

УДК 533.6.011

© 2003 г. А. Н. Крайко

**ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КУСОЧНО-ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ
ДОКРИТИЧЕСКИХ И КРИТИЧЕСКИХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ
ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА**

В приближении идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа исследуются предельные свойства докритических и критических (с числами Маха $M \leq 1$) плоскопараллельных струйных течений. Используется уравнение Чаплыгина с давлением и углом наклона скорости в качестве независимых переменных, отсчитываемых от предельных значений, отвечающих сечению выравнивания струй по этим переменным. Функция тока в окрестности "сечения выравнивания" представляется в виде разложения по степеням "расстояния до начала координат" (в плоскости независимых переменных) с коэффициентами, зависящими от заранее неизвестной комбинации независимых переменных. Предельное свойство течения – положение сечения выравнивания на конечном или на бесконечном расстоянии, определяется главными членами разложения. В качестве примеров рассмотрены симметричные потенциальная струя и кусочно-потенциальные струи, истекающие в затопленное пространство при докритических и критических перепадах давления. Критические давления потенциальных частей составной струи могут различаться или совпадать (в том числе, при разных термодинамических свойствах газов).

1. Введение. В задачах о плоскопараллельных потенциальных струйных течениях идеального газа вслед за Чаплыгиным [1] широко используется переход к величине V и углу наклона θ вектора скорости V в качестве независимых, а функции тока ψ , потенциала и декартовых координат x и y – зависимых переменных. Получающееся при этом линейное уравнение для ψ с зависящими только от V коэффициентами ("уравнение Чаплыгина") в ряде задач с непроницаемыми границами из прямолинейных участков допускает разделение переменных и решение в целом в форме бесконечных рядов [1–10]. Однако и в таких случаях полное решение задачи удается далеко не всегда, поскольку для газов с реальной термодинамикой уравнения для бесконечного набора зависящих от V функций можно проинтегрировать только численно. Даже для совершенного газа с постоянными теплоемкостями, для которого эти функции оказываются хорошо изученными решениями гипергеометрического уравнения, суммирование соответствующих рядов – весьма сложная проблема (см. [8] и [9], с. 228–234).

Проще исследовать предельные свойства указанных течений, под которыми понимается положение сечения выравнивания параметров струи, ибо для этого требуется не вычисление сумм соответствующих рядов, а лишь выяснение их сходимости или расходимости. Именно так было доказано [1], что при докритическом перепаде (давление в затопленном пространстве выше критического давления струи) в случае совершенного газа выравнивание, как и для несжимаемой жидкости, имеет асимптотический характер. Было показано [2] (см. также [4]), что тем же свойством обладают докритические струи произвольного баротропного газа.

Если асимптотический характер выравнивания докритических струй представляется естественным, то впервые установленное в [3] выравнивание критической струи в прямой звуковой линии на конечном расстоянии от среза насадка оказалось неожиданным. Это свойство получено [3] для совершенного газа в задаче, допускающей разделение переменных как следствие сходимости соответствующего ряда. Было приведено [4] выполненное автором работы [2] обобщение результата [3] на произвольный баротропный газ. Тем же способом результат [3] был обобщен [5, 8–10] на случай звуковой струи совершенного газа, натекающей на клиновидные препятствия. В задаче натекания образуются две прямые звуковые линии, ограничивающие конечную область дозвукового течения сверху и снизу по потоку. Заметим, что прямолинейность звуковых линий в двумерных (плоскопараллельных и осесимметричных) потенциальных течениях с $M \leq 1$ следует также из теоремы, доказанной в [11] (см. также [12]).

Ниже в развитие полученных ранее результатов [13] излагается более простой, чем анализ сходимости рядов, метод исследования предельных (выравнивающих) свойств плоскопараллельных потенциальных и кусочно-потенциальных струй. Скорость на тангенциальных разрывах, разделяющих кусочно-потенциальные струи, рвется. Поэтому уравнение Чаплыгина используется в форме, в которой модуль скорости V заменен давлением p . Метод опирается на анализ структуры решения в окрестности особой точки плоскости независимых переменных – p и угла $\vartheta = -\theta$, отвечающей сечению выравнивания. Указанный анализ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, интегрируемому в квадратурах. Для применения метода не требуется, чтобы задача в целом допускала разделение переменных, а газ был совершенным.

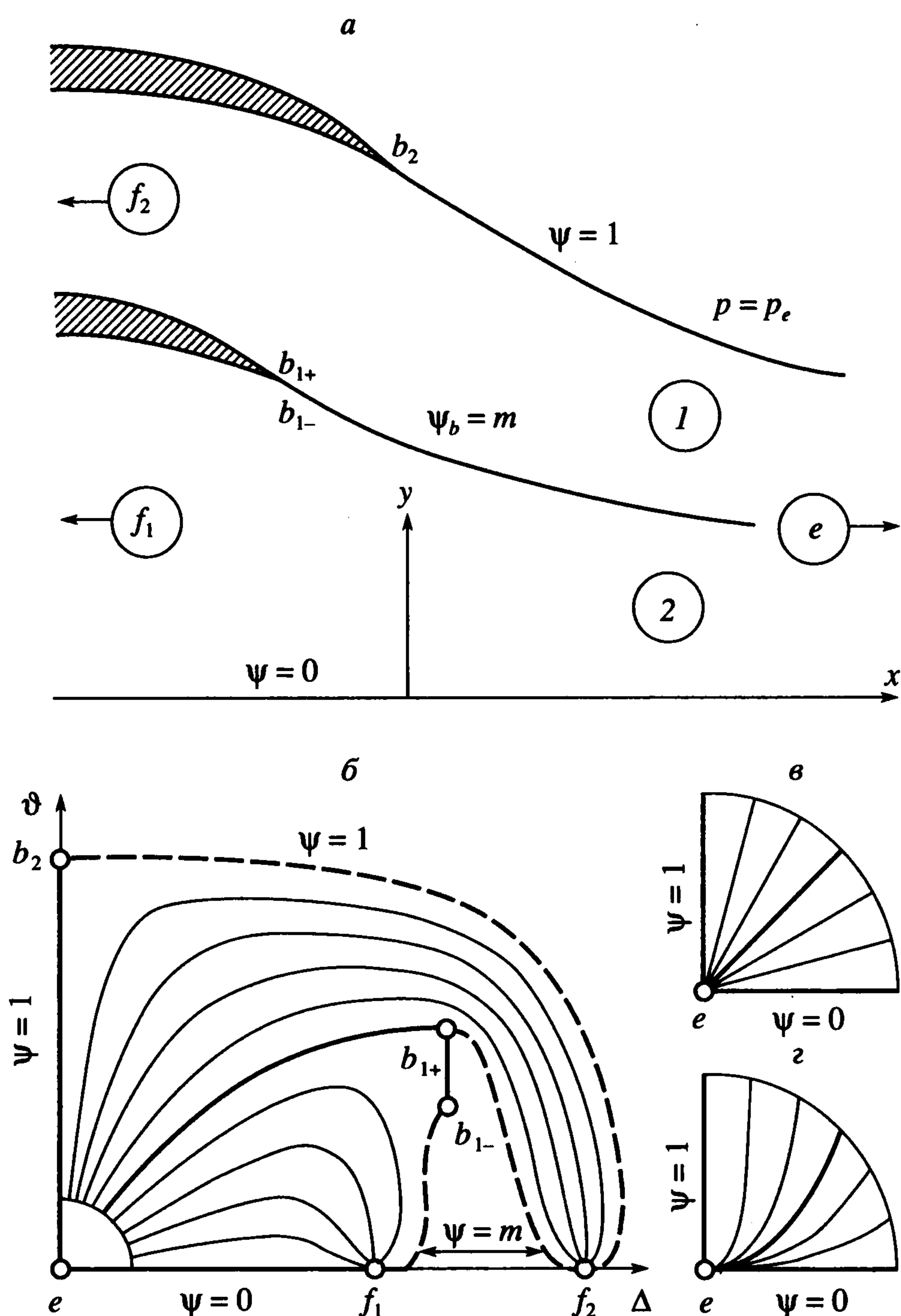
2. Структура решения в окрестности особой точки. Однородная потенциальная струя. Рассмотрим плоскопараллельную струю идеального газа, вытекающую из насадка (фиг. 1, *a*) в затопленное пространство с давлением p_e . Форма насадка достаточно произвольна, если не считать наличия плоскости симметрии и отсутствия участков образующих, при обтекании которых могли бы возникать местные сверхзвуковые зоны со скачками, нарушающими изэнтропичность течения. Насадок, как на фиг. 1, *a*, может иметь внутренние стенки. В случае, соответствующем фиг. 1, *a*, над плоскостью симметрии, по которой направим ось x декартовых координат x и y , текут две струи, вообще говоря, разных газов, с отличными энтальпиями торможения H и удельными энтропиями S . При однородных для каждой струи H и S течение в них потенциально. Это позволяет перейти к переменным V и θ , где θ – угол наклона вектора скорости к оси x . В таких переменных для произвольного двупараметрического газа функция тока удовлетворяет уравнению Чаплыгина [7]

$$V^2 \psi_{VV} + V(1 + M^2) \psi_V + (1 - M^2) \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (2.1)$$

а для дифференциала dx справедливо равенство

$$dx = \left(\frac{M^2 - 1}{\rho V^2} \psi_{\theta} \cos \theta - \psi_V \sin \theta \right) dV + \frac{1}{\rho V} (V \psi_V \cos \theta - \psi_{\theta} \sin \theta) d\theta \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.1) и (2.2) все переменные безразмерные. При приведении к безразмерному виду за масштабы давления, скорости и плотности возьмем p_e° , V_{*k}° и $p_e^\circ / (V_{*k}^\circ)^2$. "Градусом" отмечаются размерные величины, звездочкой – критические параметры (здесь – критическую скорость), а индексами $k = 1, \dots, K$ – параметры струй, нумеруемых от плоскости симметрии (K – число кусочно-потенциальных



Фиг. 1

струй). Поскольку масштаб для давления – давление в затопленном пространстве p_e^0 – одинаков для всего течения, то свои для каждой струи масштабы скорости и плотности не влияют на существенные для дальнейшего, непрерывные на тангенциальных разрывах поля p и $\vartheta = -\theta$. Допускаемые при введении функции тока аддитивная постоянная и нормирующий множитель выбраны так, что для $\psi = \psi(p, \vartheta)$

$$\psi(p, 0) = 0, \quad \psi(1, \vartheta) = 1 \quad (2.3)$$

где учтено, на границе струи с затопленным пространством $p = p_e = 1$.

Уравнения и условия (2.1)–(2.3) справедливы не только для кусочно-однородных по H^0 и S^0 и как следствие этого – потенциальных течений, но и для таких существенно неоднородных течений, которые сводятся к однородным или кусочно-однородным. В рассматриваемых задачах, согласно известным результатам [14] (см. также [15]), это – струи совершенного газа с энтальпией торможения H^0 , зависящей от ψ , а следовательно, и $V_*^0 = V_*^0(\psi)$ при постоянном или кусочно-постоянном критическом давлении p_*^0 .

Для таких течений при аналогично выбранных масштабах давления, скорости и плотности (со своей на каждой линии тока V_*^0) уравнения движения для безразмерных (без "градусов") и размерных параметров, записанные для независимых переменных x и y , как и для однородного потока, различаются лишь наличием "градусов". Условие потенциальности течения получается из них как следствие постоянства теперь безразмерных H и S . Для совершенного газа с показателем адиабаты κ после описанного выше перехода к безразмерным величинам $H = (\kappa + 1)/[2(\kappa - 1)]$, а постоянство S эквивалентно постоянству отношения

$$p/\rho^\kappa = p_*/\rho_*^\kappa = \kappa^{-\kappa} (p_*^0/p_e^0)^{1-\kappa} = \kappa^{-\kappa} p_*^{1-\kappa}$$

В связи с задачами истечения кусочно-однородных струй перейдем от V к p , учтя, что в каждой однородной струе p – функция только V , $dp/dV = -\rho V$ и $d^2p/dV^2 = \rho(M^2 - 1)$. Кроме того, в уравнениях (2.1) и (2.2) заменим $\theta \leq 0$ на $\vartheta = -\theta \geq 0$. После этого будем иметь

$$\psi_{pp} - \alpha \psi_p + \beta^2 \psi_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \alpha = \frac{2}{\rho V^2}, \quad \beta^2 = \frac{1 - M^2}{\rho^2 V^4} \quad (2.4)$$

$$dx = \left(\frac{\sin \vartheta}{\rho V} \psi_p - \beta^2 V \psi_{\vartheta} \cos \vartheta \right) dp + \left(V \psi_p \cos \vartheta + \frac{\sin \vartheta}{\rho V} \psi_{\vartheta} \right) d\vartheta \quad (2.5)$$

Верхней половине потенциальных и кусочно-потенциальных струй, истекающих из сужающихся насадков типа изображенного на фиг. 1, *а*, отвечает некоторая область плоскости Δ , ϑ с $\Delta = p - p_e = p - 1$. При в общем случае неизвестной всей границы такой области для дальнейшего важно лишь (фиг. 1, *б*), что оси струи соответствует ось абсцисс ($\vartheta = 0$), а границе с затопленным пространством – ось ординат ($\Delta = 0$). Согласно условиям (2.3), на оси абсцисс $\psi = 0$, а на оси ординат $\psi = 1$. Таким образом, начало координат $\Delta = \vartheta = 0$, отвечающее в плоскости x, y сечению выравнивания струи по давлению и направлению скорости, – особая точка, в которую приходят все линии тока с $0 \leq \psi \leq 1$. На фиг. 1, *б* точки *b, e, ...* отвечают тем же точкам плоскости x и y фиг. 1, *а*, неизвестные участки границы течения даны штрихами, границы течения и сплошные кривые – линии тока, на которых $\psi = \text{const}$, жирная кривая – линия тока, разделяющая однородные струи. Характер выравнивания определяется поведением линий тока в окрестности начала координат. На фиг. 1, *б* в этой окрестности линии тока не показаны. Два варианта подхода линий тока к началу координат изображены на фиг. 1, *в* и *г*.

Пусть $\delta = \delta(\Delta, \vartheta)$ – определенное тем или иным способом расстояние до особой точки. Тогда $\psi(\Delta, \vartheta)$ в ее окрестности естественно искать в форме

$$\psi = \psi_0(\chi) + \psi_1(\chi)\delta + \psi_2(\chi)\delta^2 + \dots, \quad \chi = \vartheta \Delta^{-n} \quad (2.6)$$

с неизвестным показателем n . При использовании данного разложения следует различать случаи истечения докритических ($p_* < 1$, $M_e < 1$ и $\beta_e > 0$) и критических ($p_* = 1$, $M_e = 1$ и $\beta_e = 0$) струй.

Подставив разложение (2.6) в уравнение Чаплыгина в форме (2.4) и учтя малость δ и Δ , для "докритических" струй в главных порядках по δ и Δ придем к уравнению

$$(n^2 \chi^2 + \beta_e^2 \Delta^{2(1-n)}) \psi_0'' + n(n+1) \chi \psi_0' = 0 \quad (2.7)$$

Рассмотрим разные случаи. В особой точке $\Delta = 0$, а вблизи нее $\Delta \ll 1$. В силу этого в зависимости от величины n некоторыми слагаемыми в уравнении (2.7) можно пре-

небредь. В соответствии с этим при $M_e < 1$ для уравнения (2.7) возможны решения (C_1 и C_2 – постоянные интегрирования)

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C_1 \chi^{-1/n} + C_2, \quad n < 1; \quad \psi_0 = C_1 \chi + C_2, \quad n > 1 \\ \psi_0 &= C_1 \operatorname{arctg} \frac{\chi}{\beta_e} + C_2, \quad n = 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

В случае однородной струи χ изменяется от нуля (на оси струи – на оси Δ плоскости Δ, ϑ) до бесконечности (на границе струи – на оси ϑ той же плоскости). Поэтому конечному изменению ψ_0 и ψ отвечает решение (2.8) с $n = 1$, и с учетом условий (2.3)

$$\psi_0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\chi}{\beta_e}, \quad \chi = \frac{\vartheta}{\Delta} \quad (2.9)$$

Этому решению отвечает фиг. 1, в.

Для критических струй, для которых $p_* = 1$, $M_e = 1$ и $\beta_e = 0$, разложив $\beta = \beta(\Delta)$ по Δ , запишем уравнение (2.4) с достаточной для дальнейшего точностью в форме

$$\psi_{pp} - \alpha_* \psi_p + \left(\frac{3q}{2}\right)^2 \Delta \psi_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \alpha_* = \frac{2}{\rho_*} = \frac{2}{\kappa}, \quad q^2 = \frac{-8}{9\rho_*^2} \left(\frac{dM}{dp}\right)_* = \frac{4(\kappa+1)}{9\kappa^3} \quad (2.10)$$

Здесь множитель $3/2$ в скобках введен для упрощения дальнейших формул, а вторые выражения для α_* и q^2 отвечают совершенному газу. Аналогично в случае критических струй изменится и выражение для dx . Теперь вместо выражения (2.5) будем иметь

$$dx = \left[\frac{\sin \vartheta}{\rho_*} \psi_p - \left(\frac{3q}{2}\right)^2 \Delta \psi_{\vartheta} \cos \vartheta \right] dp + \left(\psi_p \cos \vartheta + \frac{\sin \vartheta}{\rho_*} \psi_{\vartheta} \right) d\vartheta \quad (2.11)$$

Подстановка разложения (2.6) в уравнение (2.10) приводит к уравнению

$$\left(n^2 \chi^2 + \frac{9}{4} q^2 \Delta^{3-2n} \right) \psi_0'' + n(n+1) \chi \psi_0' = 0 \quad (2.12)$$

Отсюда аналогично предыдущему найдем, что при $p_* = 1$ и $M_e = 1$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= C_1 \chi^{-1/n} + C_2, \quad n < \frac{3}{2}; \quad \psi_0 = C_1 \chi + C_2, \quad n > \frac{3}{2} \\ \psi_0 &= C_1 I(\chi_0, \chi, q) + C_2, \quad I(a, b, c) = \int_a^b \frac{d\xi}{(\xi^2 + c^2)^{5/6}}, \quad n = \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для критической однородной струи конечное изменение ψ_0 и ψ дает решение (2.13) с $n = 3/2$, а с учетом условий (2.3)

$$\psi_0 = \frac{I(0, \chi, q)}{I(0, \infty, q)}, \quad \chi = \frac{\vartheta}{\Delta^{3/2}} \quad (2.14)$$

Этому решению отвечает фиг. 1, г.

Чтобы найти абсциссу x_e сечения выравнивания потенциальной (однородной) струи, подставим разложения (2.6) и решения (2.9) или (2.14) в выражение (2.2), оста-

вим главные члены по Δ и ϑ и проинтегрируем получившееся уравнение от некоторого достаточно удаленного от среза насадка "начального" сечения либо по Δ от Δ_0 до $\Delta \rightarrow 0$ при $\vartheta = 0$, либо по ϑ от ϑ_0 до $\vartheta \rightarrow 0$ при $\Delta = 0$. Нулевым индексом отмечают параметры в выбранном начальном сечении, интегрирование при $\vartheta = 0$ дает x_e на плоскости симметрии струи, а при $\Delta = 0$ – на ее границе. Для определения предельной ординаты границы y_e – полуширины выровнявшейся струи одновременно с вычислением x_e проинтегрируем по ϑ уравнение линии тока

$$dy = (\operatorname{tg} \vartheta) dx = \vartheta (dx/d\vartheta) d\vartheta$$

причем $dx/d\vartheta$ вычисляется из уравнения (2.11) с $dp = 0$ и с решениями (2.9) или (2.14) для функции тока. Окончательно найдем, что для докритической струи

$$x_e = x_0 - \frac{2}{\pi} V_e \beta_e \lim_{\Delta \rightarrow 0} \ln \frac{\Delta}{\Delta_0} = x_0 - \frac{2}{\pi} V_e \beta_e \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \rightarrow \infty, \quad y_e = y_0 - \frac{2}{\pi} V_e \beta_e \vartheta_0^2 \quad (2.15)$$

а для критической

$$x_e = x_0 + \frac{9}{2I(0, \infty, q)} \left(\frac{3q}{2} \right)^{1/3} \Delta_0^{1/2} = x_0 + \frac{9}{2I(0, \infty, q)} \vartheta_0^{1/3} < \infty$$

$$y_e = y_0 - \frac{9}{8I(0, \infty, q)} \vartheta_0^{4/3} \quad (2.16)$$

Из формул (2.15) и (2.16) следуют уже упоминавшиеся известные свойства потенциальных плоскопараллельных струй идеального газа: асимптотическое выравнивание при докритических перепадах ($p_* < 1$) и выравнивание на конечном расстоянии при критическом перепаде ($p_* = 1$).

Первые формулы для координаты x_e (2.15) и (2.16) дают ее через давление на оси струи, а вторые – через угол наклона границы. Согласно формуле (2.15) и предшествующей ей формуле для dy , на бесконечно длинном участке выравнивания (при Δ_0 , Δ , ϑ_0 и $\vartheta \ll 1$) для докритических струй выполняются связи

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \quad x = x_0 - \frac{2}{\pi} V_e \beta_e \ln \frac{\Delta}{\Delta_0} = x_0 - \frac{2}{\pi} V_e \beta_e \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0}, \quad y = y_0 - \frac{2}{\pi} V_e \beta_e (\vartheta_0^2 - \vartheta^2) \quad (2.17)$$

Аналогично для критических струй

$$\sqrt{\Delta_0} - \sqrt{\Delta} = \left(\frac{\vartheta_0}{q} \right)^{1/3} - \left(\frac{\vartheta}{q} \right)^{1/3}, \quad x = x_0 + \frac{9}{2I(0, \infty, q)} \left(\frac{3q}{2} \right)^{1/3} (\Delta_0^{1/2} - \Delta^{1/2}) =$$

$$= x_0 + \frac{9}{2I(0, \infty, q)} (\vartheta_0^{1/3} - \vartheta^{1/3}), \quad y = y_0 - \frac{9}{8I(0, \infty, q)} (\vartheta_0^{4/3} - \vartheta^{4/3}) \quad (2.18)$$

Формулы (2.17) и (2.18) на участках выравнивания ($\Delta < \Delta_0 \ll 1$ и $\vartheta < \vartheta_0 \ll 1$) бесконечной или конечной протяженности связывают координаты x , y , x_0 и y_0 границы струи с углами ее наклона ϑ и ϑ_0 , абсциссы x и x_0 оси струи – с Δ и Δ_0 на ней и, наконец, ϑ и ϑ_0 на границе – с Δ и Δ_0 на оси. Указанные связи универсальны, ибо не зависят от формы симметричного насадка. Для докритических струй связь ϑ и ϑ_0 на границе с Δ и Δ_0 на оси не зависит и от свойств газа.

Если у подводящего канала есть цилиндрическая часть, то для больших отрицательных x решение (2.8) с $n = 1$ и с $\Delta = p - p_f$ описывает и течение в ней. При этом абсцисса сечения выравнивания $x_f \rightarrow -\infty$.

Решения (2.8) и (2.13) получаются и в том случае, если в разложении (2.6) вместо $\chi = \vartheta/\Delta^n$ взять $\chi = \vartheta/f(\Delta)$ с заранее неизвестной функцией $f(\Delta)$, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$. В силу этого условия по-прежнему $\chi = \infty$ на границе струи и $\chi = 0$ на

ее плоскости симметрии. При этом для докритических струй уравнение (2.7), определяющее $\psi_0(\chi)$, заменится на

$$(\chi^2 f'^2 + \beta_e^2) \psi_0'' + (2f'^2 - ff'' + \alpha_e ff') \chi \psi_0' = 0 \quad (2.19)$$

Положив

$$ff'' = kf'^2 \quad (2.20)$$

выясним, как выбор постоянной k влияет на решение уравнения (2.19). Проинтегрировав уравнение (2.20), найдем, что его решение удовлетворяет условию $f(0) = 0$ только для $-\infty < k < 1$. При этом

$$f = \Delta^n, \quad n = \frac{1}{1-k}, \quad f' = n\Delta^{n-1}, \quad f'^2 = n^2 \Delta^{2(n-1)}, \quad f'' = n(n-1)\Delta^{n-2}$$

Отсюда при разных допустимых k , а следовательно, и n получаются "степенные" $\chi = \vartheta/\Delta^n$ и прежние решения (2.8) и (2.13).

3. Выравнивающие свойства кусочно-потенциальных струй. При рассмотрении двух струй (фиг. 1, а), различающихся критическими давлениями и свойствами газа (для совершенных газов – показателями адиабаты k), их параметры, согласно сказанному ранее, отмечаются индексами 1 и 2. Каждая струя однородна по полной энтальпии и энтропии (или приводится к однородной описанным выше способом). Поэтому течение в них потенциально. Граница струй – тангенциальный разрыв, на котором непрерывны координаты x и y , функция тока ψ , угол ϑ , давление p и $\Delta = p - p_e = p - 1$. Тангенциальный разрыв – линия тока обеих струй. В плоскости Δ, ϑ они совпадают, и, следовательно, при использовании разложений (2.6) в малой окрестности начала координат решения для ψ обеих струй должны совпадать на линии $\vartheta/\Delta^n = \chi_b$. Здесь и далее индексом b отмечаются переменные на тангенциальном разрыве. Поэтому если нулевые члены разложений (2.6) для обеих струй, т.е. и ψ_{01} , и ψ_{02} отличны от нуля (смысл данной оговорки станет ясен позднее), то они должны быть функциями одного и того же χ , и $n_1 = n_2 = n$.

Итак, на границах струй выполняются условия

$$\psi_1(p, 0) = 0, \quad \psi_{1b} = m, \quad \psi_{2b} = m, \quad \psi_2(p_e, \vartheta) = 1, \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)_{b2} = \left(\frac{dx}{dp}\right)_{b1} \quad (3.1)$$

с заданной постоянной m , $0 \leq m \leq 1$. Последнее равенство в (3.1) – условие непрерывности на тангенциальном разрыве координаты x . При его выполнении непрерывность второй координаты следует из непрерывности ϑ и равенства (тангенциальный разрыв – линия тока)

$$dy/dx = \tan \theta = -\tan \vartheta$$

Рассмотрим различные ситуации.

Обе струи докритические. В этом случае $p_{*1}, p_{*2} < p_e = 1$, и из всех решений (2.8) и (2.13), дающих ограниченные ψ_1 и ψ_2 , пригодно только решение (2.8) с $n = 1$. Для него на тангенциальном разрыве $(d\vartheta/dp)_b = \chi_b$. Отсюда и из соотношений (2.5) и (2.8) получим

$$\psi_{0k} = C_{1k} \arctg \frac{\chi}{\beta_{ek}} + C_{2k}, \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)_{bk} = -\frac{C_{1k} \beta_{ek} V_{ek}}{\Delta_b}, \quad \chi = \frac{\vartheta}{\Delta} \quad (3.2)$$

С учетом этого из последнего условия (3.1) найдем

$$C_{12} \beta_{e2} V_{e2} = C_{11} \beta_{e1} V_{e1}$$

Подставив сюда найденные из первых четырех условий (3.1) постоянные C_{11} и C_{12} , придем к равенству

$$m\beta_{e1}V_{e1}\left(\arctg\frac{\chi_b}{\beta_{e2}} - \frac{\pi}{2}\right) + (1-m)\beta_{e2}V_{e2}\arctg\frac{\chi_b}{\beta_{e1}} = 0 \quad (3.3)$$

для определения χ_b как функции m ($0 \leq m \leq 1$) и других параметров струй. Левая часть этого равенства – ограниченная, непрерывная и монотонно возрастающая функция χ_b . При изменении χ_b от нуля (на плоскости симметрии) до плюс бесконечности (на границе с затопленным пространством) она растет от известного отрицательного до также известного положительного значения. Поэтому уравнение (3.3) имеет единственный корень $0 \leq \chi_b \leq \infty$ с крайними значениями, отвечающими либо одной внешней ($m = 0$), либо одной внутренней ($m = 1$) струе.

Внутренняя струя докритическая, внешняя критическая. В этом случае из решений (2.8) для докритической "внутренней" (нижней) струи ($k = 1, p_{*1} < 1, 0 \leq \chi \leq \chi_b < \infty$) и решений (2.13) – для критической "внешней" (верхней) струи ($k = 2, p_{*2} = 1, 0 < \chi_b \leq \chi \leq \infty$) ограниченные ψ_{01} и ψ_{02} получаются также только при $n = 1$ и $\chi = \vartheta/\Delta$. Взяв из (2.13) решение с $n = 1 < 3/2$, вычислим для него по (2.11) $(dx/dp)_{b2}$. Вместе с решением (3.2) для докритической струи ($k = 1$) это с учетом условий на оси и на внешней границе струи дает

$$\psi_{01} = C_{11}\arctg\frac{\chi}{\beta_{e1}}, \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)_{b1} = -\frac{C_{11}\beta_{e1}V_{e1}}{\Delta_b}, \quad \psi_{02} = \frac{C_{12}}{\chi} + 1, \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)_{b2} = \frac{C_{12}}{\Delta_b}, \quad \chi = \frac{\vartheta}{\Delta}.$$

Отсюда, как и в предыдущем случае, из условий на тангенциальном разрыве придем к уравнению для определения χ_b

$$\frac{m}{\chi_b} - \frac{1-m}{\beta_{e1}V_{e1}}\arctg\frac{\chi_b}{\beta_{e1}} = 0$$

Доказательство того, что при $0 < m < 1$ оно имеет единственное решение $0 < \chi_b < \infty$, еще проще, чем для уравнения (3.3).

В обоих рассмотренных выше случаях решения для приосевой струи совпадают с решением, приведенным в разд. 2. Поэтому с точностью до постоянного множителя справедлива первая формула (2.15), выражающая x_e через $\ln(\Delta/\Delta_0)$, а выравнивание по p и ϑ является асимптотическим.

Внутренняя струя критическая, внешняя докритическая. Этот случай представляет особый интерес, ибо для него решение с $\psi_{01} \neq 0$ и $\psi_{02} \neq 0$, а также с $\psi_{02} \equiv 0$ при $\psi_{01} \neq 0$ построить не удастся. Если же принять, что $\psi_{01} \equiv 0$, то решение в окрестности особой точки строится, но не при любых m и $V_{e2} < 1$. Таким образом, данный пример демонстрирует ограниченность используемого подхода.

При критической внутренней струе ($k = 1, p_{*1} = 1, 0 \leq \chi \leq \chi_b < \infty$) ограниченное решение из (2.13) для ψ_{01} отвечает $n_1 \geq 3/2$, а при докритической внешней струе ($k = 2, p_{*2} < 1, 0 < \chi_b \leq \chi \leq \infty$) ограниченное решение из (2.8) для ψ_{02} отвечает $n_2 \leq 1$. Невозможность выбора одинакового для обеих струй показателя степени в переменной χ позволяет (согласно сделанной в начале разд. 3 оговоркой) предположить, что ψ_{01} или ψ_{02} – тождественный нуль. Допустим, что $\psi_{01} \equiv 0$, и учтем, что в плоскости Δ, ϑ внутреннюю струю отделяют от оси ϑ тангенциальный разрыв и наружная струя. Последнее обстоятельство позволяет в представлении функции тока внутренней струи в форме (2.6) с $\psi_{01} \equiv 0$ взять в качестве расстояния до особой точки $\delta(\Delta, \vartheta) = \Delta^l$ с заранее неизвестным положительным показателем $l > 0$. В соответствии с этим

$$\psi_1 = \psi_{11}(\chi)\Delta^l + \dots, \quad \chi = \vartheta\Delta^{-n} \quad (3.4)$$

Подставив выражение (3.4) в уравнение (2.10) и оставив главные члены разложения, приходим к уравнению

$$l(l-1)\psi_{11} + n(1+n-2l)\chi\psi'_{11} + n^2\chi^2\psi''_{11} + (3q/2)^2\Delta^{3-2n}\psi''_{11} = 0 \quad (3.5)$$

При $n \neq 3/2$ его решения имеют вид

$$\psi_{11}(\chi) = C_{11}\chi + C_{21}, \quad n > \frac{3}{2}; \quad \psi_{11}(\chi) = C_{11}\chi^{(l-1)/n} + C_{21}\chi^{l/n}, \quad n < \frac{3}{2} \quad (3.6)$$

Уравнение, получающееся из (3.5) при $n = \frac{3}{2}$,

$$9(\chi^2 + q^2)\psi''_{11} + 3(5-4l)\chi\psi'_{11} + 4l(l-1)\psi_{11} = 0 \quad (3.7)$$

при l , отличных от 0 и 1, имеет решения, выражающиеся через функции Лежандра с чисто мнимой последней переменной (i/q). Случай $l = 0$ неинтересен, поскольку при таком l разложение (3.4) не отличается от (2.6), а при $l = 1$ решение уравнения (3.7) есть

$$\psi_{11}(\chi) = C_{11}I(\chi_0, \chi, q) + C_{21}, \quad n = \frac{3}{2}, \quad l = 1, \quad \chi = \vartheta/\Delta^{3/2}$$

Из отвечающих разным n решений уравнения (3.5) для течения с критической внутренней и докритической внешней струями пригодно лишь (3.6), причем при любых $l > 0$. Действительно, для внутренней струи в силу соотношений (3.4), (3.6) и условия на плоскости симметрии $\psi_1(0) = 0$ имеем $C_{21} = 0$ и

$$\psi_1(\chi) = \Delta^l \psi_{11}(\chi) = \Delta^l C_{11} \chi = C_{11} \vartheta/\Delta^{n-l}, \quad n > \frac{3}{2}, \quad l > 0 \quad (3.8)$$

Чтобы согласовать это решение для критической внутренней струи с последним решением (2.8) с $\chi = \vartheta/\Delta$ для докритической внешней струи, нужно в равенстве (3.8) положить $n - l = 1$; условия, налагаемые на n и l , такое допускают. Итак, после очевидных переобозначений получим

$$\psi_1(\chi) = C_{11}\chi, \quad \psi_2(\chi) = C_{12} \operatorname{arctg} \frac{\chi}{\beta_{e2}} + C_{22}, \quad \chi = \frac{\vartheta}{\Delta} \quad (3.9)$$

Отсюда и из равенств (2.5) и (2.11) найдем

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)_{b1} = -\frac{C_{11}\chi_b^2}{\Delta_b}, \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)_{b2} = -\frac{C_{12}\beta_{e2}V_{e2}}{\Delta_b} \quad (3.10)$$

Из соотношений (3.9) и (3.10) и условий (3.1) для определения χ_b получим уравнение

$$(1-m)\beta_{e2}V_{e2} + m\chi_b \left(\operatorname{arctg} \frac{\chi_b}{\beta_{e2}} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (3.11)$$

При $m > V_{e2}/(1 + V_{e2})$ оно имеет единственный ограниченный положительный корень, определяющий асимптотический характер выравнивания таких струй. Если $m = V_{e2}/(1 + V_{e2})$, то корень уравнения (3.11) $\chi_b = \infty$ не представляет интереса. При $m < V_{e2}/(1 + V_{e2})$ уравнение (3.11) положительных корней не имеет.

Если для внешней струи взять первое решение (2.8) ($n < 1$), то в рамках аналогичного подхода состыковать с ним решение $\psi_1(\chi)$ (3.4) не удастся ни при каких m и $V_{e2} < 1$. Для $\psi_{02} \equiv 0$ при $\psi_{01} \neq 0$ решения, удовлетворяющего последнему условию (3.1), не существует ни при каких m и $V_{e2} < 1$.

Две критические струи. Согласно сказанному в начале разд. 2, анализ кусочно-однородных струй газа с одинаковыми физическими свойствами и равными крити-

ческими давлениями сводится к анализу однородной струи. Поэтому рассмотрим струи разных газов, например, совершенных с показателями адиабаты κ_1 и κ_2 . При этом $p_{*1} = p_{*2} = 1$, и из всех решений (2.8) и (2.13), дающих ограниченные ψ_1 и ψ_2 , пригодно только последнее решение (2.13) ($n = 3/2$), для которого на тангенциальном разрыве $(d\vartheta/dp)_b = 3\chi_b\Delta_b^{1/2}/2$. Отсюда и из соотношений (2.11) и (2.13) с учетом части условий (3.1) получим

$$\psi_{01} = C_{11}I(0, \chi, q_1), \quad \psi_{02} = C_{12}I(\chi_b, \chi, q_2) + m, \quad \left(\frac{dx}{dp}\right)_{bk} = -\frac{9C_{1k}}{4\Delta_b^{1/2}}(\chi_b^2 + q_k^2)^{1/6}, \quad \chi = \frac{\vartheta}{\Delta^{3/2}}$$

Записав с учетом этого последнее условие (3.1) с постоянными интегрирования C_{11} и C_{12} , определенными из еще не использованных условий (3.1), придем к уравнению

$$\varphi(\chi_b) \equiv mI(\chi_b, \infty, q_2) - (1 - m)I(0, \chi_b, q_1)\xi_1(\chi_b) = 0, \quad \xi_j(\chi_b) = \left(\frac{\chi_b^2 + q_{j+1}^2}{\chi_b^2 + q_j^2}\right)^{1/6} \quad (3.12)$$

Левая часть уравнения (3.12) – непрерывная функция χ_b . При изменении χ_b от 0 до ∞ она убывает от положительного значения $mI(0, \infty, q_2)$ до отрицательного $(m - 1)I(0, \infty, q_1)$. Следовательно, это уравнение имеет хотя бы один корень χ_b , $0 < \chi_b < \infty$, причем χ_b растет от 0 до ∞ при увеличении m от 0 до 1. Если $q_1 \geq q_2$, то монотонность убывания доказывается практически сразу и корень один. При $q_1 < q_2$ доказательство единственности корня осложняется убыванием множителя $\xi_1(\chi_b)$. Этот множитель, однако, если и возрастает, то незначительно. Так, для совершенных газов с предельными значениями показателей адиабаты: $\kappa_1 = 5/3$ и $\kappa_2 = 1$ он при изменении χ_b от 0 до ∞ увеличивается от 1 до 1.096. Малый его рост не изменяет монотонного уменьшения $\varphi(\chi_b)$ и вывод о единственности корня уравнения (3.12) остается в силе. Вне зависимости от числа корней сохраняют справедливость (с иными множителями при $\Delta_0^{1/2}$ или $\vartheta_0^{1/3}$) формулы (2.16), определяющие конечную абсциссу сечения выравнивания струй по давлению, углу наклона скорости и числу Маха.

Три критические струи. Аналогичным образом можно рассмотреть случай трех критических струй газов, различающихся физическими свойствами (для совершенных газов – показателями адиабаты). Как и в предыдущем случае, течение в каждой струе описывается последним решением (2.13) ($n = 3/2$). Пусть m_1 и m_2 – заданные значения функции тока на первом (ближайшем к плоскости симметрии) и на втором тангенциальном разрыве ($0 \leq m_1 \leq m_2 \leq 1$), а $\chi_{b1} \leq \chi_{b2}$ – отвечающие им значения переменной χ . Тогда для определения χ_{b1} и χ_{b2} аналогично уравнению (3.12) получим два уравнения

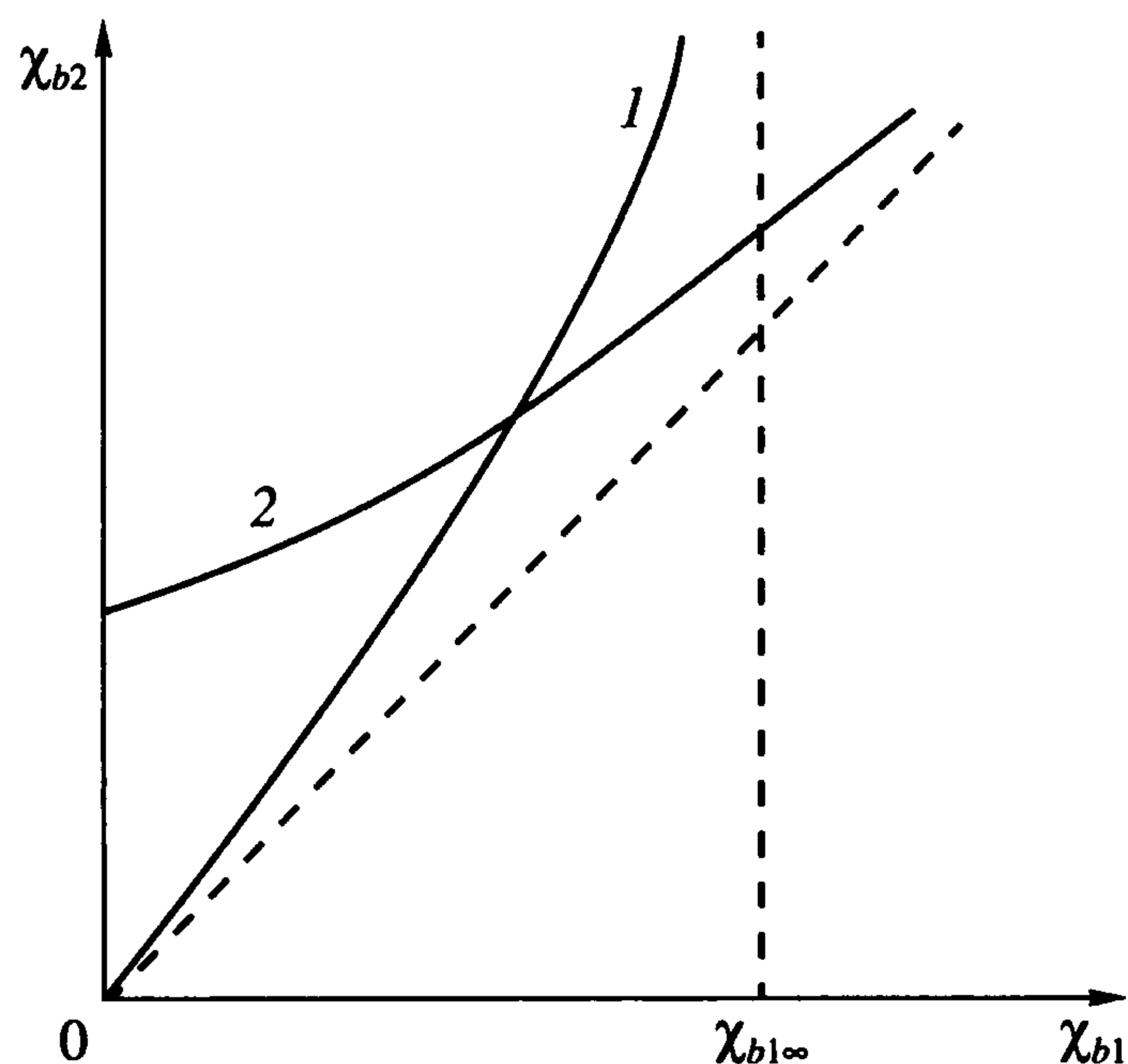
$$\begin{aligned} \varphi_1(\chi_{b1}, \chi_{b2}) &\equiv m_1I(\chi_{b1}, \chi_{b2}, q_2) - (m_2 - m_1)I(0, \chi_{b1}, q_1)\xi_1(\chi_b) = 0 \\ \varphi_2(\chi_{b1}, \chi_{b2}) &\equiv (m_2 - m_1)I(\chi_{b2}, \infty, q_3) - (1 - m_2)I(\chi_{b1}, \chi_{b2}, q_2)\xi_2(\chi_b) = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выпишем также их следствие

$$\varphi_3(\chi_{b1}, \chi_{b2}) \equiv m_1I(\chi_{b2}, \infty, q_3) - (1 - m_2)I(0, \chi_{b1}, q_1)\xi_1(\chi_b)\xi_2(\chi_b) = 0 \quad (3.14)$$

которое, как и следовало ожидать, сводится к уравнению (3.12) при "удалении" средней струи. Последнее достигается, если в уравнении (3.14) положить

$$m_1 = m_2 = m, \quad \chi_{b1} = \chi_{b2} = \chi_b$$



Фиг. 2

а затем заменить q_3 на q_2 . При таком удалении средней струи ($m_1 = m_2$, $\chi_{b1} = \chi_{b2}$) второе уравнение (3.13) удовлетворяется тождественно. Уравнение (3.12) можно получить также из первого уравнения (3.13), если положить в нем

$$m_1 = m, \quad m_2 = 1, \quad \chi_{b1} = \chi_b, \quad \chi_{b2} = \infty$$

Переход от трех к двум струям можно осуществить и с помощью соответствующих замен во втором уравнении (3.13).

Пусть m_1 и m_2 заданы, причем $0 < m_1 < m_2 < 1$. Тогда при изменении χ_{b1} от 0 до любого $\chi_{b2} > 0$ меняет знак $\varphi_1(\chi_{b1}, \chi_{b2})$ — левая часть первого уравнения (3.13), непрерывная функция χ_{b1} и χ_{b2} . Если же $\chi_{b2} = 0$, то одновременно $\chi_{b1} = 0$, а если $\chi_{b2} \rightarrow \infty$, то $\chi_{b1} \rightarrow \chi_{b1\infty} < \infty$. Поэтому в плоскости χ_{b1}, χ_{b2} , в которой области допустимых значений отвечает верхняя половина первого квадранта ($0 \leq \chi_{b1} \leq \chi_{b2} \leq \infty$), выходящая из начала координат и располагающаяся над прямой $\chi_{b1} = \chi_{b2}$ линия решений первого уравнения (3.13): $\varphi_1(\chi_{b1}, \chi_{b2}) = 0$ при заданных m_1 и m_2 уходит в бесконечность по χ_{b2} , имея вертикальную асимптоту (кривая 1 на фиг. 2).

При изменении χ_{b2} от любого $\chi_{b1} \geq 0$ до ∞ меняет знак $\varphi_2(\chi_{b1}, \chi_{b2})$ — левая часть второго уравнения (3.13), причем $0 < \chi_{b2} < \infty$ при $\chi_{b1} = 0$ и $\chi_{b2} \rightarrow \infty$ при $\chi_{b1} \rightarrow \infty$. Поэтому также располагающаяся над прямой $\chi_{b1} = \chi_{b2}$ линия решений второго уравнения (3.13): $\varphi_2(\chi_{b1}, \chi_{b2}) = 0$ при заданных m_1 и m_2 , начинаясь на оси ординат, уходит в бесконечность и по χ_{b1} , и по χ_{b2} (кривая 2 на фиг. 2). Точка пересечения кривых 1 и 2 дает решение обоих уравнений (3.13).

Справедливость вывода о корнях системы (3.13) подтвердило и ее численное решение. При этом решалась обратная задача. Для разных показателей адиабаты κ_1 , κ_2 и κ_3 в согласии с последней формулой (2.10), находились q_1^2 , q_2^2 и q_3^2 . Затем для χ_{b1} и χ_{b2} , принадлежащих верхней половине первого квадранта плоскости χ_{b1}, χ_{b2} и следовательно, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq \chi_{b1} \leq \chi_{b2} \leq \infty$$

по формулам (3.6) строились поверхности $m_1 = m_1(\chi_{b1}, \chi_{b2})$ и $m_2 = m_2(\chi_{b1}, \chi_{b2})$. В согласии со сказанным ранее, во всех рассчитанных примерах построенные поверхности удовлетворяли условиям $0 < m_1 \leq m_2 < 1$ с равенством только при $\chi_{b1} = \chi_{b2}$.

Таким образом, выравнивание по p и ϑ трехслойной критической струи, как и двухслойной, происходит на конечном расстоянии от среза насадка.

4. Заключение. Выполненный анализ практически без изменений переносится на другие струйные задачи. В этом смысле наиболее проста рассматривавшаяся ранее [5, 8–10] задача натекания однородной потенциальной звуковой струи на симметричное клиновидное препятствие и ее кусочно-потенциальное обобщение. Несколько сложнее задачи несимметричного истечения с заранее неизвестным и неопределяемым в рамках использованного подхода углом наклона выровнявшейся струи θ_e . Однако для анализа предельных свойств знание θ_e не требуется. Достаточно положить $\vartheta = \theta_e - \theta$, а также учесть, что при отсутствии плоскости симметрии постоянные интегрирования находятся из условий на двух внешних границах струи. В то же время пример разд. 3 с внутренней критической и внешней докритической струями указывает на возможную ограниченность развитого подхода.

Автор благодарит Л.В. Овсянникова за стимулирующую оценку, а С.Е. Видюкову, К.С. Реента и К.С. Пьянкова – за помощь и обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01211 и 02-01-00422) и в рамках Государственной программы поддержки ведущих научных школ (00-15-99039).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С.А. О газовых струях. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 144 с.
2. Руднев Ю.В. О некоторых плоскопараллельных установившихся движениях газа // Теоретическая гидромеханика / Под ред. Л.И. Седова. М.: Оборонгиз, 1949. № 4. Вып. 1. С. 19–35.
3. Овсянников Л.В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода // ПММ. 1949. Т. 13. Вып. 5. С. 537–542.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
5. Шифрин Э.Г. К задаче обтекания бесконечного клина сверхзвуковой струей // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 103–106.
6. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
7. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
8. Крайко А.Н., Мунин С.А. О натекании звуковой струи на клиновидные препятствия // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 413–417.
9. Газовая динамика. Избранное. Т. 2 / Ред. А.Н. Крайко и др. М.: Физматлит, 2001. 768 с.
10. Шифрин Э.Г. Потенциальные и вихревые трансзвуковые течения идеального газа. М.: Физматлит, 2001. 319 с.
11. Gilbarg D., Shiffman M. On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // J. Rat. Mech. and Analysis. 1954. V. 3. № 2. P. 209–230.
12. Крайко А.Н. Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 941–950.
13. Крайко А.Н. Некоторые проблемы и задачи околозвуковой и трансзвуковой газовой динамики // Аннот. докл. 8-го Всерос. съезда по теорет. и прикл. механике. Пермь: УрО РАН, 2001. С. 363–364.
14. Munk M.M., Prim R.C. On the canonical form of the equations of steady motion of a perfect gas // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. № 10. P. 957–958.
15. Крайко А.Н., Ланюк А.Н. О влиянии неравномерностей полей полной энтальпии и энтропии на интегральные характеристики сопла Лавалья // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976. № 3. С. 102–109.