

УДК 533.6.011.51

© 2003 г. С.П. Баутин, С.А. Ягунов

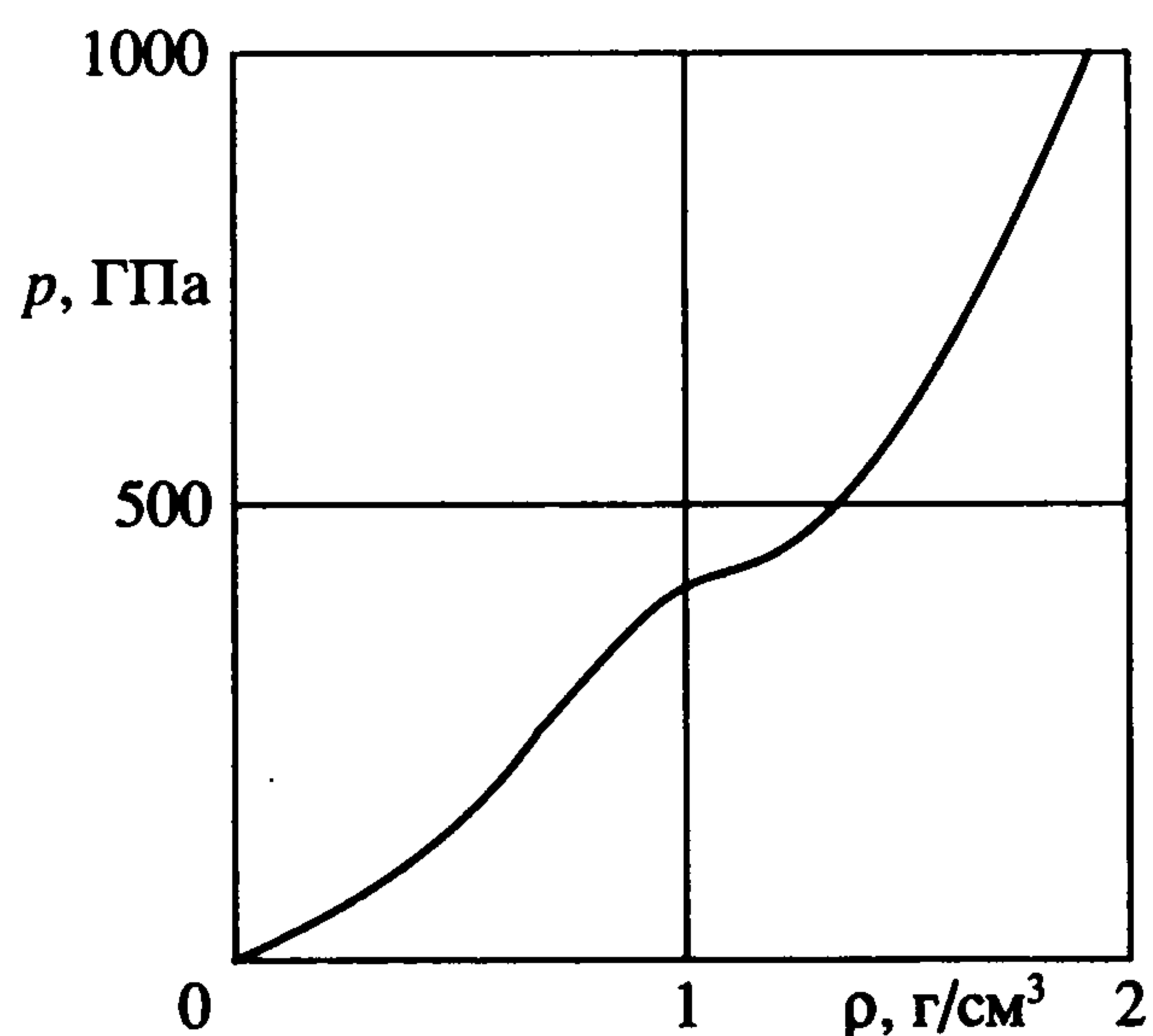
АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ИЗЭНТРОПИЧЕСКОГО СЖАТИЯ ВОДОРОДА С РЕАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ

Исследуется возможность изэнтропического сжатия водорода с реальным уравнением состояния до достаточно больших значений плотности, при которых в поведении изэнтропы наблюдается аномалия, связанная с переходом водорода из молекулярной фазы в атомарную. Анализируется возможность пройти указанный участок изменения плотности при сжатии газа безударно, причем речь не идет о получении очень больших степеней сжатия, соответствующих существенному превышению значения плотности из аномального промежутка; при необходимости также предполагается, что предварительным безударным сжатием уже получены значения плотности, меньшие, но близкие к аномальному промежутку. Показано, что при безударном сжатии плоских, цилиндрических и сферических слоев первоначального покоящегося однородного газа еще до финального момента сжатия в течении возникает бесконечный градиент плотности газа, если она достигнет значений из аномального промежутка. Исследуются автомодельные решения, описывающие безударное сжатие первоначально однородных и покоящихся цилиндрических и шаровых объемов водорода. С помощью численного решения соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений показано, что в этом случае возможно изэнтропическое сжатие до значений плотности как из аномального промежутка, так и еще больших.

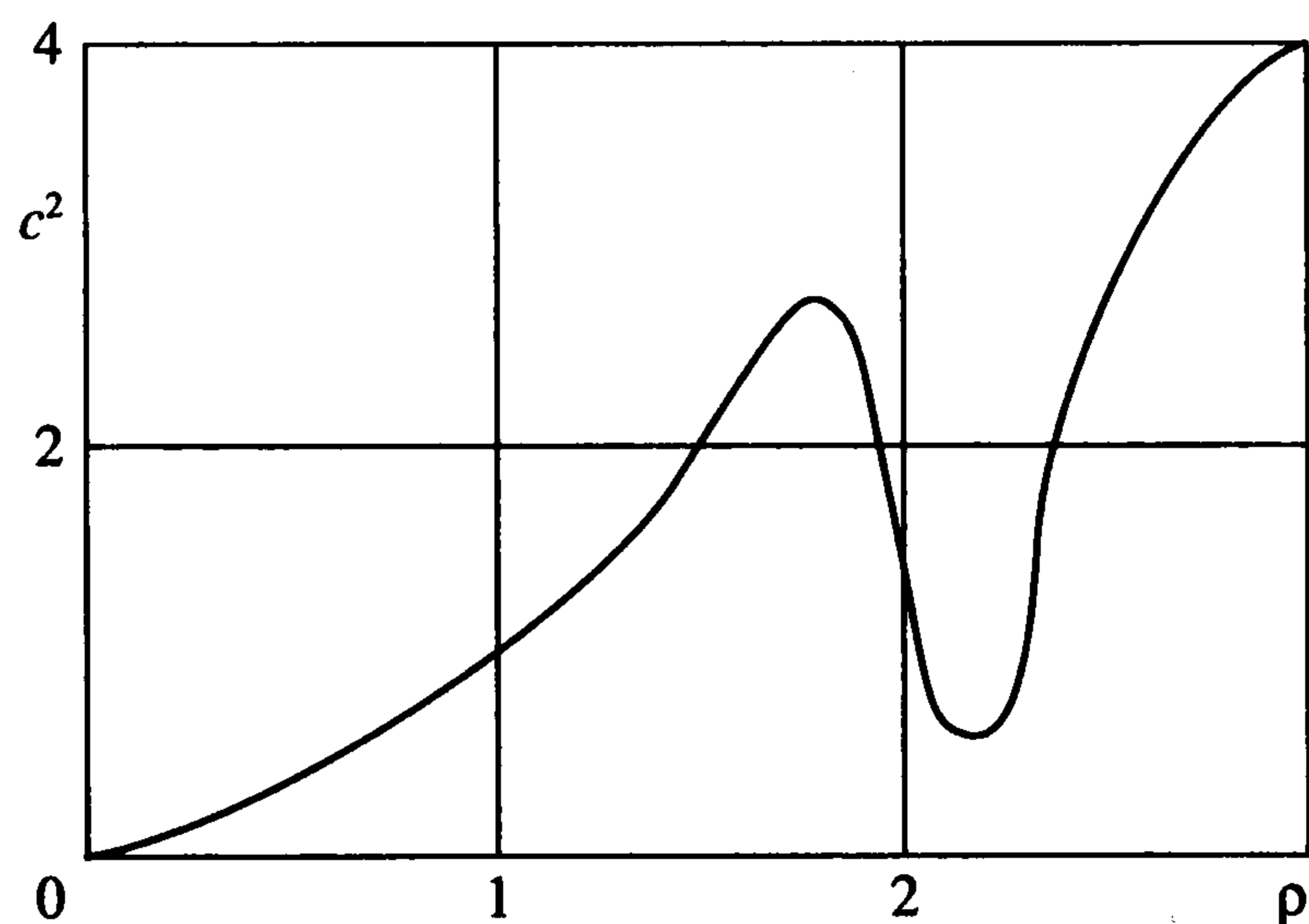
Был предложен [1] единый подход к математическому исследованию безударного сильного сжатия газа; в частности, для газа с произвольным уравнением состояния построен аналог центрированной волны Римана, непрерывно примыкающей к однородному покоящемуся газу. Тем самым доказана возможность безударного сжатия газа с произвольным уравнением состояния до некоторой плотности, большей первоначальной. Для более детального описания процесса изэнтропического сжатия требуется конкретизировать вид уравнения состояния газа. Естественно, что наибольший интерес для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза [2] представляет сильное сжатие водорода с реальным уравнением состояния, определяемым в соответствующих физических экспериментах.

Экспериментально установлено [3], что при изэнтропическом сжатии водорода до очень больших значений плотности в диапазоне $0.9 \text{ г/см}^3 < \rho < 1.25 \text{ г/см}^3$ скорость нарастания давления от 260 ГПа до 380 ГПа существенно меняется (фиг. 1), что связывается [3] с переходом водорода из молекулярного состояния в атомарное.

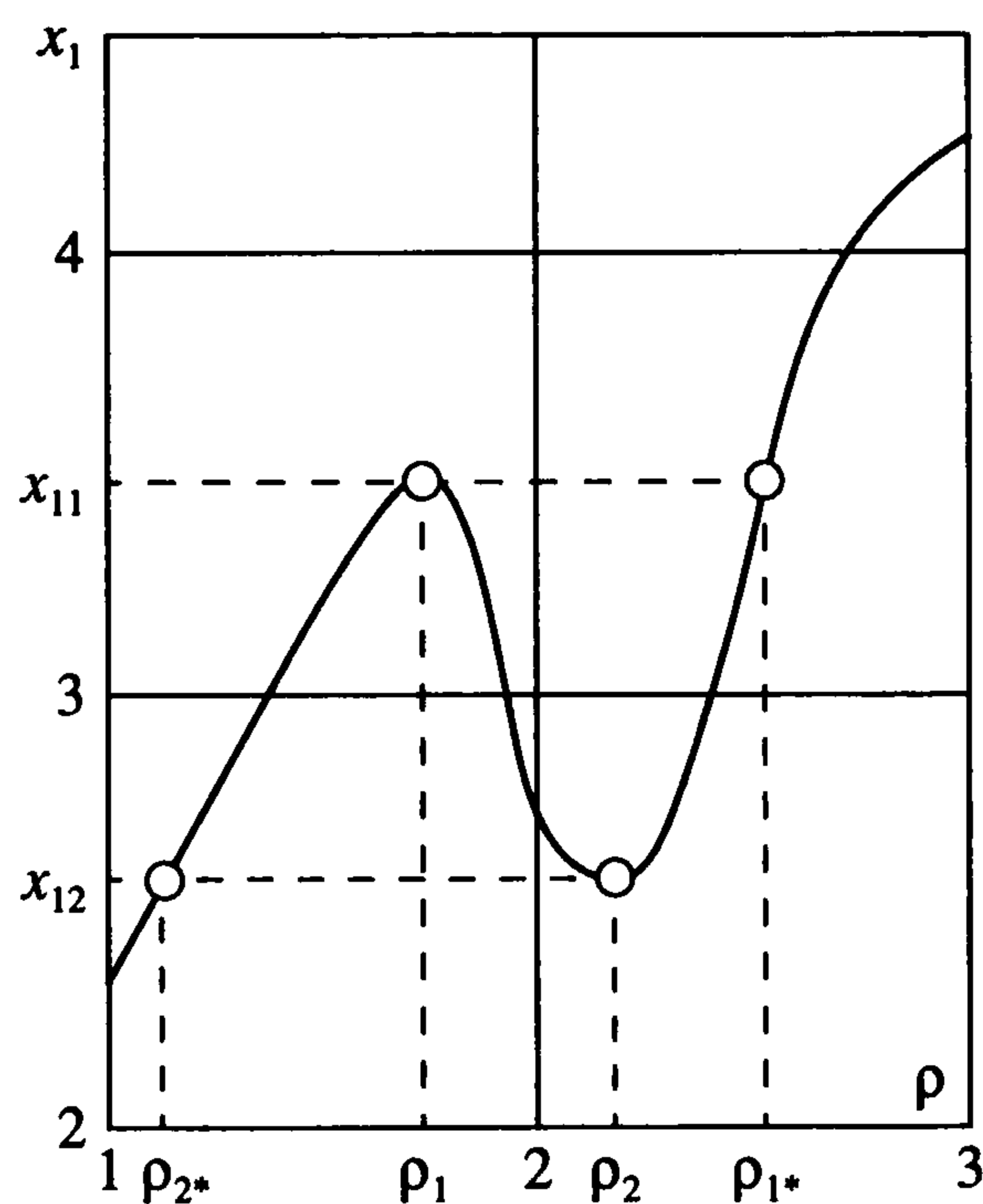
Цель данной работы – математически исследовать возможность безударного сжатия водорода с указанной изэнтропой до значений плотности из аномального промежутка и больших.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для получения зависимости $c^2 = c^2(\rho)$ (здесь c – скорость звука, $c^2 = p'(\rho)$) проводилось численное и графическое дифференцирование рассматриваемой зависимости $p = p(\rho)$ и в качестве $c^2(\rho)$ была взята некая усредненная кривая. После этого был сделан переход к безразмерным переменным с выбором в качестве масштабов плотности 0.5 г/см^3 и скорости звука 16 км/с , а масштаб давления не конкретизируется, причем для безразмерных переменных сохраняются прежние обозначения.

На фиг. 2 приведена зависимость $c^2 = c^2(\rho)$ в безразмерных переменных. При этом восстановление зависимости $p(\rho)$ путем интегрирования функции $c^2(\rho)$ дает хороший результат как в целом, так и на самом интересном участке изменения безразмерной плотности $1.8 < \rho < 2.5$: относительная погрешность не превышает 0.05% . В дальнейшем предполагается, что $c(\rho)$ – аналитическая функция при $\rho > 0$.

При $1.80 < \rho < 2.16$ вторая производная $p''(\rho)$ отрицательна, поэтому рассматриваемая среда при $1.80 < \rho < 2.16$, по терминологии Л.В. Овсянникова [4] (терминологии О), не является нормальным газом.

По терминологии Б.Л. Рождественского и Н.Н. Яненко [5] (терминологии Р–Я), газ нормальный, если $p_{VV} > 0$, и не является таковым, если $p_{VV} < 0$ ($V = 1/\rho > 0$ – удельный объем). Поскольку [4]

$$V^3/p_{VV} = 2p_\rho + \rho p_{\rho\rho}$$

газ, нормальный по терминологии О, является нормальным и по терминологии Р–Я. Однако возможны такие уравнения состояния, когда газ, нормальный по терминологии Р–Я, не является нормальным по терминологии О.

Из последнего равенства следует, что знак производной p_{VV} совпадает со знаком выражения

$$2p_\rho + \rho p_{\rho\rho} = 2\rho c(\rho)\alpha(\rho), \quad \alpha(\rho) = c(\rho) = c(\rho)/\rho + c'(\rho)$$

Следовательно, при $\rho > 0$, $c(\rho) > 0$ знаки p_{VV} и $\alpha(\rho)$ совпадают. Как известно, в центрированной волне Римана течение газа восстанавливается [4] с помощью следующих формул (t – время):

$$\frac{x}{t} = u(\rho) \pm c(\rho); \quad u(\rho) = \pm \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho \quad (1)$$

Поэтому с точностью до знака выражение $\alpha(\rho)$ является производной функции

$$x_1(\rho) = u(\rho) \pm c(\rho) \quad (2)$$

и смена знака производной p_{VV} эквивалентна немонотонности функции (2), задающей течение в центрированной волне. Заметим, что для определения функции $\alpha(\rho)$ надо дифференцировать функцию $c(\rho)$, а для определения $x_1(\rho)$ – интегрировать дробь $c(\rho)/\rho$. Поскольку исходная функция $p(\rho)$ задана приближенно, вторая из указанных операций выполняется точнее.

На фиг. 3 приведен график функции $x_1(\rho)$ для рассматриваемого уравнения состояния, причем для определенности в формулах для центрированной волны взят верхний знак, т.е. центрированная волна сжатия движется слева направо. При восстановлении функции $u(\rho)$ положено $u(0.44) = 0$.

Таким образом, и по терминологии Р–Я рассматриваемая среда не является нормальным газом при $\rho_1 < \rho < \rho_2$, где $\rho_1 \approx 1.84$, $\rho_2 \approx 2.16$.

При $0 \leq \rho \leq \rho_1$ центрированная волна Римана с помощью формул (1) определяется однозначно. Поэтому плоский слой газа, первоначально покоящегося с плотностью, меньшей ρ_1 , можно безударно сжать до плотности $\rho = \rho_1$. Но в тот момент, когда на сжимающем поршне плотность газа станет равной ρ_1 , в течении газа (именно на поршне) возникает бесконечный градиент – производная плотности по пространственной переменной становится неограниченной.

Представляется, что будет достаточно трудно не только описать течение рассматриваемого газа после момента возникновения упомянутого бесконечного градиента, но даже предсказать возникающую после такого момента времени конфигурацию течения. Возможные при этом трудности проще всего иллюстрируются на примере сжатия плоского слоя, когда течение задается формулами (1), а зависимость $\rho = \rho(t, x)$ восстанавливается с помощью графика, приведенного на фиг. 3.

Из-за немонотонности функции $x_1(\rho)$ при всех значениях x из отрезка $x_{12} \leq x \leq x_{11}$ (см. фиг. 3) можно предположить наличие ненулевого скачка плотности ($[\rho] \neq 0$). Например (см. фиг. 3),

$$[\rho]_{x=x_{12}} = \rho_2 - \rho_{2*} < 0, \quad [\rho]_{x=x_{11}} = \rho_{1*} - \rho_1 > 0$$

Тогда получается задача о распаде разрыва [4, 5], имеющего место в какой-либо точке отрезка $[x_{12}, x_{11}]$. Возможно, что разрыв надо поместить в точке $x = x_{12}$, где возникает первая двузначность зависимости $\rho = \rho(t, x)|_{t = \text{const}}$. Для решения полученной задачи о распаде разрыва надо знать не только лишь изэнтропу $p = p(\rho)$ (фиг. 1), но и общие уравнения состояния в виде $p = p(\rho, S)$, $e = e(\rho, S)$ (S – энтропия, e – внутренняя энергия) [4, 5]. Если для рассматриваемого диапазона изменения плотности и давления водорода такие зависимости будут известны, то возможно, что с использованием ранее развитых подходов [5–7] удастся предсказать конфигурацию течения, возникающего после распада подобного разрыва. Оба значения, задающие скачок плотности (как пара (ρ_{2*}, ρ_2) , так и пара (ρ_1, ρ_{1*}) , а также любая пара значений ρ , соответствующая точкам x из отрезка $[x_{12}, x_{11}]$), попадают на участки кривой $c^2(\rho)$, где $[c^2(\rho)]' \geq 0$, хотя и разделенные участком, на котором $[c^2(\rho)]' < 0$. Поэтому можно предположить, что распад подобного разрыва произойдет, как и в случае нормального газа, т.е. с образованием ударной волны сжатия.

Таким образом, на основании изложенного можно сделать вывод о том, что безударно сжать плоский слой рассматриваемого газа от плотности, меньшей $\rho = \rho_1$, до плотности, большей $\rho = \rho_1$, невозможно.

Замечания. 1°. Было приведено [1] обобщение решения задачи о центрированной волне Римана на цилиндрически и сферически симметричный случай, когда особой в течении является точка $(t = 0, r = r_*)$, $r_* > 0$. При этом главные слагаемые, описывающие особенность течения в этих случаях, совпадают выражениями по формулам (1). Поэтому также невозможно безударное сжатие от $\rho < \rho_1$ до $\rho > \rho_1$ цилиндрических и сферических слоев рассматриваемого газа, которые в момент $t = 0$ имеют отличные от нуля внутренние радиусы.

2°. Можно изменить функцию $c^2(\rho)$ так, чтобы разность значений ее локальных экстремумов была меньше: $\rho_{\max} = 2.75$, $\rho_{\min} = 2.59$; тогда функция $x_1(\rho)$ становится монотонной. Следовательно, получившийся новый газ является нормальным по терминологии Р–Я, но не будет таковым по терминологии О. В этом случае безударное сжатие плоских, цилиндрических и сферических слоев газа до аномальных значений плотности возможно.

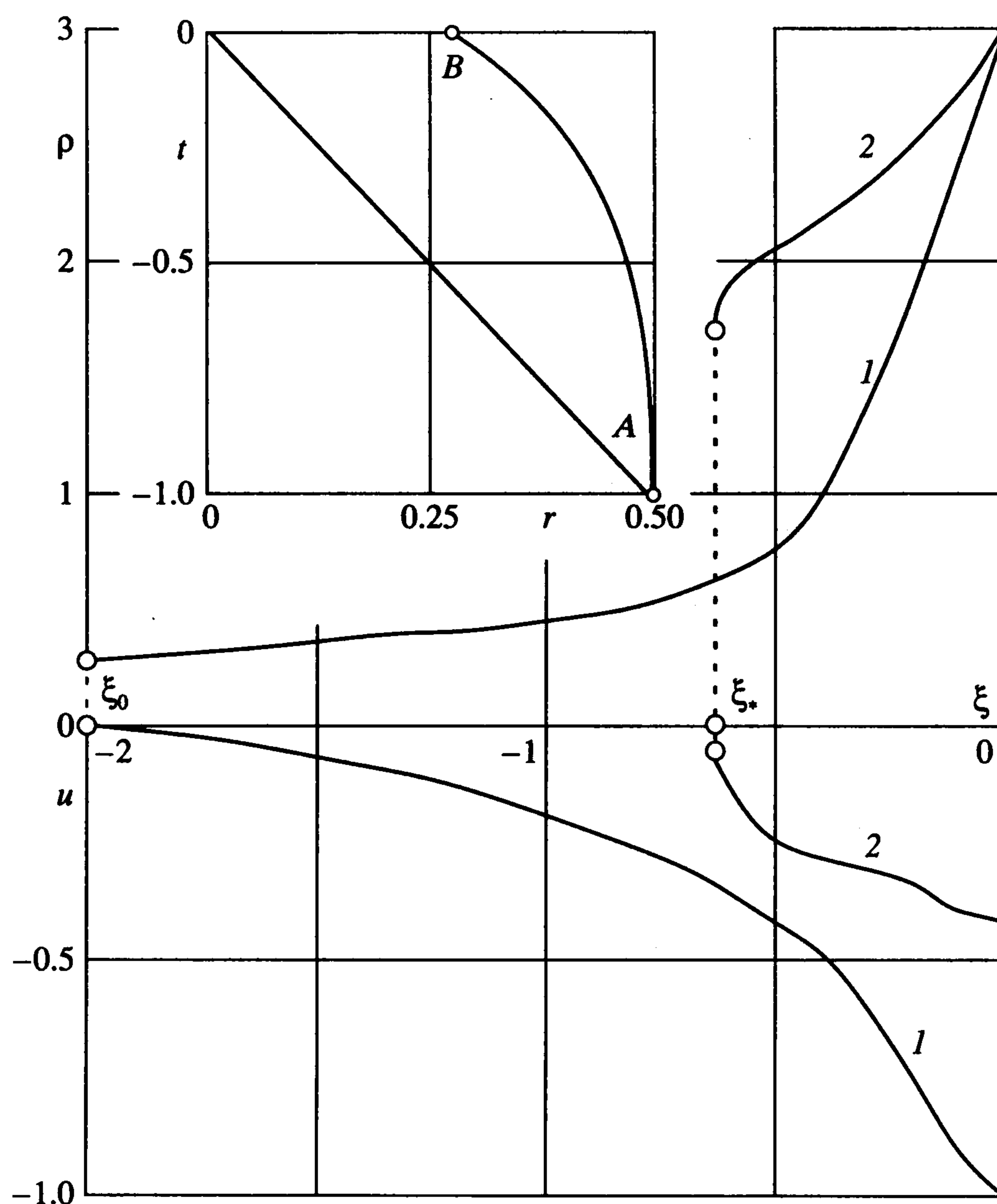
3°. Нельзя исключать и такую гипотетическую ситуацию, когда при другой конфигурации течения (например, при определенной немонотонности внешнего воздействия) станет возможным безударное сжатие одномерных слоев исходного газа, не являющегося нормальным по терминологии Р–Я.

Далее исследуется возможность ограниченного безударного сжатия цилиндрических и сферических однородных покоящихся объемов газа с рассматриваемым уравнением состояния (см. фиг. 1, 2). Требуемые течения возникают при схождении в момент $t = 0$ к оси или центру симметрии волн сжатия, непрерывно примыкающих при $t < 0$ к однородному покою через звуковую C^- -характеристику. В момент $t = 0$ волна сжатия не фокусируется в точку $t = r = 0$, а непрерывно распределена от $r = 0$ до некоторого $r = r_* > 0$. В случае политропного уравнения состояния известные автомодельные решения [8] описывают [9–11] процесс изэнтропического сжатия газа как до бесконечного значения плотности, так и до любого наперед заданного конечного значения плотности.

Для описания одномерных изэнтропических течений используется система уравнений газовой динамики [4] в безразмерных переменных, введенных стандартным образом,

$$\rho_t + u\rho_r + \rho(u_r + vu/r) = 0, \quad u_t + uu_r + c^2(\rho)\rho_r/\rho = 0 \quad (3)$$

Значения $v = 0, 1, 2$ соответствуют случаям плоской, цилиндрической и сферической симметрии; $r = (x_1^2 + \dots + x_{v+1}^2)^{1/2}$, x_1, x_2, x_3 – пространственные координаты, u – скорость газа, $c^2(\rho)$ задается зависимостью, определенной графиком, представленным на фиг. 2.



Фиг. 4

Для построения автомодельных решений системы (3) делается стандартная замена переменных: $\xi = t/r$, $\tau = t$ и полагается $\partial/\partial\tau = 0$. В результате вместо системы (3) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\rho = \rho(\xi)$, $u = u(\xi)$:

$$(1 - \xi u)\rho' - \xi \rho u' = -v u, \quad -\xi c^2(\rho)\rho'/\rho + (1 - \xi u)u' = 0 \quad (4)$$

В случае $v = 0$ эта система однородная. Для того чтобы она имела не только тривиальное решение, необходимо потребовать равенство нулю ее определителя:

$$\Delta \equiv (1 - \xi u)^2 - \xi^2 c^2(\rho) = 0$$

что приводит к следующим соотношениям:

$$(1 - \xi u) = \pm \xi c(\rho), \quad du/d\rho = \pm c(\rho)/\rho, \quad \xi = 1/[u(\rho) \pm c(\rho)]$$

В результате получается выписанное выше решение (1).

В случаях $v = 1, 2$ система (4) неоднородна и может быть переписана в эквивалентном виде

$$\rho' = -v \rho u(1 - \xi u)/\Delta, \quad u' = -v \xi c^2(\rho)u/\Delta \quad (5)$$

Систему (5) невозможно свести к одному уравнению, как это было сделано в случае политропного газа [8], и поэтому особые точки системы (5) априори неизвестны.

Решения системы (5) можно строить численно, задавая в неособой точке $\xi = 0$ начальные значения

$$\rho(0) = \rho_{00} > 0, \quad u(0) = u_{00} < 0$$

и рассчитывая интегральные кривые в сторону убывания ξ , т.е. при $\xi \leq 0$.

На фиг. 4 цифрой 1 помечены графики решения $\rho = \rho(\xi) \geq 0$ и $u = u(\xi) \leq 0$ системы (5), построенные при $v = 2$ на интервале $\xi_0 \leq \xi \leq 0$ из начальных значений $\rho_{00} = 3$, $u_{00} = -1$. Для этих решений при $\xi = \xi_0 \approx -2$ числители и знаменатели обеих правых частей системы (5) обращаются в нуль, причем $u(\xi_0) = 0$, а значение $\rho^0 = \rho(\xi_0)$ такое, что $c^2(\rho^0) = 1/\xi_0^2$. Следовательно, прямая $t/r = \xi_0$ – звуковая C^- -характеристика однородного покоящегося газа с плотностью $\rho = \rho^0$ и через данную характеристику к этому однородному покою непрерывно примыкает построенная автомодельная волна сжатия.

На врезке к фиг. 4 приведена траектория AB движения непроницаемого поршня, создающего в области OAB указанную автомодельную волну сжатия, через характеристику AO непрерывно примыкающую к однородному покою. В данном примере при расчетах получились следующие значения:

$$r_A = 0.500751, \quad r_B = 0.261258, \quad \rho_A = 0.4253, \quad \rho_B = 3$$

(r_A, r_B – радиусы указанных точек; r_A, r_B – значения плотностей несжатого и сжатого газа соответственно), поэтому относительная разность масс не сжатого и сжатого газа в рассмотренном примере не превышает 0.2%. Данная величина характеризует точность численного построения автомодельного решения системы (3).

Приведенный пример показывает, что возможно безударное сжатие шарового объема газа с первоначальной плотностью, меньшей значений из аномального промежутка до плотности, превышающей значения из аномального промежутка.

На фиг. 4 цифрой 2 помечены графики решения системы (5), построенные для $v = 2$ при начальных значениях $\rho_{00} = 3$, $u_{00} = -0.4$. У этих решений при $\xi = \xi_* \approx -0.6$ только знаменатели обеих правых частей системы (5) обращаются в нуль, а числители отличны от нуля. Данный факт можно трактовать как возникновение бесконечных производных ρ_r и u_r с последующим образованием в течении газа ударной волны.

Подобные явления имеют место и в случае $v = 1$: если значение u_{00} велико по модулю, то безударное сжатие возможно; если u_{00} недостаточно велико по модулю, то изэнтропически пройти аномальный участок плотности не удастся.

Авторы благодарят А.Н. Крайко за обсуждения и замечания.

Данное исследование поддержано Российским фондом фундаментальных исследований (02-01-01122).

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997. 159 с.
2. Забабахин Е.И., Забабахин И.Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988. 172 с.
3. Копышев В.П., Урлин В.Д. Изэнтропическая сжимаемость и уравнения состояния водорода до давления 1 ТПа // Ударные волны и экстремальные состояния вещества / Под ред. В.Е. Фортова и др. М.: Наука, 2000. С. 297–314.
4. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

5. *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука. 1978. 687 с.
6. *Галин Г.Я.* Об ударных волнах в средах с произвольным уравнением состояния // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119. № 6. С. 1106–1109.
7. *Сидоренко А.Д.* Волновые адиабаты для сред с произвольным уравнением состояния // Докл. АН СССР 1968. Т. 178. № 4. С. 818–821.
8. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механизме. М.: Наука, 1981. 447 с.
9. *Каждан Я.М.* К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня // ПМТФ. 1977. № 1. 23–30.
10. *Забабахин И.Е., Симоненко В.А.* Сферическая центрированная волна сжатия // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 573–576.
11. *Крайко А.Н., Тилляева Н.И.* Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 1. С. 120–128.

Екатеринбург
e-mail: sbautin@math.usart.ru

Поступила в редакцию
20.XI.2001