

УДК 539.3:629.7

© 2003 г. Г. Е. Якунина

ДИНАМИКА ПИРАМИДАЛЬНЫХ ТЕЛ В РАМКАХ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Исследуется плоское инерционное движение пирамидальных тел в среде в предположении, что силовое воздействие среды на их поверхности описывается моделью локального взаимодействия. При безотрывном обтекании тел и малых возмущениях, наложенных в начальный момент времени на параметры прямолинейного движения, построено аналитическое решение задачи плоского движения тонких тел, контур основания которых ромб или звезда, состоящая из четырех симметричных циклов. Показано, что на основе решения можно выполнить полный параметрический анализ динамики тела и рассчитать силы и момент, действующие на тело вдоль его траектории. Найден критерий устойчивости движения, позволяющий при известных скорости, массе и положении центра тяжести тела определить характер возмущенного движения пирамидального тела. Показано, что форма тела – один из важнейших факторов, влияющих на устойчивость движения, и что при одинаковой форме и одинаковом положении центра масс большим запасом устойчивости обладают тела с меньшей массой. Апробация аналитических результатов проведена на основе численного решения задачи Коши системы уравнений движения, полученного без упрощающих предположений.

Задачи оптимизации формы тела (по сопротивлению и глубине проникания) в рамках модели локального взаимодействия (МЛВ) [1–3] были решены [4–7] при заданных площади основания и длине тела без упрощающих предположений относительно его геометрии. Показано, что тела минимального сопротивления [4–6] и тела максимальной глубины проникания [7] образуются участками поверхностей, нормаль которых составляет с направлением движения оптимальный угол, определяемый характеристиками среды и начальной скоростью движения. Было показано [7], что в общем случае оптимальные углы для тел максимальной глубины проникания и тел минимального сопротивления различаются. Был предложен [4–6] метод построения оптимальных форм, позволяющий конструировать бесконечное множество оптимальных конфигураций, в том числе и пирамидальных, составленных из участков плоскостей, касательных к оптимальному конусу.

Оптимальные формы [4–7] строились при прямолинейном движении тела. Движение тела в реальной среде может быть возмущенным, и тогда, как показали результаты исследований динамики тонких осесимметричных тел [8–10], скорость центра масс тела может сильно отклоняться от своего начального направления, а траектория движения тела иметь изогнутый вид. Рост возмущений может привести к опрокидыванию тела, и тогда достижение теоретически предсказываемой глубины проникания невозможно. Таким образом, построенные тела [4–7] перспективны для получения оптимальных характеристик только в случае, если их прямолинейное движение устойчиво к малым возмущениям начальных значений параметров.

Исследование влияния возмущений на характеристики движения тела и поиск критерия его устойчивости – важные этапы исследования свойств оптимальных тел. Полное решение задачи динамики тела с построением траектории движения дает возможность точно решить возникшую проблему. Однако даже в случае плоского движения тонких тел вращения эта задача многопараметрическая, и ее аналитическое решение было найдено [8, 9] лишь для тонкого

конуса и для режима безотрывного обтекания его средой. Наличие зон отрыва среды на поверхности тела усложняет задачу, и в этом случае ее аналитическое исследование ограничивалось [10] анализом устойчивости движения тела на его начальном этапе. В результате численных исследований задачи динамики тела было показано [3], что ее решение в рамках МЛВ можно найти при любых начальных условиях и без ограничений на режим движения тела. Однако численное решение, представляя несомненную ценность, не позволяет выявить общие закономерности движения.

Ниже в рамках МЛВ численно и аналитически исследуется плоское инерционное движение пирамидальных тел, сформированных, как и оптимальные тела [4–7], из участков плоскостей, касательных к круговому конусу.

1. Модель взаимодействия среды и тела. Рассмотрим движение тела в среде по инерции, предполагая, что в начальный момент времени тело полностью погружено в среду и влиянием ее свободной поверхности на движение тела можно пренебречь.

Силу воздействия среды на тело запишем в виде

$$\mathbf{F} = \iint_S [\sigma_n \mathbf{n} + \sigma_\tau \boldsymbol{\tau}] dS \quad (1.1)$$

где σ_n и σ_τ – нормальное и касательное напряжения на поверхности тела, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные векторы внутренней нормали и касательной к элементу поверхности, а интегрирование ведется по поверхности контакта среды и тела S .

Считаем, что каждый элемент поверхности S взаимодействует со средой независимо от других участков тела, и силовое воздействие на него можно описать локальной моделью. Для записи нормального напряжения используем двучленную формулу, содержащую динамический и прочностной члены, а трение на поверхности тела считаем постоянным:

$$\sigma_n = A_1 (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})^2 + C_1, \quad \sigma_\tau = C_2 \quad (1.2)$$

Положительные коэффициенты A_1 , C_1 и C_2 – постоянные параметры модели, определяемые характеристиками среды, $\mathbf{U}$ – полная скорость элемента поверхности: $\mathbf{U} = \mathbf{U}_c + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$, где $\mathbf{U}_c$ – скорость центра масс тела, $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость вращения тела, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор элемента с началом в центре масс.

Модель (1.2) – это частный случай записи напряжений в рамках МЛВ, и было показано [11], что при определенных допущениях выражениями (1.2) описываются напряжения на поверхности тела при его движении в газе и плотных средах типа грунтов и металлов. Слагаемое C_1 в этом случае характеризует сопротивляемость среды деформированию, а коэффициент A_1 имеет порядок плотности среды. Модель с постоянным трением (1.2) часто используется при расчете сил, действующих на тело, проникающее в упругопластические среды [10], и тогда $C_2 = \tau_s$, где τ_s – пластическое трение. Для конкретных сред значения A_1 , C_1 и C_2 берутся либо из решения модельных задач [1–3], либо определяются экспериментально. Например, для глинистых сред, согласно решению, полученному для несжимаемой упругопластической среды [3], можно принять

$$A_1 = 3\rho_0/2, \quad C_1 = 4\tau_s(1 + \ln(\mu/\tau_s))/3, \quad C_2 = \tau_s \quad (1.3)$$

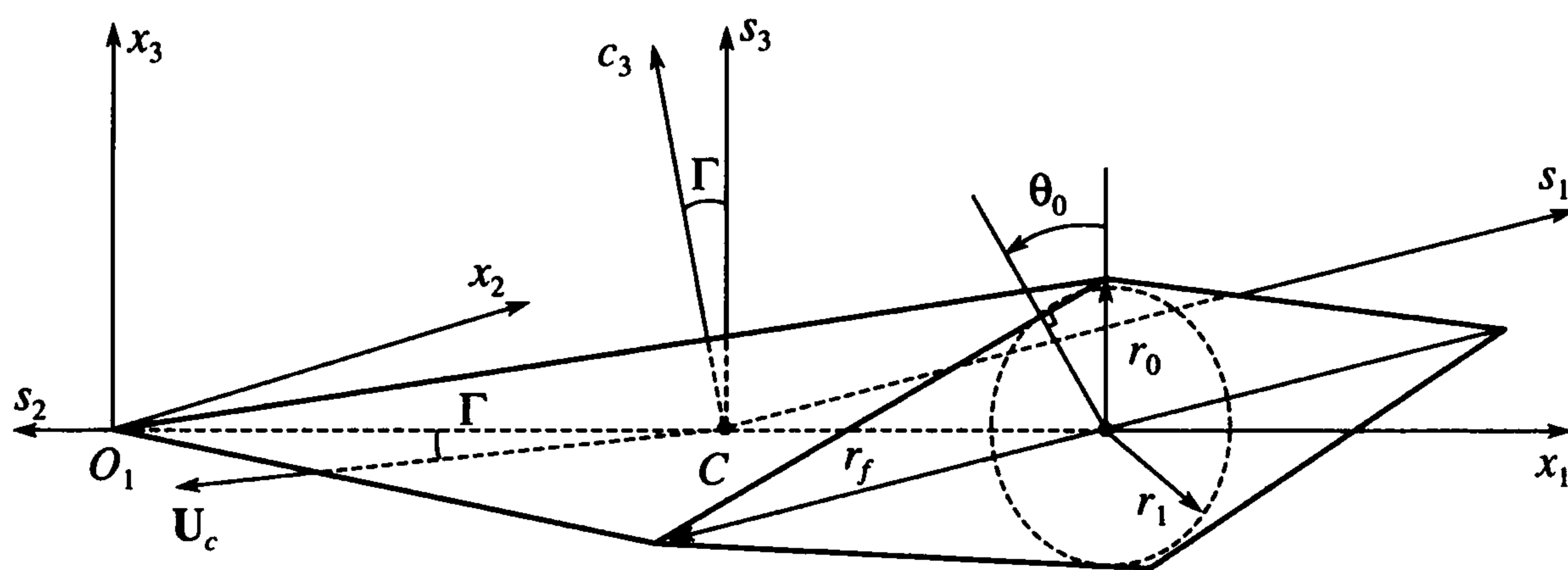
где ρ_0 – плотность среды, μ – модуль сдвига.

В рамках МЛВ вектор $\boldsymbol{\tau}$ компланарен векторам $\mathbf{U}$ и $\mathbf{n}$:

$$\boldsymbol{\tau} = [[\mathbf{U} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}] / |[\mathbf{U} \times \mathbf{n}]| \quad (1.4)$$

а поверхность S определяется условием

$$(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) \leq 0 \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Выбранная модель позволяет представить силу F (1.1) в явной зависимости от формы тела и параметров движения, куда характеристики среды входят как константы.

2. Класс исследуемых конфигураций. Форма тела считается заданной и состоящей из участков плоскостей, касательных к круговому конусу.

Уравнение поверхности конуса запишем в цилиндрической системе координат (r, θ, x_1) с началом отсчета O_1 в вершине тела и осью O_1x_1 , направленной по оси конуса, в виде

$$r = r(\theta, x_1) = r_1 x_1$$

где $r_1 = \tan \alpha_1$, а α_1 – половина угла раствора конуса. Считаем, что α_1 , а также длина тела L и площадь его основания S_b заданы и все линейные размеры отнесены к L : $x_1 \in [0, 1]$.

Класс исследуемых конфигураций ограничим пирамидальными телами с двумя и с четырьмя плоскостями симметрии и формой основания в виде ромба или симметричной четырехлучевой звезды, стороны которых принадлежат прямым, касательным к окружности с радиусом r_1 .

Пример ромбовидной конфигурации дан на фиг. 1, где плоскости $O_1x_1x_2$ и $O_1x_1x_3$ декартовой системы координат $O_1x_1x_2x_3$ – плоскости симметрии тела. Контур основания – ромб, и радиусы его вершин связаны с r_1 соотношениями

$$r_0 = r_1 / \cos \theta_0, \quad r_f = r_1 / \sin \theta_0 \quad (2.1)$$

Угол θ_0 находится по S_b из условия

$$2r_0r_f = \pi r_b^2, \quad r_b = (S_b/\pi)^{1/2}/L$$

Полагая

$$b = (R_1/R_k)^2; \quad R_1 = r_1/r_b, \quad R_k = \pi^{1/2}/2 \approx 0.89$$

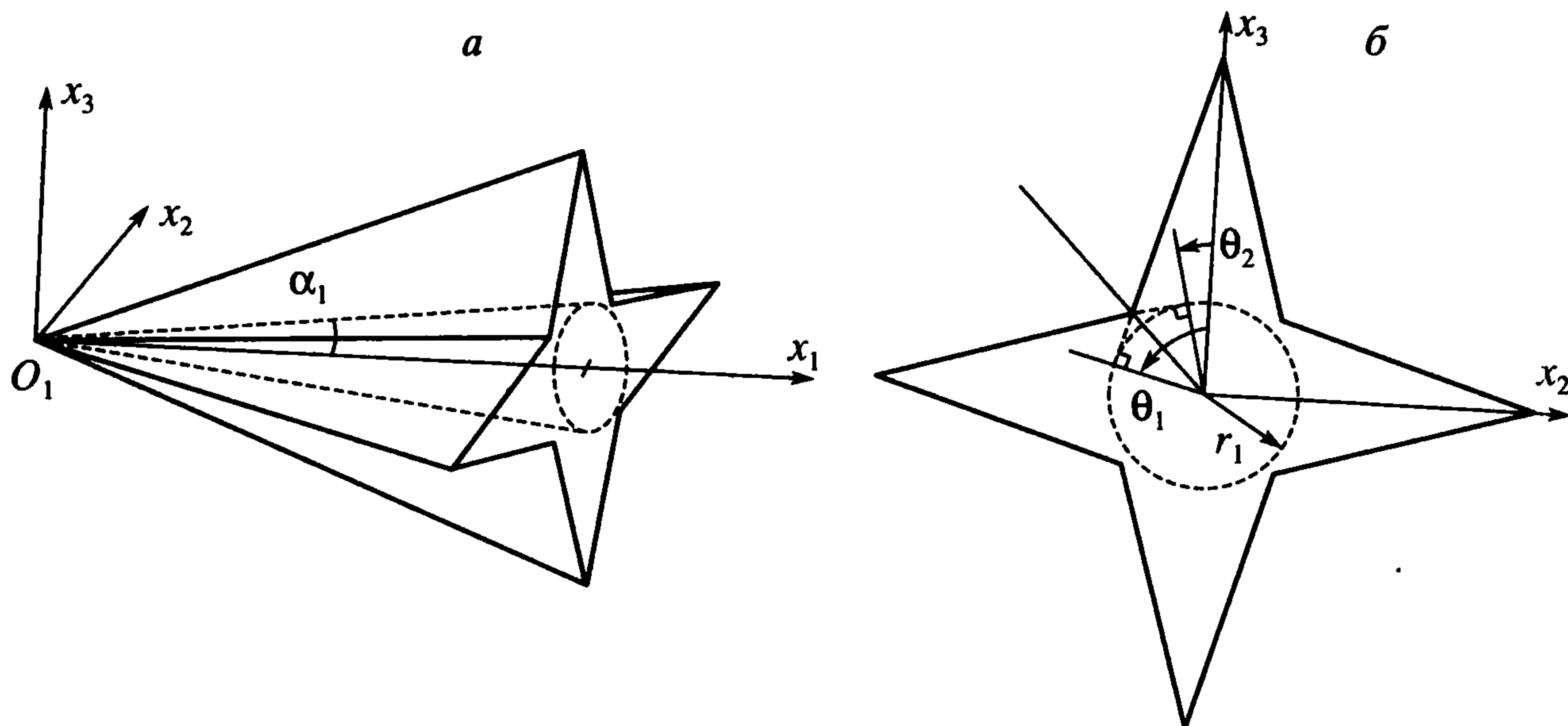
запишем θ_0 в виде

$$\theta_0 = \arccos((P/2)^{1/2}), \quad P = P_{1,2} = 1 \pm (1 - b^2)^{1/2} \quad (2.2)$$

При $b < 1$ ($R_1 < R_k$) есть два значения P : $P_1 \in [1, 2)$ и $P_2 \in (0, 1]$ и два угла θ_0 . Каждому из них соответствует ромбовидное тело, уравнение поверхности которого в системе координат (r, θ, x_1) записывается в виде

$$r = r(\theta, x_1) = \frac{\xi_1 r_1 x_1}{\cos(\theta - \xi_1 \xi_2 \theta_0)}; \quad \xi_1 = \text{sign}(\cos \theta), \quad \xi_2 = \text{sign}(\sin \theta) \quad (2.3)$$

Угол θ отсчитывается от оси O_1x_3 .



Фиг. 2

При $P = P_1$ значение $\theta_0 < \pi/4$, $r_0 < r_f$, и радиус r_f – это максимальный радиус тела (см. фиг. 1). При $P = P_2$ значение $\theta_0 > \pi/4$, $r_0 > r_f$, и максимальный радиус тела равен r_0 . Назовем конфигурацию с $r_0 < r_f$ горизонтальной, а конфигурацию с $r_0 > r_f$ – вертикальной. Каждая из этих форм получается из другой поворотом вокруг оси O_1x_1 на 90° .

Пример пирамидального тела с контуром основания в виде звезды дан на фиг. 2, а, откуда следует, что звездообразное тело формируется из участков поверхностей двух ромбовидных тел (2.3), повернутых относительно друг друга на 90° . При этом, так как тело строится при заданной площади его основания S_b , угол θ_0 для вертикальной и горизонтальной конфигураций (2.3) равняется θ_1 и θ_2 соответственно (см. фиг. 2, б), где

$$\theta_1 = \arctg([1 + [1 + 4b(1 - b)]^{1/2}]/(2b)), \quad \theta_2 = \pi/2 - \theta_1 \quad (2.4)$$

Описанные построения тел возможны при $R_1 \leq R_k$, когда $b \leq 1$. При $R_1 = R_k$ значение $b = 1$ и, как следует из выражений (2.2) и (2.4), для всех форм $\theta_0 = \pi/4$. Тогда контур основания тела – квадрат, и все тела имеют одинаковую геометрию.

3. Уравнения и параметры движения тела. Предполагаем, что каждая точка тела описывает траекторию, лежащую в плоскости, параллельной плоскости симметрии тела $O_1x_1x_3$. Тогда вектор угловой скорости вращения тела Ω нормален к плоскости $O_1x_1x_3$ и имеет в системе координат $O_1x_1x_2x_3$ одну ненулевую компоненту Ω .

Пусть центр масс тела находится в точке C , расположенной на оси O_1x_1 на расстоянии C_m от вершины тела: $C_m \in (0, 1)$. Введем две правые системы координат: неподвижную – $OXYZ$, в начальный момент времени совместив ее начало с точкой C , и подвижную – $Cs_1s_2s_3$, жестко связав ее с телом.

Считаем, что ось OX направлена по оси O_1x_2 , а ось OY выбрана по направлению действия силы тяжести и составляет в начальный момент времени с вектором скорости центра масс U_c угол φ_0 . Тогда вектор U_c всегда лежит в плоскости OYZ , а положение центра масс относительно системы $OXYZ$ в момент времени t определяется двумя координатами $Y(t)$ и $Z(t)$:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{U_c}{L} \cos \varphi, \quad \frac{dZ}{dt} = \frac{U_c}{L} \sin \varphi \quad (3.1)$$

где $U_c = |U_c|$, а $\varphi = \varphi(t)$ – угол между U_c и осью OY , причем $\varphi(0) = \varphi_0$.

Оси подвижной системы координат $Cs_1s_2s_3$ свяжем с телом, расположив их в плоскости симметрии тела так, что $s_1 = x_2$, $s_2 = -x_1$ и $s_3 = x_3$, где x_1 , x_2 и x_3 – орты системы координат $O_1x_1x_2x_3$ (см. фиг. 1). Направление вектора U_c в системе координат $Cs_1s_2s_3$ определим углом Γ : $U_c = U_c\{0, \cos\Gamma, -\sin\Gamma\}$.

При плоском движении и известном распределении сил, действующих на тело, значения $U_c(t)$, $\varphi(t)$, $\Omega(t)$ и $\Gamma(t)$, как функции от t , находятся из динамических уравнений движения (см. напр. [12]), которые для тела массы m с моментом инерции I_1 относительно оси Cs_1 записывается в виде

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{F_2}{m}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{F_3}{mU_c}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{M_1}{I_1}, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \Omega - \frac{F_3}{mU_c} \quad (3.2)$$

Здесь M_1 – компонента момента сил по оси s_1 , а F_2 и F_3 – компоненты результирующей силы соответственно по направлениям вектора U_c и вектора c_3 , нормального к U_c , который в связанной системе координат имеет вид: $c_3 = \{0, \sin\Gamma, \cos\Gamma\}$ (см. фиг. 1). На тело, движущееся в среде по инерции, кроме сил, действующих в результате его взаимодействия со средой, действует сила тяжести, поэтому

$$F_2 = F_{c2} + mg \cos\varphi, \quad F_3 = F_{c3} - mg \sin\varphi$$

где g – ускорение силы тяжести, а F_{c2} и F_{c3} – компоненты силы F (1.1), которые определяются с использованием модели (1.2).

Для поверхности (2.3) векторы n и U , входящие в первое выражение (1.2), и скалярное произведение $(U \cdot n)$ можно представить в форме

$$\begin{aligned} n &= (1 + \alpha^2)^{-1/2} \{ \xi_2 \sin\theta_0, -\alpha, -\xi_1 \cos\theta_0 \} \\ U &= U_c \cos\Gamma \{ 0, 1 - \omega r_b r \cos\theta, -r_b(\gamma - \omega(C_m - x_1)) \} \\ (U \cdot n) &= r_1 U_c \cos\Gamma (-1 + \omega r_b r \cos\theta + \xi_1(\gamma - \omega(C_m - x_1))/(R_0 \cos\alpha_1)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$\alpha = (n \cdot x_1) = \sin\alpha_1, \quad R_0 = r_0/r_b, \quad \gamma = \text{tg}\Gamma/r_b, \quad \omega = \Omega L/(r_b U_c \cos\Gamma)$$

(γ и ω – безразмерные параметры движения тела вокруг центра масс). Здесь и далее координаты векторов даются в связанной системе координат.

Используя соотношения (3.3) при записи выражений (1.2) и (1.4) и интегрируя в (1.1) по поверхности S (1.5), силу F и ее компоненты можно выразить как функции от переменных U_c , Γ и Ω . Систему уравнений (3.2) можно проинтегрировать, если известны начальные значения U_c , φ , Ω и Γ . Однако если допустить возможность отрыва среды с боковой поверхности тела, то поверхность S будет определяться в процессе решения задачи, и в этом случае интегрирование системы можно выполнить лишь численно.

Программа расчета динамики пирамидального тела (2.3), основанная на решении задачи Коши системы уравнений движения (3.1) и (3.2) без ограничений на режим движения тела, была написана, и расчеты, полученные по ней, используются ниже в разд. 7 для апробации аналитических результатов, найденных в разд. 4–6 при упрощающих предположениях.

4. Основные предположения теории. Аналитическое решение системы уравнений (3.1) и (3.2) построим для тонких тел ($r_b^2 \ll 1$) в предположении, что нет отрыва среды с боковой поверхности тела. Тогда поверхность интегрирования S в (1.1) – это вся поверхность тела (2.3). На ней должно выполняться условие (1.5), из которого с учетом (3.3) получаем ограничения на γ и ω

$$|\gamma - \omega C_m| \leq R_0, \quad |\gamma + \omega(1 + r_0^2 - C_m)| \leq R_0 \quad (4.1)$$

Величина R_0 для звездообразных тел находится по r_0 (2.1) с $\theta_0 = \theta_2$ (2.4). Отсюда следует, что $|\gamma| \leq R_0$, $|\omega| \leq 2R_0$, и если дополнительно предположить, что

$$r_0^2 \ll 1 \quad (4.2)$$

то выражения (3.3) и вектор τ (1.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \{\xi_2 \sin \theta_0, -\alpha, -\xi_1 \cos \theta_0\} \\ \mathbf{U} &= U_c \{0, 1, -\beta(\gamma - \omega(C_m - x_1))\} \\ (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) &= \alpha U_c [-1 + \xi_1(\gamma - \omega(C_m - x_1))/R_0] \\ \tau &= -\mathbf{u} - \alpha[1 - \xi_1(\gamma - \omega(C_m - x_1))/R_0]\mathbf{n}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{U}/U_c \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$\gamma = \Gamma/\beta, \quad \omega = \Omega L/(\beta U_c)$$

β – половина угла раствора кругового конуса длины L с площадью основания S_b : $\beta = \arctg r_b \approx r_b$ ($\beta^2 \ll 1$).

С учетом сделанных предположений, взяв за независимую переменную длину траектории центра масс: l : $dl = (U_c/L)dt$, уравнения (3.2) перепишем относительно переменных U_c , ϕ , γ и ω

$$\frac{dU_c}{dl} = f_2 U_c, \quad \frac{d\phi}{dl} = f_3, \quad \frac{d\gamma}{dl} = \omega - \frac{f_3}{\beta}, \quad \frac{d\omega}{dl} = \frac{m_1}{i_1 \beta} - \omega f_2; \quad i_1 = \frac{I_1}{mL^2} \quad (4.4)$$

Безразмерные величины m_1 , f_2 и f_3 определены через компоненты M_1 , F_2 и F_3 :

$$m_1 = M_1/N, \quad f_2 = F_2 L/N, \quad f_3 = F_3 L/N; \quad N = mU_c^2$$

Пренебрегая силой тяжести и используя соотношения (4.1)–(4.3) при вычислении момента и компонент $\mathbf{F}$ (1.1), величины m_1 , f_2 и f_3 можно записать в виде

$$\begin{aligned} m_1 &= -A_m P_f \beta [\gamma z_f + \omega(z_c z_f + E_2/18)] \\ f_2 &= -A_m \alpha^2 (1 + D + [\gamma(\gamma + \omega z_c) + (\gamma + \omega z_c)^2/2 + \omega^2/36] P_f/R_1^2) \\ f_3 &= A_m P_f \beta (\gamma E_1 + \omega z_c E_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Использованы обозначения

$$\begin{aligned} A_m &= 3A_1/\rho_m, \quad z_c = \frac{2}{3} - C_m, \quad z_f = z_c E_2 + 2\alpha^2/(3P_f) \\ D &= D_1 + D_2, \quad D_1 = C_1/(A_1 U_c^2 \alpha^2), \quad D_2 = C_2/(A_1 U_c^2 \alpha^3) \\ E_1 &= 1 - \alpha^2(1 + D_1 + D_2 P_f/2)/P_f, \quad E_2 = 1 + \alpha^2 D_2 (2 - P_f)/(2P_f) \end{aligned} \quad (4.6)$$

где ρ_m – средняя плотность тела: $\rho_m = m/V$, V – объем тела, P_f – параметр формы. Для звездообразных тел $P_f = 1$, а для ромбовидных тел $P_f = P$, где P находится из второго выражения (2.2).

При прямолинейном движении $\phi = \phi_0$, $\gamma = \omega = 0$ и первое уравнение (4.4) можно записать относительно D в виде

$$dD/dl = 2A_m \alpha^2 D(1 + D) \quad (4.7)$$

Его решение дает связь D и U_c с длиной траектории центра масс:

$$\begin{aligned} l &= l_m - \ln(1 + 1/D)/(2A_m\alpha^2) \\ l_m &= \ln(1 + 1/D_0)/(2A_m\alpha^2) \\ D_0 &= D(U_0) = (C_1 + C_2/\alpha)/(A_1 U_0^2 \alpha^2) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь l_m – полная длина пути, U_0 – начальная скорость движения тела.

При движении тела в среде по нормали к ее свободной поверхности l_m – это глубина проникания тела. Было показано [7], что при известной начальной скорости U_0 максимум l_m в классе тел с заданными массой, длиной и площадью основания, достигается на телах, построенных из участков поверхностей, нормаль которых составляет с направлением движения оптимальный угол. Этот угол можно найти, если рассмотреть l_m как функцию от α , где $\alpha \in [0, 1]$, и найти $\alpha = \alpha^*$, при котором $l_m(\alpha)$ достигает максимума. Значение α^* не зависит от массы, длины и площади основания тела и определяется начальной скоростью U_0 и постоянными параметрами модели (1.2).

При известных U_0 и α^* пирамидальные тела (2.3) – тела максимальной глубины проникания, если $r_1 = \alpha^*$. Однако их эффективное использование возможно, только когда их прямолинейное движение устойчиво к малым возмущениям начальных значений параметров движения тела вокруг центра масс.

5. Движение тела вокруг центра масс. Критерий устойчивости. Анализ устойчивости прямолинейного движения тела и построение решения системы уравнений (4.4) выполним при дополнительном предположении, что возмущения по γ и ω малы и удовлетворяют условию

$$(\gamma^2 + \omega^2)P_f/R_1^2 \ll 1 \quad (5.1)$$

В этом случае члены по γ и ω можно исключить из выражения для f_2 , и тогда, как и при прямолинейном движении, скорость центра масс U_c находится из соотношений (4.8).

Используя выражения (4.5) и обозначения (4.6), уравнения (4.4) для γ и ω можно переписать в виде

$$\frac{d\gamma}{dl} = -(1 - A_m P_f z_c E_2)(K_\gamma E_1 \gamma - \omega), \quad \frac{d\omega}{dl} = A_m P_f \chi (K_\omega \gamma - \omega) \quad (5.2)$$

где

$$\chi = \frac{1}{i_1} \left[z_c z_f + \frac{E_2}{18} - i_1 (1 + D) \frac{\alpha^2}{P_f} \right], \quad K_\gamma = \frac{A_m P_f}{1 - A_m P_f z_c E_2}, \quad K_\omega = -\frac{z_f}{i_1 \chi} \quad (5.3)$$

Прямолинейное движение тела устойчиво, если малые возмущения по γ и ω затухают со временем. Это будет, когда нулевое решение системы уравнений (5.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову (см., например, [13]), и все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части.

Рассматривая D , D_1 и D_2 как постоянные параметры, запишем характеристическое уравнение и условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (5.2) в виде

$$\begin{aligned} \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 &= 0 \\ b_1 &= A_m P_f (\chi + E_1) > 0, \quad b_2 = \chi (A_m P_f)^2 (E_1 - K_\omega / K_\gamma) > 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Неравенства (5.4) определяют устойчивость нулевого решения системы (5.2) в случае, когда ее коэффициенты постоянны. Зависимость D от l нарушает это условие, но если рассматривать значения D меньшие или порядка единицы, то

$$D\alpha^2/P_f \ll 1 \quad (5.5)$$

и параметры D , D_1 и D_2 можно исключить из выражений для коэффициентов.

Тогда, учитывая, что $i_1 \sim 10^{-1}$, из выражений (4.6) и (5.3) получаем, что

$$z_f = z_c + 2\alpha^2/(3P_f), \quad \chi = (z_c z_f + 1/18)/i_1, \quad E_1 = E_2 = 1 \quad (5.6)$$

и система уравнений (5.2) становится автономной. В этом случае ее решение не зависит от параметров движения центра масс, а условия устойчивости ее нулевого решения (5.4) можно записать в виде одного неравенства

$$K_\omega/K_\gamma < 1 \quad (5.7)$$

Решение системы (5.2) построим при условии (5.5) в параметрическом виде, используя переменную $\eta = \omega/\gamma$. Для η в согласии с уравнениями (5.2) и соотношениями (5.6) запишем уравнение

$$d\eta/dl = -(1 - A_m P_f z_c) \Phi(\eta), \quad \Phi(\eta) = \eta^2 + K_\gamma(\chi - 1)\eta - \chi K_\omega K_\gamma$$

При $\Lambda \neq 0$, где Λ – дискриминант характеристического уравнения (5.4)

$$\Lambda = (A_m P_f)^2 \Delta, \quad \Delta = (\chi + 1)^2 - 4\chi(1 - K_\omega/K_\gamma)$$

квадратные уравнения (5.4) и $\Phi(\eta) = 0$ имеют по два корня

$$\lambda_{1,2} = A_m P_f (-(\chi + 1) \pm \Delta^{1/2})/2, \quad \eta_{1,2} = K_\gamma(1 - \chi \pm \Delta^{1/2})/2 \quad (5.8)$$

Это позволяет записать общее решение системы (5.2) в виде

$$\gamma = h_1 \exp(\lambda_1 l) + h_2 \exp(\lambda_2 l), \quad \omega = h_1 \eta_1 \exp(\lambda_1 l) + h_2 \eta_2 \exp(\lambda_2 l) \quad (5.9)$$

Постоянные h_1 и h_2 находятся по начальным значениям $\gamma_0 = \gamma(0)$ и $\omega_0 = \omega(0)$.

При $\Lambda < 0$ корни (5.8) комплексные и через действительные функции решение (5.9) для случая $\Lambda \neq 0$ можно записать в форме

$$\Lambda > 0, \quad \gamma = \gamma_0 \left(\frac{1-u}{1-u_0} \right) \left(\frac{u}{u_0} \right)^{(v-1)/2}, \quad \omega = \eta \gamma \quad (5.10)$$

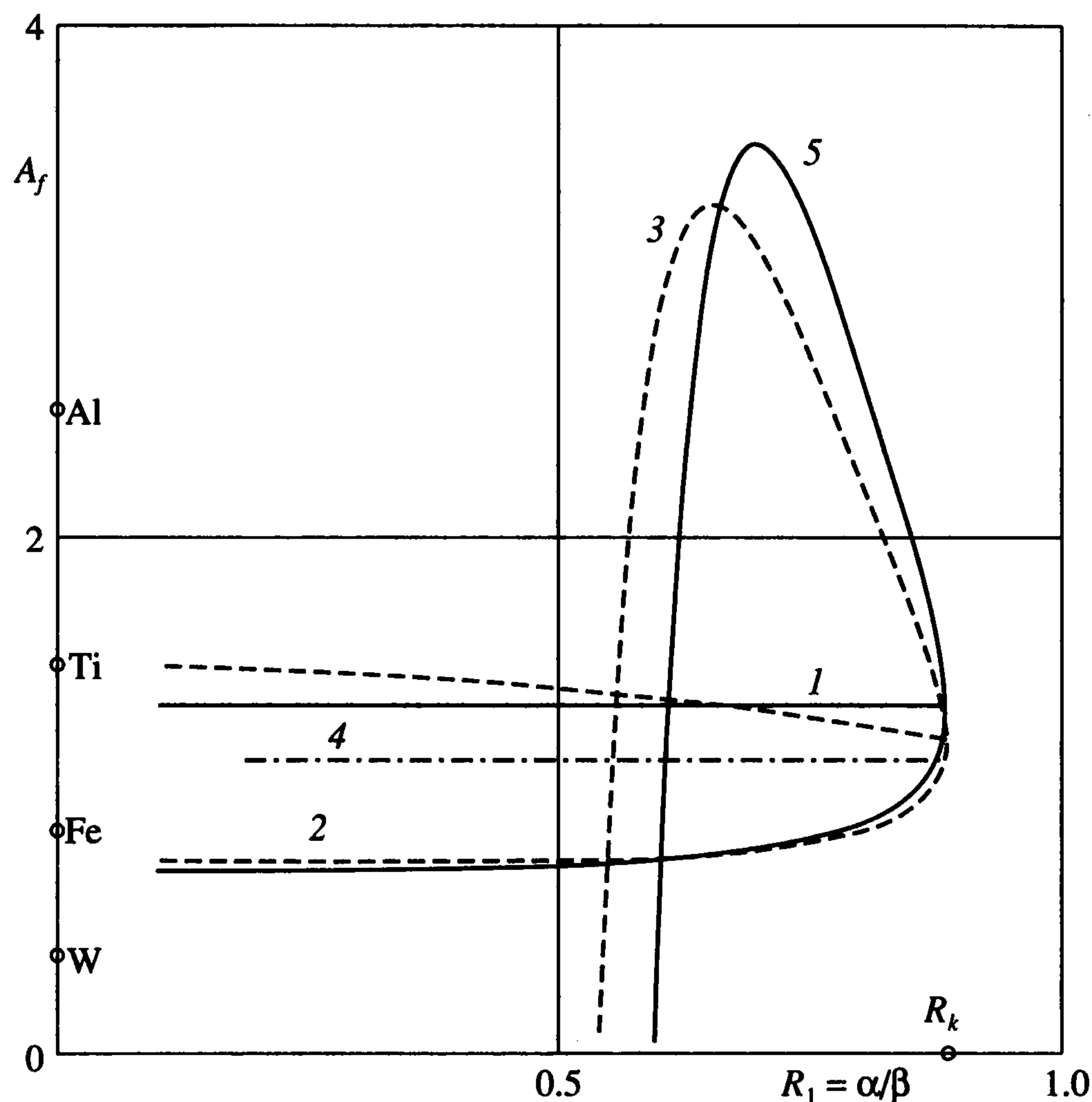
$$\eta = \frac{\eta_1 - u \eta_2}{1-u}, \quad u = u_0 \exp(-\sqrt{\Lambda} l)$$

$$\Lambda < 0, \quad \gamma = \frac{\gamma_0 \cos \sigma}{\cos \sigma_0} \exp(v(\sigma - \sigma_0)), \quad \omega = \eta \gamma \quad (5.11)$$

$$\eta = \frac{1}{2} K_\gamma (\sqrt{-\Lambda} \operatorname{tg} \sigma + 1 - \chi), \quad \sigma = -\frac{1}{2} \sqrt{-\Lambda} l + \sigma_0$$

где u_0 и σ_0 – начальные значения u и σ , найденные по $\eta_0 = \omega_0/\gamma_0$, $v = (\chi + 1)/\sqrt{|\Lambda|}$.

При выполнении условия (5.7) действительные части корней λ_1 и λ_2 отрицательны, точка покоя системы (5.2) в плоскости (γ, ω) – узел ($\Lambda > 0$) или фокус ($\Lambda < 0$) и нулевое решение системы асимптотически устойчиво. При $K_\omega/K_\gamma > 1$ значение $\Lambda > 0$, параметр $v < 1$ и корень $\lambda_1 > 0$. В этом случае точка покоя – седло и нулевое решение системы (5.2) неустойчиво.



Фиг. 3

Таким образом, движение тела устойчиво, если выполнено условие (5.7). С учетом выражений (5.6) имеем

$$K_{\omega}/K_{\gamma} = 1 - (1 - A_f/A_m)/(18z_c z_f + 1), \quad A_f = -18z_f/P_f \quad (5.12)$$

и условие (5.7) можно переписать в виде

$$A_m > A_f \quad (5.13)$$

Значение A_f определяется формой тела и положением центра масс. У пирамидальных тел с равномерным распределением массы по объему $C_m = \frac{3}{4}$, и для них значения A_f даны на фиг. 3 в зависимости от R_1 ($R_1 = r_1/r_b = \alpha/\beta$). Штриховые кривые 1–3 построены при $\beta = 10^\circ$ для звездообразного тела (кривая 1) и для горизонтальной (кривая 2) и вертикальной (кривая 3) ромбовидных форм.

На отрезке пути, где выполнено условие (5.5), характеристики среды входят в систему (5.2) только через параметр A_m , и ее решение не зависит от трения и прочностных свойств среды. Значение A_m не зависит от формы тела: $A_m = 3A_1/\rho_m \sim \rho_0/\rho_m$, и, например, для несжимаемых упругопластических сред согласно первому равенству (1.3) $A_m = 9\rho_0/(2\rho_m)$. Увеличение массы тела при сохранении его формы уменьшает величину A_m , и это при заданном значении U_0 ведет к увеличению длины траектории тела l_m (4.8). Однако если при этом не менять положения центра масс, то значение A_f остается прежним, и при $A_f > 0$ есть критическая масса $m_f = 3A_1 V/A_f$, при которой условие (5.13) нарушится: $A_m = A_f$. Это означает, что прямолинейное движение тел с массой $m \geq m_f$ неустойчиво, и при наличии малых возмущений параметров движения использование их может не позволить достичь теоретически предсказываемой глубины проникания.

В качестве примера на фиг. 3 даны значения A_m , рассчитанные согласно первому равенству (1.3) для среды с $\rho_0 = 1500 \text{ кг/м}^3$. Они отмечены точками на оси ординат, соответствующими однородному телу, изготовленному из алюминия (Al ; $A_m = 2.5$), титана (Ti ; $A_m = 1.5$), стали (Fe ; $A_m = 0.85$) или вольфрама (W ; $A_m = 0.38$). Из анализа фиг. 3 в согласии с условием (5.13) следует, в частности, что при $\beta = 10^\circ$ движение звездообразных тел (см. кривую 1), построенных при любом R_1 и изготовленных из стали или вольфрама, неустойчиво, тогда как более легкие алюминиевые и титановые ударники, имеющие ту же форму, будут двигаться в среде устойчиво.

При анализе устойчивости движения тел с произвольным распределением массы по объему критерий устойчивости (5.13) удобно выразить в форме

$$z_y = z_f + A_m P_f / 18 > 0; \quad z_y = C_k - C_m, \quad C_k = A_m P_f / 18 + 2(1 + \alpha^2 / P_f) / 3 \quad (5.14)$$

Здесь z_y – запас устойчивости тела, C_k – расстояние от вершины тела до критического положения центра масс, при котором произойдет потеря устойчивости. Отсюда следует, что из двух тел одинаковой формы (с одинаковыми α и P_f) и с одинаковым распределением массы по объему (одинаковым C_m) больший запас устойчивости имеет тело с меньшей массой (большим A_m). Данный результат согласуется с выводом, полученным ранее [8, 9] для тонких конусов, согласно которому при прочих равных условиях движение конусов с относительно меньшей массой более устойчиво. Позднее аналогичный результат был получен [10] для тонких тел вращения.

Увеличение площади основания пирамидального тела при фиксированной длине ведет к увеличению относительной толщины тела и росту угла β . При этом меняется форма тела и значение z_y . Увеличение угла β при фиксированных A_m , C_m и R_1 ведет к росту значений α и C_k и, следовательно, увеличивает запас устойчивости тела z_y .

6. Движение центра масс. Траектория движения центра масс тела определяется из уравнений (3.1) и строится в неподвижной системе координат $OXYZ$ с использованием соотношений

$$Y(l) = \int_0^l \cos \varphi dl, \quad Z(l) = \int_0^l \sin \varphi dl \quad (6.1)$$

Угол φ находится из второго уравнения (4.4), которое при условии (5.5) с учетом выражений (4.5) и (5.6) записывается в виде

$$d\varphi/dl = A_m P_f \beta (\gamma + \omega z_c) \quad (6.2)$$

Решение уравнения (6.2) строится на основе решения (5.9) и, используя выражения (5.10) и (5.11), его можно представить в форме

$$\Lambda > 0, \quad \varphi - \varphi_0 = \zeta_1(u) - u_0 \zeta_2(u) \quad (6.3)$$

$$\zeta_j(u) = B_j (1 + \eta_j z_c) (1 - (u/u_0)^n), \quad j = 1, 2$$

$$B_j = \frac{\gamma_0 \beta}{n(1 - u_0) \sqrt{\Delta}}, \quad n = \frac{\nu - 3}{2} + j$$

$$\Lambda < 0, \quad \varphi - \varphi_0 = \xi(\sigma_0) - \xi(\sigma) \quad (6.4)$$

$$\xi(\sigma) = B_0 [h \sin \sigma + \nu \cos \sigma (h - z_c q / (1 + \chi))] \exp(\nu(\sigma - \sigma_0))$$

$$B_0 = \frac{\gamma_0 \beta K_\gamma \sqrt{-\Delta}}{q \cos \sigma_0}, \quad q = 2\chi(K_\gamma - K_\omega), \quad h = 1 + z_c K_\gamma$$

Прямолинейное движение тела устойчиво, если выполнено условие (5.13). Тогда возмущения по γ и ω затухают со временем, и угол φ выходит на асимптоту, которая после стабилизации движения задает новое направление движения центра масс. Это направление определяется углом $\varphi = \varphi_a$, который находится из выражений (6.3) и (6.4) и записывается в виде

$$\varphi_a = \varphi_0 + \begin{cases} \zeta_1(0) - u_0 \zeta_2(0), & \Lambda > 0 \\ \xi(\sigma_0), & \Lambda < 0 \end{cases}$$

Движение тела определено, если известны, как функции от l , значения D , φ , γ и ω . При выполнении условий (5.1) и (5.5) они находятся из соотношений (4.8), (5.10), (6.3), если $\Lambda > 0$, и соотношений (4.8), (5.1), (6.4), если $\Lambda < 0$. Из анализа соотношений (5.10), (5.11), (6.3) и (6.4), в частности, следует, что на отрезке пути, где выполнено условие (5.5), устойчивость движения, угол φ и форма траектории центра масс (6.1) не зависят от трения и прочностных свойств среды.

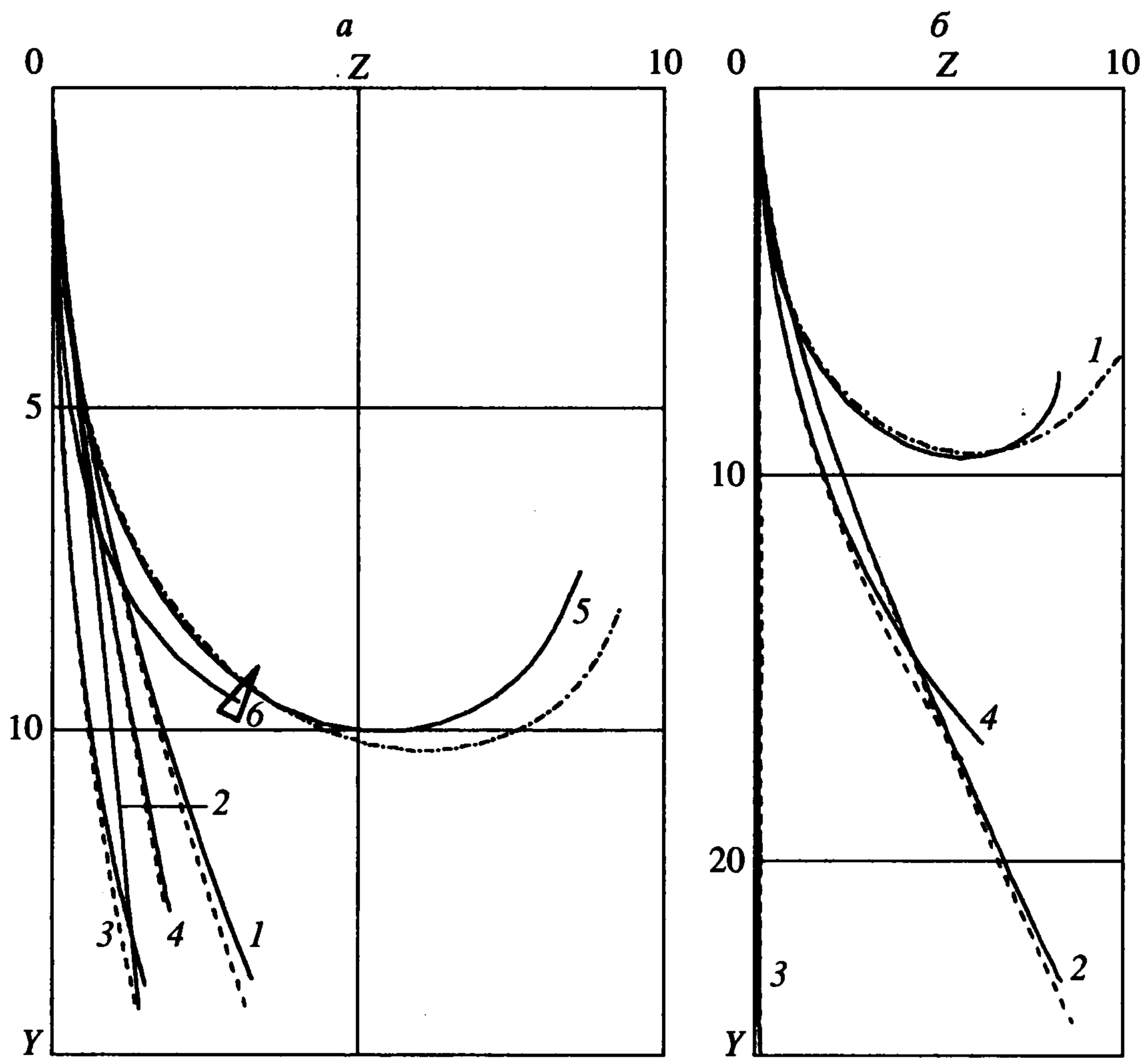
Как следует из выражений (4.7) и (4.8), $dD/dl > 0$, и при $l \rightarrow l_m$ значение $D \rightarrow \infty$. Поэтому всегда существует такой отрезок пути $l_d < l_m$, после которого при $l > l_d$ условие (5.5) нарушится, и тогда влиянием параметра D на решение системы (5.2) пренебречь нельзя. Рост величины D ведет также к уменьшению значения E_1 (см. последнее выражение (4.6)), и можно показать, что всегда есть значение D_b , такое, что при $D \geq D_b$ нарушаются условия (5.4). Это означает, что, если в начальный момент времени, согласно критерию (5.13), положение равновесия системы (5.2) было устойчивым, то при $D = D_b$ произойдет его бифуркация (см. [14]), и наличие малых возмущений по γ и ω далее ведет к их росту. Влиянием бифуркации на решение задачи динамики тела можно пренебречь, если условия (5.4) и (5.5) нарушаются лишь на заключительном отрезке пути, малом по сравнению с общей длиной пути l_m : $(l_m - l_k)/l_m \ll 1$, где $l_k = \min(l_d, l_b)$, $l_b = l(D_b)$. Используя выражения (4.8), (5.4) и (5.12), можно показать, что это будет тогда, когда значение D_0 , кроме условия (5.5), удовлетворяет ограничению

$$D_0 \ll D_k, \quad D_k = \frac{P_f(1 - A_f/A_m)}{\alpha^2(1 + 18z_f z_c)} - 1 \quad (6.5)$$

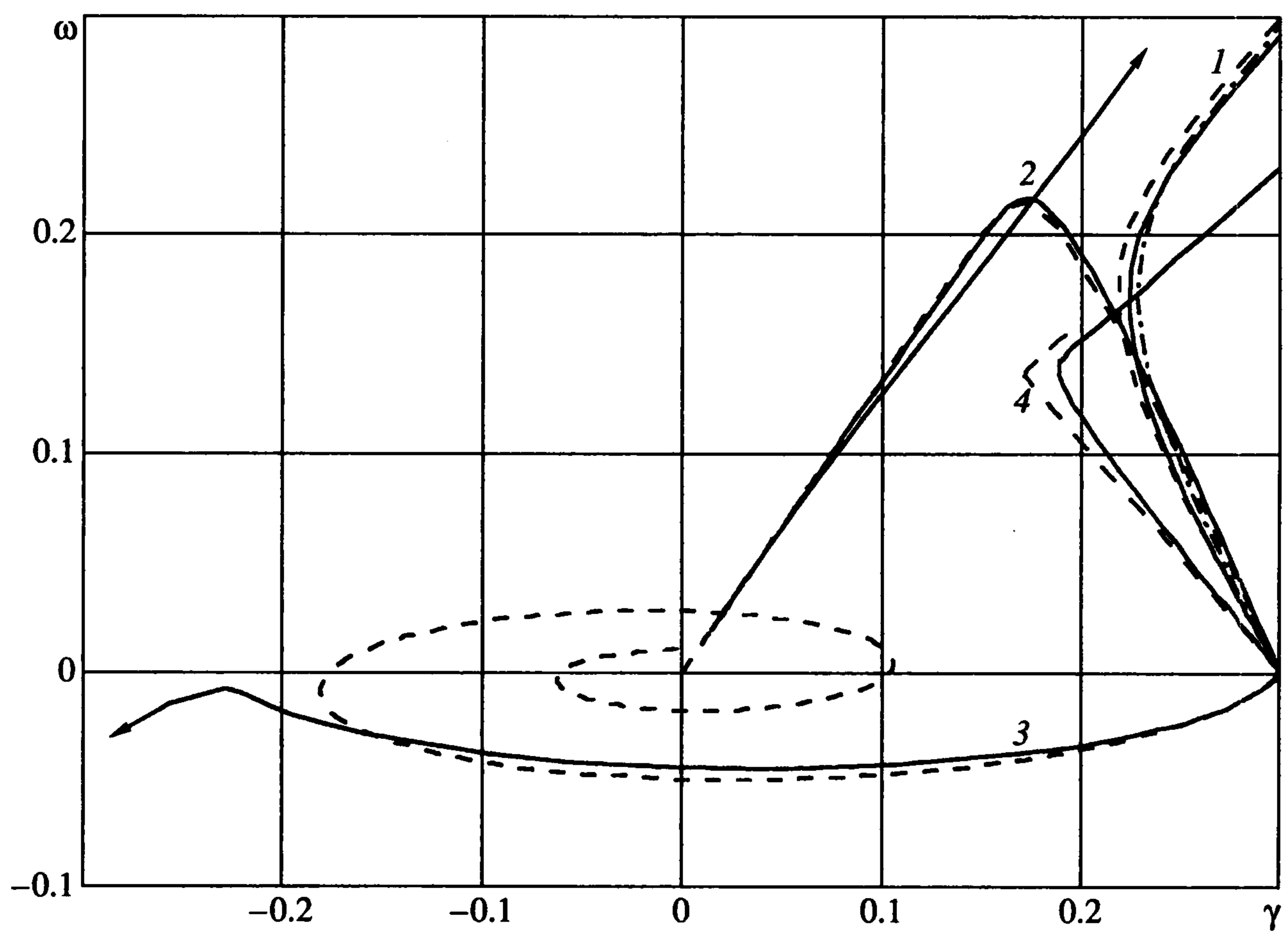
Аналитическое решение задачи динамики тела найдено выше для тонких пирамидальных тел (2.3), построенных из участков плоскостей, касательных к круговому конусу с углом раствора 2α . Однако, если в выражениях (4.5) и (4.6) положить $\alpha = \beta$, $P_f = 1$ и $R_1 = 1$, то выражениями (4.5) будут определяться компоненты момента и силы, действующие на конус с углом раствора 2β , эквивалентного пирамидальным телам по массе, длине и площади основания. Тогда построенное решение будет решением задачи динамики конуса, и оно совпадает с решением, полученным для звездообразных тел с точностью до значения z_f . При одинаковом расположении центра масс величина z_f и запас устойчивости z_y (см. (5.14)) у конусов больше, а значение A_f меньше, чем у звездообразных тел. В качестве примера, на фиг. 3 кривой 4 даны значения A_f для однородного конуса с $\beta = 10^\circ$.

Звездообразное тело строится из участков поверхностей двух ромбовидных тел и имеет четыре плоскости симметрии (фиг. 2). Решение задачи динамики получено для него в предположении, что движение центра масс происходит в плоскостях симметрии, где лежит максимальный радиус тела. Можно показать, что это решение верно и тогда, когда центр масс движется в плоскости, где лежит минимальный радиус тела, и ниже это подтверждено численными расчетами.

7. Численная апробация аналитических результатов. Апробация аналитических результатов проводилась на основе численного решения задачи Коши системы урав-



Фиг. 4



Фиг. 5

нений движения тела (3.1) и (3.2) методом Рунге – Кутты четвертого порядка. При расчете компонент силы F (1.1) поверхность S (1.5) определялась в процессе решения задачи, что позволяло учитывать появление зон отрыва среды на поверхности тела. В качестве модельной среды бралась среда с $\rho_0 = 1500 \text{ кг/м}^3$, для которой постоянные параметры модели (1.2) вычислялись согласно выражениям (1.3) с $\tau_s = 1 \text{ МПа}$. Считалось, что $C_1 = 5\tau_s$, и по порядку величин это соответствует параметрам грунта средней прочности.

Рассматривался случай движения однородных тел, изготовленных из титана, стали и вольфрама. Расчеты проводились при следующих начальных значениях: $U_0 = 600 \text{ м/с}$, $\varphi_0 = 0$, $\gamma_0 = 0.3$ и $\omega_0 = 0$, и их результаты даны на фиг. 4 и 5 сплошными линиями.

Особое внимание уделено решению задачи динамики тел, дающих при прямолинейном движении максимальную глубину проникания. Далее такие тела называются оптимальными. При известных параметрах среды значение $\alpha = \alpha^*$ для оптимальных тел находится по начальной скорости тела U_0 (см. [7]). При $U_0 = 600 \text{ м/с}$ значение $\alpha^* = 0.115$ и ему соответствует $D_0 = 1.26$. Тогда $\alpha_1 = 6.6^\circ$, и значения A_f (5.12), рассчитанные для однородных оптимальных тел при $\alpha = \alpha^*$, в зависимости от R_1 даны на фиг. 3 сплошными линиями 1, 2 и 5 для звездообразных и ромбовидных форм соответственно, причем кривая 5 построена для вертикальных конфигураций.

Траектории движения оптимальных тел из титана ($R_1 = 0.66$, $A_m = 1.5$) даны на фиг. 4, а кривыми 1–3, построенными для звездообразной и ромбовидных форм соответственно (кривая 3 – траектория вертикальной формы). В этом случае согласно критерию устойчивости (5.13) неустойчива лишь вертикальная конфигурация (см. фиг. 3), но рост возмущений по γ и ω здесь не привел к существенному отклонению скорости центра масс от своего начального направления, и конечные положения центра масс обеих ромбовидных форм почти совпадают. На фиг. 4, а кривой 4 дана также траектория движения кругового конуса с $\beta = 10^\circ$, эквивалентного пирамидальным телам по массе, длине и площади основания. Движение конуса устойчиво: $A_f = 1.12$, $A_m = 1.5$, но длина его траектории меньше, чем длины траекторий оптимальных тел на 10%.

Увеличение массы тел при сохранении их формы уменьшает значение A_m , и если рассмотреть те же тела, но изготовленные из стали ($R_1 = 0.66$, $A_m = 0.85$), то устойчивой будет лишь горизонтальная конфигурация. Траектория движения звездообразного тела в этом случае дана на фиг. 4, а кривой 5. Она имеет сильно изогнутый вид, и это подтверждает теоретический вывод о том, что простым увеличением массы тела можно не достичь большей глубины проникания. Дальнейшее увеличение массы тела ведет к тому, что уже на начальном этапе пути поток среды отрывается от поверхности тела, и рост значений угла атаки и угловой скорости вращения (рост возмущений по γ и ω) приводит к его опрокидыванию. На фиг. 4, а кривой 6 дана траектория движения звездообразного тела, изготовленного из вольфрама ($R_1 = 0.66$, $A_m = 0.38$), где само тело показано схематично в момент опрокидывания.

Улучшить устойчивость движения тела можно, если увеличить его относительную толщину. При фиксированном α это ведет к уменьшению значения R_1 . Траектории движения оптимальных тел из стали ($R_1 = 0.5$, $A_m = 0.85$) даны на фиг. 4, б кривыми 1–3, построенными для тел в той же последовательности, что и кривые 1–3 на фиг. 4, а. В этом случае условие (5.13) нарушено лишь для звездообразного тела (см. фиг. 3), что предсказывает для него неустойчивый тип движения. Численные расчеты подтверждают это, и рост значений γ и ω для него показан на фиг. 5 кривой 1. Траектория движения звездообразного тела (кривая 1 на фиг. 4, б) имеет изогнутый вид, и ее длина значительно меньше, чем длины траекторий ромбовидных тел, представленных на фиг. 4, б кривыми 2 и 3. Движение этих тел устойчиво, причем скорость центра масс вертикальной формы почти не отклоняется от своего

начального направления: $\varphi_a \approx 10^{-2}$. Интегральные кривые в фазовой плоскости (γ , ω) даны для них на фиг. 5 кривыми 2 и 3. Для сравнения на фиг. 4, б и фиг. 5 кривыми 4 даны траектория и параметры γ и ω стального конуса с $\beta = 13^\circ$, эквивалентного пирамидальным телам по массе, длине и площади основания. Движение конуса неустойчиво: $A_f = 0.86$, а длина его траектории меньше, чем у оптимальных форм на 27%.

Результаты расчетов динамики звездообразных тел, плоскость движения которых параллельна плоскости симметрии тела, проходящей через минимальный радиус основания, показаны на фиг. 4 и 5 штрихпунктирными линиями. Из анализа результатов следует, что до появления зон отрыва среды на поверхности тела параметры движения звездообразных тел практически не зависят от плоскости движения.

Аналитическое решение задачи динамики тела, полученное в разд. 4–6, представлено на фиг. 4 и 5 штриховыми линиями. При неустойчивом типе движения аналитические результаты даны до появления зон отрыва среды на поверхности тела, пока выполнялось условие (4.1). Можно увидеть, что при устойчивом типе движения численное и аналитическое решения задачи практически совпадают. Различия связаны с тем, что при численном решении учитывались все члены, входящие в уравнения, а аналитическое решение получено при условии (5.5), которое позволяло не учитывать параметр D при решении задачи о движении тела вокруг центра масс.

При $U_c \rightarrow 0$ ($D \rightarrow \infty$) теоретически предсказана бифуркация положения равновесия системы уравнений (5.2), которая независимо от первоначального типа решения ведет к росту значений γ и ω . Это подтвердилось численными расчетами и показано стрелками на фиг. 5 на кривых 2 и 3, которые первоначально соответствовали устойчивому типу решения. Наибольшие различия в численном и аналитическом решениях системы (3.2) получены для стальной вертикальной формы (см. кривые 3 на фиг. 5). В этом случае $D_0 \alpha^2 / P_f = 0.32$, и влияние параметра D на численное решение системы (3.2) сказалось на раннем этапе движения. Однако так как $D_k = 155$, то выполнено условие (6.5), и в конечном итоге учет параметра D и бифуркация почти не повлияли на решение задачи движения центра масс тела, траектория которого дана на фиг. 4, б кривой 3.

Отметим также, что численное решение строилось с учетом всех сил, действующих на тело, в том числе и силы тяжести, влиянием которой в аналитическом решении пренебрегли. Как следует из соотношений (4.4) и (4.5), это можно сделать, если

$$A_m U_c^2 \alpha^2 (1 + D) \gg gL$$

что накладывает дополнительное ограничение на значения параметра D

$$D/(1 + D) \leq 3(C_1 + C_2/\alpha)/(\rho_m gL)$$

Для сред средней прочности $C_1 \sim C_2 \sim 1$ МПа и при $L \leq 10$ м пренебрежение силой тяжести оправдано для них при любых значениях D .

Таким образом, при сравнении результатов численного и аналитического решений задачи динамики тела показано, что аналитическое решение, построенное в разд. 4–6 для тонких пирамидальных тел при упрощающих предположениях, дает хорошее приближение к точному решению задачи, если в начальный момент времени выполнены условия (5.1), (5.5) и (6.5). В результате численного решения получены все типы движений, наблюдаемые в экспериментах по высокоскоростному прониканию твердых тел в плотные среды [15]: прямолинейное, криволинейное, движение тела по траектории с кувырканием. Показано, что аналитическое решение можно использовать для определения характеристик движения тел и при неус-

тойчивом типе движения, но лишь до появления зон отрыва среды на поверхности тела.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-99039 и 01-01-00193).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
2. Сагомоян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
3. Фомин В.М., Гулидов А.И., Сапожников Г.А. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 600 с.
4. Якунина Г.Е. К построению оптимальных пространственных форм в рамках модели локального взаимодействия // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 299–310.
5. Якунина Г.Е. Об оптимальных неконических и несимметричных пространственных конфигурациях // ПММ. 2000. Т. 64. С. 605–614.
6. Yakunina G.Ye. Three-dimensional bodies of minimum total drag in hypersonic flow // J. Optimiz. Theory and Appl. November 2002. V. 115. № 2. P. 241–265.
7. Якунина Г.Е. О пространственных формах тела с максимальной глубиной проникания в плотные среды // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 6. С. 768–771.
8. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. Об особенностях движения тонкого тела в плотных средах // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 2. С. 192–195.
9. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. Динамика тонких тел в плотных средах в условиях локальной модели взаимодействия // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 1008–1022.
10. Симонов И.В. Об устойчивости движения удлиненного тела вращения в упругопластической среде при отрыве потока // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 311–320.
11. Остапенко Н.А., Якунина Г.Е. О форме тонких пространственных тел с максимальной глубиной проникания в плотные среды // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 1018–1034.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 1. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.
13. Петровский Г.И. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. 295 с.
14. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.
15. Zukas J.A., Nicholas T., Swift H.F. et al. Impact Dynamics. N.Y.: Wiley-Interscience Publication, 1982 = Зукас Д.А., Николас Т., Свифт Х.Ф. и др. Динамика удара. М.: Мир, 1985. 296 с.

Москва
e-mail: galina_yakunina@mail.ru

Поступила в редакцию
28.II.2002