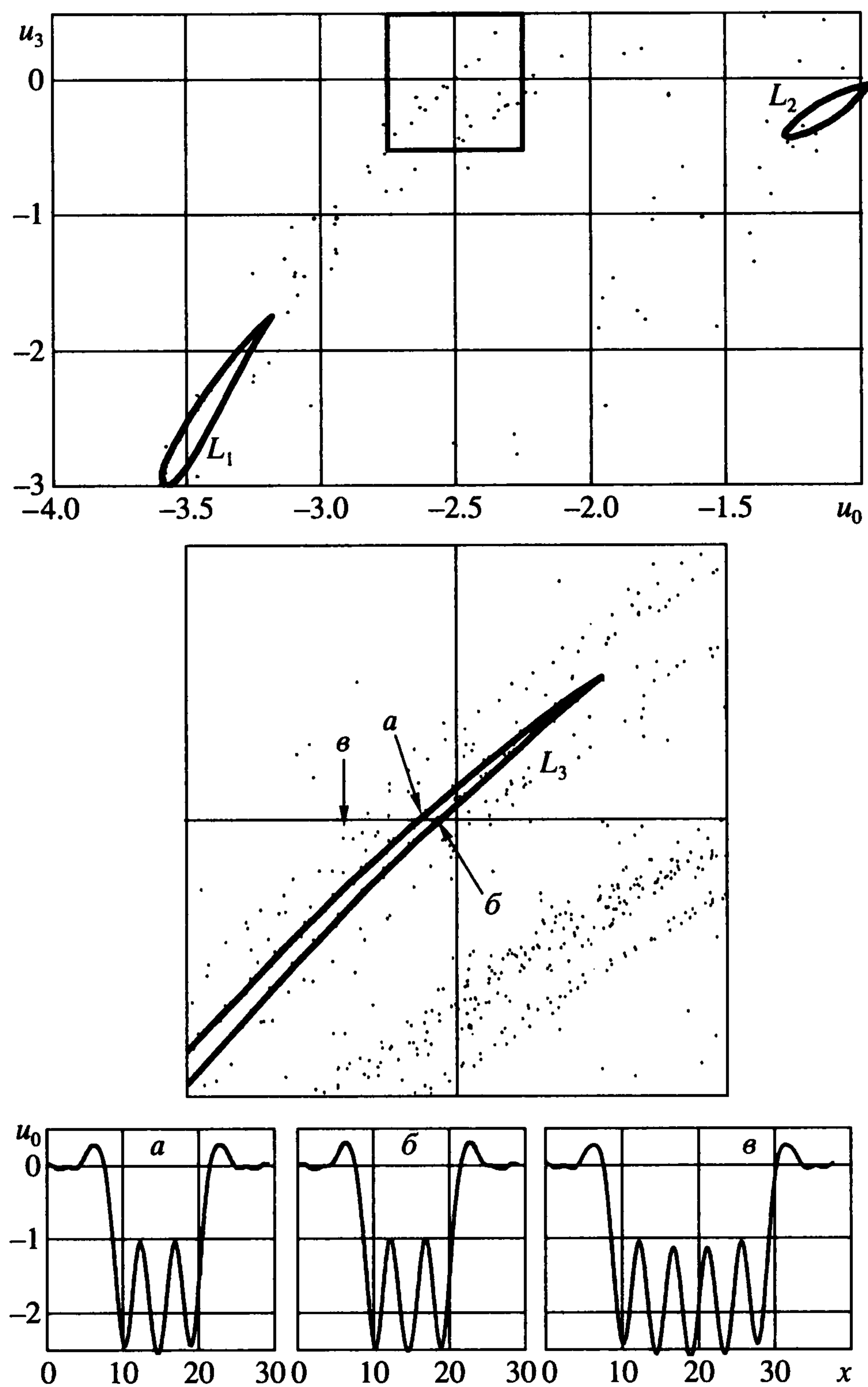
$$u(x_0) = \varepsilon \operatorname{Re}[u'(x_0) \exp i\varphi] + u_p(x_0), \quad u'(x_0 - \Lambda) = \mu u'(x_0)$$

$$x_0 = \operatorname{var} \in [0, \Lambda], \quad \varphi = \operatorname{var} \in [0, 2\pi]; \quad |\mu| < 1; \quad |u'(x_0)| = 1$$

Метод нахождения и обоснование существования комплексного значения m и соответствующего решения $u'(x)$ такие же, как и в разд. 5.

Фиг. 5 иллюстрирует процесс получения структуры с двумя излучаемыми волнами для уравнения (1.7) при $b_3 = b_5 = 1$, $b_7 = 0.15$, $V = -1$, $C = 0.025$ в случае, когда амплитуда одной из волн мала. На фиг. 5 вверху показан фрагмент проекции, область, обведенная в рамке, показана внизу с более крупным масштабом и с уменьшением шага дискретизации варьируемых параметров в 20 раз. На фиг. 5 представлены три характерных решения, стрелками указаны точки, по которым эти решения построены. Данная задача фактически является обобщением задач, описанных в разд. 4, 5, поэтому характер проекции и соответствующих решений имеет общие черты с обеими этими задачами одновременно.

Имеются решения в виде обобщенных уединенных волн-мультисолитонов. Их трудно представить себе, если на решения из разд. 4 наложить дополнительную периодическую составляющую. Как и в разд. 5, имеются синфазные и противофазные последовательности обобщенных мультисолитонов, стремящиеся к соответствующим решениям в виде прямого и обратного трехволнового скачков. Решение в виде скачка с двумя излучаемыми волнами, очевидно, следует искать среди них как решение с минимальной амплитудой излучаемой волны. Процесс сходен с поиском обобщенной уединенной волны с минимальной амплитудой периодической составляющей.



Фиг. 5

щей (см. разд. 5). При произвольном значении этой амплитуды имеются последовательности, сходящиеся к трехволновым структурам. По мере уменьшения амплитуды исчезают решения с двумя солитонными компонентами, тремя и т.д., так что при достижении некоторой минимальной амплитуды остается решение с бесконечным числом солитонных компонент, представляющее собой два взаимно обратных скачка между двумя периодическими состояниями.

Так, на фиг. 5 видна замкнутая кривая L_1 (рассматриваемые кривые обведены жирной линией), соответствующая комбинации из одного 1:1 солитона и периодической волны, кривая L_2 соответствует двухсолитонному решению, она почти касается оси u_0 , тогда как L_1 удалена от нее. При больших значениях амплитуды периодической составляющей эти кривые пересекают ось u_0 . При увеличении разрешения становится видна кривая L_3 , соответствующая трехсолитонному решению и дважды

пересекающая ось u_0 . Соответствующие синфазная (фиг. 5, а) и противофазная (фиг. 5, б) обобщенные уединенные волны почти совпадают. Очевидно, что при дальнейшем уменьшении амплитуды это пересечение исчезнет. Пятисолитонные решения здесь выявляются (фиг. 5, в), но разрешение недостаточно, чтобы детально рассмотреть на фиг. 5 кривую L_5 . В отличие от случая уравнений четвертого порядка, где вариацию одного параметра и подбор решений, сходящихся к структурам разрывов, несложно осуществить и без последовательного геометрического подхода, для уравнений шестого порядка метод последовательного увеличения разрешения оказывается единственно возможным.

Как и в случае кинка с излучением, одного дополнительного закона сохранения оказывается недостаточно для получения всех необходимых дополнительных граничных условий. Но здесь для нахождения дополнительных граничных условий необходимо полное исследование структуры.

8. Обобщенные уединенные волны с фиксированными скоростями – структуры с двумя излучаемыми волнами. Собственные значения

$$\kappa_1 \in R, \quad \kappa_2 = iq_1, \quad \kappa_3 = iq_2, \quad q_1 \in R, \quad q_2 \in R$$

Начальные данные

$$u(0) = l\epsilon u'(0) + u_p(0), \quad l = \text{var} \in [l_1, 1], \quad V = \text{var} \in [V_1, V_2]$$

Величина l_1 определяется при решении линеаризованной системы уравнений, см. разд. 5. Линеаризация осуществляется относительно одноволнового периодического решения, зависящего от одного параметра C (можно $C = \text{var}$, $V = \text{const}$). Это возможный альтернативный подход к поиску двухволновой структуры по принципу, использованному в разд. 6.

Автор благодарит А.Г. Куликовского и А.А. Бармина за обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00729) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00-15-96005).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахолдин И.Б. Структуры эволюционных скачков в обратимых системах // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 1. С. 52–62.
2. Bakholdin I.B., Il'ichev A.T. Radiation and modulational instability described by the fifth-order Korteweg-de Vries equation // Contemporary Mathematics. 1996. V. 200. P. 1–15.
3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Моск. лицей, 1998. 412 с.
4. Бахолдин И.Б. Скачки в моделях, описываемых обобщенными уравнениями Кортевега-де Вриза // Изв. РАН МЖГ. 1999. № 4. С. 95–109.
5. Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 59–68.
6. Бахолдин И.Б. Волновые скачки, описываемые модифицированным уравнением Шредингера // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1329–1348.
7. Ильичев А.Т., Марченко А.В. О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 88–95.
8. Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. № 5. P. 1305–1318.

9. *Akylas T.R., Kung T.-J.* On nonlinear wave envelopes of permanent form near a caustic // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 214. P. 489–502.
10. *Whitham J.B.* Linear and nonlinear waves. N.Y., etc.: Wiley, 1974 = Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
11. *Бахолдин И.Б.* Структуры гидравлических прыжков при наличии ледового покрытия // *Изв. РАН. МЖГ.* 2000. № 4. С. 139–146.
12. *Bakholdin I.B.* Nonlinear resonances in models described by the modified Korteweg–de Vries and Schrödinger equations // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. / Suppl.: Phys. Vibrat.* 1995. V. 59. № 4. P. 209–221.
13. *Бахолдин И.Б.* Нелинейные резонансы и волновые скачки в средах с дисперсией высокого порядка // *Изв. РАН. МЖГ.* 1996. № 4. С. 113–124.
14. *Бахолдин И.Б.* Бездиссипативные скачки для магнитозвуковой ветви движений холодной плазмы // *Физика плазмы.* 2000. Т. 26. № 1. С. 65–72.

Москва
e-mail: bakh@orc.ru

Поступила в редакцию
6.II.2002