

УДК 531.36

© 2003 г. Л.З. Фишман

**ОБ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ ГРАНИЦАХ
ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СЛУЧАЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ
И ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ**

В развитие полученных ранее результатов [1–6] дается критерий опасных и безопасных участков границы областей устойчивости состояний равновесия систем с запаздыванием, в случае, когда характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых и один нулевой корень.

Задачи, связанные с определением опасных и безопасных границ области устойчивости (ГОУ) состояний равновесия систем с запаздыванием рассматривались ранее [1–11]. Были даны [7–11] способы и алгоритмы исследования устойчивости систем с запаздыванием в критических случаях, основанные на сведении их к укороченным системам без запаздывания. Получены [1–4] формулы для величины, подобной первой ляпуновской для уравнений первого и второго порядка с запаздыванием, в случае систем второго и произвольного порядка с запаздыванием. Для систем с запаздыванием приведен [5] критерий опасных и безопасных ГОУ в одном простейшем случае пары чисто мнимых и одного нулевого корня. Вместе с тем в указанных исследованиях не было найдено достаточно простых и удобных критериев опасных и безопасных ГОУ состояний равновесия систем с запаздыванием в общем случае пары чисто мнимых и одного нулевого корня, какие имеются для систем без запаздывания [12].

Рассмотрим систему с запаздыванием, описываемую уравнением

$$\ddot{x} = a_1 x + b_1 x(t - \tau) + a_2 \dot{x} + b_2 \dot{x}(t - \tau) + f(x, \dot{x}, x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)) \quad (1)$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 – постоянные, $t > 0$.

Предположим, что аналитическая или достаточно гладкая функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ разлагается в ряд

$$f = \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{ik} x_i x_k + \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq 4} a_{ikp} x_i x_k x_p + \dots$$

где a_{ik}, a_{ikp} – постоянные коэффициенты.

Допустим, что характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ -a_1 - b_1 e^{-p\tau} & p - a_2 - b_2 e^{-p\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

имеет корни $p_1 = 0, p_{2,3} = \pm i\omega$ и корни p_j , удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$, что возможно в том и только в том случае, если выполняются следующие условия:

$$a_1 + b_1 = 0$$

$$-\omega^2 - a_1 - b_1 \cos(\omega\tau) - \omega b_2 \sin(\omega\tau) = 0 \quad (3)$$

$$-\omega a_2 + b_1 \sin(\omega\tau) - \omega b_2 \cos(\omega\tau) = 0$$

относительно коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 линейной части уравнения (1), входящих в уравнение (2).

Следуя описанной ранее методике [7, 8], запишем для уравнения (1) укороченную систему третьего порядка без запаздывания

$$\dot{y}_j = p_j y_j + \Phi(y_1, y_2, y_3), \quad j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

где

$$\Phi = g_1 y_1^2 + B_{12} y_1 y_2 + B_{23} y_2 \bar{y}_2 + B_{13} y_1 \bar{y}_2 + B_{22} y_2^2 + B_{33} \bar{y}_2^2 + g_2 y_1^3$$

y_1 – действительная, $y_2, \bar{y} = y_3$ – комплексно-сопряженные переменные.

Здесь

$$g_1 = \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{ik} \alpha_{i1} \alpha_{k1}, \quad g_2 = \sum_{1 \leq i \leq k \leq p \leq 4} a_{ikp} \alpha_{i1} \alpha_{k1} \alpha_{p1}$$

$$B_{rq} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{ik} (\alpha_{ir} \alpha_{kq} + \alpha_{iq} \alpha_{kr}) (r = 1, q = 2; r = 1, q = 3; r = 2, q = 3) \quad (5)$$

$$B_{rr} = \sum_{1 \leq i \leq k \leq 4} a_{ik} \alpha_{ir} \alpha_{kr}, \quad r = 2, 3$$

$$\alpha_{ij} = \Delta_{2i}(p_j) / \Delta'(p_j), \quad 1 \leq i \leq 2, \quad 1 \leq j \leq 3 \quad (6)$$

$$\alpha_{ij} = \exp(-p_j \tau) \alpha_{i-2,j}, \quad 3 \leq i \leq 4, \quad 1 \leq j \leq 3 \quad (7)$$

$$\Delta'(p_j) = 2p_j + \exp(-p_j \tau) (\tau b_1 + \tau p_j b_2 - b_2) - a_2 \quad (8)$$

$\Delta_{2i}(p_j)$ – алгебраические дополнения элементов второй строки и i -го столбца определителей $\Delta(p_j)$.

Если система (4) имеет опасную (безопасную) границу, то и система, описываемая уравнением (1), имеет опасную (безопасную) границу [7, 8].

После приведения к нормальной форме [13] система (4) приобретает вид

$$\dot{u} = g_1 u^2 + B_{23} z \bar{z} + g_2^* u^3, \quad \dot{z} = i\omega z + B_{12} u z \quad (9)$$

где

$$g_2^* = g_2 + g_1 (B_{13} - B_{12}) / (i\omega) \quad (10)$$

Величины $g_1, g_2, B_{12}, B_{13}, B_{23}$ определяются формулами (5).

Из соотношений (9), (10) следует [5, 12], что если $g_1 \neq 0$, то ГОУ системы, описываемой уравнением (9), опасная. Также она опасная, если $g_1 = 0$, но или $g_2 > 0$, или $B_{23} \operatorname{Re} B_{12} > 0$, и безопасная, если $g_1 = 0, g_2 < 0$ и $B_{23} \operatorname{Re} B_{12} < 0$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -\frac{\pi}{2} \dot{x}(t-1) + a_{11} x^2 + a_{12} x \dot{x} + a_{13} x x(t-1) + a_{14} x \dot{x}(t-1) + a_{111} x^3 \quad (11)$$

Оно имеет вид уравнения (1).

Характеристическое уравнение имеет корни $p_1 = 0, p_{2,3} = \pm i\pi/2, p_j (j = 4, 5, \dots)$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{Re} p_j < -\sigma < 0$ [10].

Так как для уравнения (11) $a_1 = a_2 = b_1 = 0$, $b_2 = -\pi/2$, $\omega = \pi/2$, простой проверкой убеждаемся, что условия (3) для уравнения (11) выполнены.

Величина $\Delta'(p_j) = 2p_j = (\pi/2)\exp(-p_j)(1 - p_j)$

Найдем величину g_1 для уравнения (11). Из формул (5)–(8) имеем

$$g_1 = (a_{11} + a_{13})/s^2, \quad s = \pi/2$$

Если $g_1 \neq 0$, т.е. $a_{11} + a_{13} \neq 0$, ГОУ состояния равновесия $x = 0$ уравнения (11) опасная [5].

Рассмотрим случай, когда

$$g_1 = (a_{11} + a_{13})/s^2 = a_{12} = a_{14} = 0, \quad a_{11} \neq 0$$

В этом случае характер ГОУ состояния равновесия $x = 0$ уравнения (11), как было указано выше, определяется знаками величин $R = B_{23}\text{Re}B_{12}$ и g_2 .

Из формул (5)–(8) получаем

$$B_{12} = a_{11} \frac{s^2 - s - i(2 + s^2 - s)}{s^2(s^2 + 1)}, \quad \text{Re}B_{12} = a_{11} \frac{s^2 - s}{s^2(s^2 + 1)}, \quad B_{23} = 2a_{11} \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$$

Теперь заключаем, что

$$R = B_{23}\text{Re}B_{12} = 2a_{11}^2 \frac{s^2 - s}{s^4(s^2 + 1)} > 0$$

Из выражений (5) для уравнения (11) получаем, что

$$g_2 = a_{111}\alpha_{11}^3 = a_{111}/s^3$$

Из полученных ранее результатов [12] следует, что в случае $g_1 = 0$, $R > 0$, $a_{111} \neq 0$ ГОУ состояния равновесия $x = 0$ уравнения (11) опасная.

Теперь предположим, что

$$a_{11} + a_{13} = 0, \quad a_{12} \neq 0, \quad a_{14} \neq 0$$

Для уравнения (11) из формул (5) имеем

$$B_{rq} = 2a_{11}\alpha_{11}\alpha_{1q} + a_{12}(\alpha_{1r}\alpha_{2q} + \alpha_{1q}\alpha_{2r}) + a_{13}(\alpha_{1r}\alpha_{3q} + \alpha_{3r}\alpha_{1q}) + a_{14}(\alpha_{1r}\alpha_{4q} + \alpha_{4r}\alpha_{1q}) \quad (12)$$

$$r = 1, \quad q = 2; \quad r = 2, \quad q = 3$$

где согласно формулам (6)–(8)

$$\alpha_{22} = \frac{1 - is}{s^2 + 1}, \quad \alpha_{23} = \frac{1 + is}{s^2 + 1}, \quad \alpha_{42} = \frac{-s - i}{s^2 + 1}, \quad \alpha_{43} = \frac{-s + i}{s^2 + 1} \quad (13)$$

Из выражений (12), (13), учитывая, что $a_{11} + a_{13} = 0$, получаем

$$\text{Re}B_{12} = a_{11} \frac{s - 1}{s(s^2 + 1)} + a_{12} \frac{1}{s(s^2 + 1)} - a_{14} \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$B_{23} = \frac{2a_{11}}{s^2(s^2 + 1)} + 2a_{12} \frac{s + 1}{s^2 + 1} + 2a_{14} \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

В зависимости от величины коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{14} в случае $a_{11} + a_{13} = g_1 = 0$, величина R может быть больше или меньше нуля. Например, в случае

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0, \quad a_{14} \neq 0$$

имеем

$$R = -2a_{14}^2/(s(s^2 + 1)^2) < 0$$

откуда следует, что в этом случае ГОУ состояния равновесия $x = 0$ уравнения (11) безопасная при $a_{111} < 0$ и опасная при $a_{111} > 0$.

Автор благодарит Ю.И. Неймарка за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке программы Министерства образования РФ "Университеты России – фундаментальные исследования" (992870).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фишман Л.З. О рождении периодического решения у систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1976. № 12. С. 96–107.
2. Фишман Л.З. Критерий определения опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1987. № 10. С. 185–187.
3. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае нулевого корня // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 10. С. 1830–1832.
4. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ для уравнений с запаздыванием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. 3-й конф. Нижний Новгород, 1993. С. 190.
5. Фишман Л.З. Определение опасных и безопасных границ области устойчивости систем с запаздыванием в случае двух пар чисто мнимых корней и в случае одного нулевого корня и пары чисто мнимых корней // Динамика систем. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. С. 90–100.
6. Фишман Л.З. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости уравнений с запаздыванием // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 706–713.
7. Осипов Ю.С. О принципе сведения в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 810–820.
8. Шиманов С.Н. Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последствием // Сиб. мат. ж. 1962. Т. 2. № 3. С. 476–480.
9. Колесов Ю.С., Швитра Д.И. Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Моклес, 1979. 146 с.
10. Hassard B.D., Kasarinoff N.D., Wan Y.-H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation. Cambridge: Univ. Press, 1981 = Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
11. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. N. Y., etc.: Springer, 1977 = Хейл Дж.К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
12. Хазин Л.Г., Шноль Э.Э. Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: ОНТИ АН СССР, 1985. 215 с.
13. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 255 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
27.XI.2001