

УДК 531.01

© 2003 г. А.А. Буров

О НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЯХ МЕХАНИКИ, ДОПУСКАЮЩИХ ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Обсуждается вопрос о структуре допускающих первые интегралы систем дифференциальных уравнений, возникающих в некоторых задачах механики.

Как известно, наличие первых интегралов у системы дифференциальных уравнений накладывает существенный отпечаток на ее вид (см., например, [1]). Так [2], наличие у линейной системы квадратичного первого интеграла при выполнении естественных условий невырожденности предопределяет ее гамильтонову структуру. Связь между наличием у системы первых интегралов и существованием у нее гамильтоновой или пуассоновой структуры прослеживается и на других примерах (см., например, [3]). Такая связь предвосхищает один из подходов к поставленной ранее [4] общей задаче об обнаружении гамильтоновой структуры систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Уравнения типа Эйлера. Особые свойства гамильтоновых систем выделяют их из общего множества систем дифференциальных уравнений. Поэтому даже сведения о существовании гамильтоновой структуры, быть может без ее явного обнаружения, представляют значительный интерес (см., например, [5–9]). Еще со времен Якоби известно, что в некоторых случаях удастся продвинуться в решении задачи о существовании гамильтоновой или пуассоновой структуры для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточным количеством первых интегралов. Так, если автономная система n дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n \quad (1.1)$$

допускает $n - 1$ независимый в общем случае первый интеграл $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$, то она представима в виде (см., например, [2, гл. 11], [10], а также [11])

$$\dot{x}_i = \alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial(x_i, J_1, J_2, \dots, J_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

где $\alpha(\mathbf{x})$ – некоторая функция. Область $\alpha(\mathbf{x}) = 0$ состоит из неподвижных точек. Поэтому как она сама, так и области

$$\Sigma^- = \{\mathbf{x}: \alpha(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \Sigma^+ = \{\mathbf{x}: \alpha(\mathbf{x}) > 0\}$$

инвариантны под действием потока, и в каждой из них заменой времени $d\tau = dt\alpha(\mathbf{x})$ система (1.2) может быть преобразована к виду

$$x'_i = \frac{\partial(x_i, J_1, J_2, \dots, J_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

Ограничение фазового потока системы (1.2) на неособый совместный уровень $n - 2$ из этих интегралов, скажем, на поверхность

$$I = (\mathbf{x}: J_2 = j_2, J_3 = j_3, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}) \quad (1.4)$$

описывается с точностью до замены времени системой уравнений Гамильтона с одной степенью свободы с функцией Гамильтона $J = J_1|_I$.

Естественно, в общем случае системы вида (1.1) не обладают тем количеством первых интегралов, которое позволяет представить их в виде (1.2). Тем не менее даже в этом случае удастся сделать некоторые выводы о структуре системы (1.1). Так, например, при $n = 3$ справедливо

Утверждение 1. Если система (1.1) допускает хотя бы один дифференцируемый первый интеграл $J = J(\mathbf{x})$ или, иными словами, выполнено соотношение

$$(\partial J / \partial \mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0 \quad (1.5)$$

то система (1.1) представима в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \alpha(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g} = \partial J / \partial \mathbf{x} \quad (1.6)$$

где $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ – произвольный трехмерный вектор, ортогональный вектору $\mathbf{g}$.

В частности, если $(g_1 - g_2)(g_2 - g_3)(g_3 - g_1) \neq 0$, то в качестве такого вектора можно выбрать вектор $\mathbf{e} = (g_3 - g_2, g_1 - g_3, g_2 - g_1)$. В этом случае

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{g})_1 = g_3(g_1 - g_3) - g_2(g_2 - g_1) \quad (1.7)$$

Если же $J \neq J(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ в некоторой области $\mathcal{U}$, то в этой области в качестве такого вектора можно выбрать

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (1.5) как уравнение относительно компонент вектора $\mathbf{f}$ при фиксированном значении $\mathbf{x}$. Если $J_c = \{\mathbf{z}: J(\mathbf{z}) = c\}$ – уровень первого интеграла, содержащий точку $\mathbf{x}$, то линейное однородное уравнение (1.5) определяет множество векторов, коллинеарных плоскости, касающейся поверхности J_c в точке $\mathbf{x}$. Тогда, по свойствам смешанного произведения, если некоторый ненулевой вектор $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ ортогонален вектору $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, то и вектор $\mathbf{e} \times \mathbf{g}$ ортогонален вектору $\mathbf{g}$. Векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{e} \times \mathbf{g}$ определяют общее двухпараметрическое решение уравнения (1.5), имеющее вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (1.9)$$

откуда и следует справедливость первого предложения.

Доказательство второго и третьего предложений основывается на том факте, что для всякого вектора $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, не коллинеарного вектору $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, вектор $\mathbf{h} \times \mathbf{g}$ ортогонален им обоим и коллинеарен указанной плоскости. Во втором предложении вектор $\mathbf{h}$ постоянен и имеет вид $\mathbf{h} = (1, 1, 1)$, в третьем предложении $\mathbf{h} = (x_1, x_2, x_3)$.

В последнем случае если $\beta(\mathbf{x}) = 0$, то после замены времени $d\tau = \alpha(\mathbf{x})dt$ уравнения (1.6) переходят в уравнения Эйлера (штрих означает производную по τ)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \times \mathbf{g} \quad (1.10)$$

обладающие известной пуассоновой структурой.

Наличие в случае $n = 3$ двух независимых первых интегралов J_1, J_2 в силу теоремы Якоби позволяет представить уравнения (1.1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \alpha(\mathbf{x})(\partial J_1 / \partial \mathbf{x}) \times (\partial J_2 / \partial \mathbf{x}) \quad (1.11)$$

а уравнения (1.3) – в виде

$$\mathbf{x}' = (\partial J_1 / \partial \mathbf{x}) \times (\partial J_2 / \partial \mathbf{x}) \quad (1.12)$$

Такие уравнения, в частности, описывают движения волчка Эйлера для $J_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})/2$ и уравновешенного гиростата для $J_1 = (\mathbf{x} + \mathbf{c}, \mathbf{x} + \mathbf{c})/2$.

Утверждение 2. Пусть один из интегралов уравнений (1.12), скажем интеграл J_1 , квадратичен и имеет вид

$$J_1 = 1/2(\mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \quad (1.13)$$

где матрица $\mathbf{B}$ положительно определена. Тогда существует невырожденная линейная однородная замена переменных, приводящая в сочетании с заменой времени уравнения (1.12) к виду уравнений Эйлера (1.10).

Доказательство. Так как матрица $\mathbf{B}$ положительно определена, то существует матрица $\mathbf{C}$, такая что $\mathbf{B} = \mathbf{C}^2$, причем определитель матрицы $\mathbf{C}$ отличен от нуля. Тогда замена переменных

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.14)$$

приводит интегралы J_1, J_2 к виду

$$J_1^* = (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*), \quad J_2^* = J_2(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}) \quad (1.15)$$

Согласно теореме Якоби, в новых переменных уравнения (1.3) представимы в виде

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \alpha^*(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^* \times \partial J^*/\partial \mathbf{x}^* \quad (1.16)$$

Замена времени и отбрасывание звездочек в итоге дает уравнения Эйлера в виде (1.10).

Заметим, что матрица $\mathbf{C}$ определяется неединственным образом.

Для систем с квадратичным положительно определенным первым интегралом соотношение (1.14) дает глобальную замену переменных, позволяющую свести систему (1.11) к уравнениям Эйлера. Если в общем случае отказаться от условия глобальности, то доказанное утверждение можно существенно усилить.

Утверждение 3. Пусть один из интегралов уравнений (1.12), скажем, интеграл J_1 достигает в точке $\mathbf{x}_0$ строгого минимума (максимума), причем определитель матрицы Гессе функции J_1 в точке $\mathbf{x}_0$ отличен от нуля. Тогда найдется открытая область $\mathcal{U}$, содержащая точку $\mathbf{x}_0$, такая, что в ней в некоторой системе координат после соответствующей замены времени уравнения (1.12) предстанут в виде уравнений Эйлера (1.10).

Доказательство. Согласно лемме Морса ([12], см. также [13, гл. 6]), в некоторой окрестности невырожденного минимума (максимума) функции J_1 можно выбрать координаты так, что в них $J_1 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$ (соответственно $J_1 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$), тогда доказательство утверждения сводится к применению теоремы Якоби и замене времени.

Замечание. Лемма Морса позволяет осуществить перевод системы к некоторому похожему каноническому виду и в окрестности невырожденных седловых точек. Однако получающиеся уравнения встречаются в приложениях не так часто, как системы уравнений Эйлера. Впрочем, такое "многообразие случаев" легко снимается переходом к рассмотрению уравнений над множеством комплексных чисел.

2. Линейные системы, допускающие первые интегралы. Предположим теперь, что система (1.1) линейна и имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad \mathbf{A} = \text{const} \quad (2.1)$$

Пусть определитель матрицы A равен нулю. Тогда равны нулю как определитель транспонированной матрицы A^T , так и одно из ее собственных значений. Обозначим $g = (g_1, g_2, g_3)$ собственный вектор (СВ) матрицы A^T , отвечающий этому нулевому собственному значению.

Утверждение 4. Если $\det A = 0$, то система (2.1) представима в виде

$$\dot{x} = \alpha x \times g + \beta (x \times g) \times g, \quad \alpha, \beta = \text{const} \quad (2.2)$$

Доказательство. Хорошо известно, что в условиях теоремы функция

$$J = (g, x) \quad (2.3)$$

представляет собой первый интеграл уравнений (2.1): дифференцируя эту функцию в силу системы (2.1), имеем

$$d(g, x)/dt = (g, Ax) = (A^T g, x) = 0$$

Тогда выполнены условия утверждения 1 и уравнения (2.1) представимы в виде (1.6). Для завершения доказательства остается заметить, что множители α и β постоянны в силу линейности системы (2.1).

Так как g – постоянный СВ постоянной матрицы A , то без потери общности будем считать, что $\alpha = 1$.

Если $\beta = 0$, то система (2.2) представляет собой систему уравнений Эйлера вида (1.10) с функцией Гамильтона (2.3).

Следуя постановке задачи, предложенной ранее [2], рассмотрим теперь случай, когда уравнения (2.1) допускают квадратичный первый интеграл вида (1.13), причем $\det B \neq 0$.

Утверждение 5. Если система (2.1) обладает невырожденным квадратичным интегралом (1.13), то $\det A = 0$, а система (2.1) представима в виде

$$\dot{x} = g \times Bx \quad (2.4)$$

где g – постоянный СВ матрицы A^T , отвечающий ее нулевому собственному значению.

Доказательство. Так как (1.13) – первый интеграл, то равенство

$$(Bx, Ax) = (A^T Bx, x) = 0$$

выполняется тождественно. Тогда матрица $A^T B$ кососимметрична, и ее определитель равен нулю, так как размерность матрицы нечетна. Но матрица B невырождена и $\det B \neq 0$. Значит, $\det A = 0$ и $\det A^T = 0$. Тогда в силу упомянутого выше свойства соответствующего нулевому собственному значению СВ матрицы A^T функция вида (2.3) – первый интеграл уравнений (2.1). Следовательно, в силу теоремы Якоби уравнения представимы в виде (1.12). При этом, так как уравнения линейны, то замена времени оказывается необязательной – ее можно компенсировать выбором СВ g , определенного, как известно, с точностью до множителя.

Заметим, что отысканию вектора g можно придать "более конструктивный вид". Так как матрица B невырождена, то существует обратная ей матрица B^{-1} , с помощью которой представим уравнения (2.1) как

$$\dot{x} = Ax = (AB^{-1})Bx$$

Матрица AB^{-1} кососимметрична, так как для любого вектора z имеем (ср. [2])

$$(AB^{-1}z, z) = (Ax, Bx) \equiv 0 \quad (x = B^{-1}z)$$

Тогда соответствие между компонентами этой матрицы и компонентами вектора $\mathbf{g}$ устанавливается с помощью известного изоморфизма между кососимметричными матрицами 3×3 и трехмерными векторами, имеющего вид

$$g_1 = (AB^{-1})_{23} \quad (123)$$

Утверждение 6. В условиях утверждения 5 пусть существует симметричная матрица $\mathbf{C}$, такая, что

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{C} \quad (2.5)$$

Тогда линейной заменой переменных

$$\mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.6)$$

уравнения (2.1) сводятся к системе уравнений Эйлера вида (1.10).

Доказательство. Так как $\det \mathbf{B} \neq 0$, то $\det \mathbf{C} \neq 0$, и существует обратная матрица $\mathbf{C}^{-1}$. Заменой переменных (2.6) уравнения (2.1) и интеграл (1.13) приводятся к виду

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{x}^* \quad (2.7)$$

и

$$J = (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) \quad (2.8)$$

соответственно.

Функция (2.8) – первый интеграл уравнений (2.7). Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что матрица $\mathbf{A}^*$ кососимметрична. Тогда, полагая

$$g_1^* = -(\mathbf{A}^*)_{23} \quad (123)$$

и отбрасывая всюду в рамках этого утверждения звездочки, представим уравнения (2.1) в виде уравнений Эйлера

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \times \mathbf{g} = \mathbf{x} \times \frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.9)$$

с функцией Гамильтона

$$J = (\mathbf{g}, \mathbf{x}) \quad (2.10)$$

Данные результаты в определенной мере дополняют результаты, полученные ранее [2].

3. Некоторые уравнения, возникающие в механике твердого тела. При исследовании ряда механических систем уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \kappa \mathbf{M} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma} \in R^3, \quad \kappa = 0, \pm 1 \quad (3.1)$$

Рассмотрим систему (3.1) при

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\gamma} \times \partial H / \partial \boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{Q} = 0 \quad (3.2)$$

Такие уравнения, в частности при $\kappa = 0$, возникают в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в осесимметричном поле сил и в задаче о движении твердого тела в идеальной несжимаемой жидкости; при $\kappa = 1$ они возникают в задаче о движении твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение; при $\kappa = -1$ они возникают в задаче о движении твердого тела по поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Если функция Гамильтона H не зависит явно от времени, то она – первый интеграл уравнений движения. Кроме того, функции

$$J_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad J_2 = 1/2((\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) + \kappa(\mathbf{M}, \mathbf{M})) \quad (3.3)$$

представляют собой первые интегралы системы (3.1), (3.2), какой бы ни была функция Гамильтона H .

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого состоит в прямой проверке.

Утверждение 7. Система уравнений (3.1), (3.2) представима в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{M}} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial J_1}{\partial \mathbf{M}} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \kappa \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad (3.4)$$

Ограничение системы (3.1), (3.2) на неособый совместный уровень интегралов J_1 , J_2 может быть описано канонической системой уравнений Гамильтона с двумя степенями свободы.

Рассмотрим теперь систему уравнений (3.1) при

$$\mathbf{P} = 0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (3.5)$$

где обобщенный момент $\mathbf{Q}$ – некоторая достаточно гладкая функция своих аргументов.

Утверждение 8. Если система (3.1), (3.5) допускает первые интегралы H и J_1 , то ее первую подсистему можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} + \alpha \boldsymbol{\gamma}) \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}} + \boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \alpha = \alpha(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (3.6)$$

Доказательство. Так как функции H и J_1 – первые интегралы, то компоненты вектора $\mathbf{Q}$ удовлетворяют соотношениям

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \mathbf{Q} \right) + \left(\boldsymbol{\gamma} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right) = 0, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Q}) = 0 \quad (3.7)$$

или

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{M}}, \mathbf{Q}^* \right) = 0, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{Q}^*) = 0, \quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} \quad (3.8)$$

Тогда в силу соотношений (3.7) $\mathbf{Q}^* = \alpha \boldsymbol{\gamma} \times \partial H / \partial \mathbf{M}$, что при учете последнего соотношения (3.8) доказывает требуемый результат.

При $\kappa = 0$, $\alpha = 0$ уравнения (3.1), (3.5) представляют собой уравнения Эйлера – Пуассона. Такая связь между существованием интеграла типа интеграла энергии и наличием у системы пуассоновой структуры изучалась ранее [3]. Приведем соответствующие результаты в качестве примера.

Пример 1. Движение тела с неподвижной точкой в потоке частиц. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки G под действием однородного потока частиц, направленного вдоль единичного вектора $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, фиксированного в абсолютном пространстве. Будем считать, что частицы сталкиваются с телом абсолютно неупруго, ρ – плотность потока частиц, V – величина скорости потока, $S(\boldsymbol{\gamma})$ – площадь миделева сечения тела (т.е. площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную потоку), $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, соединяющий неподвижную точку с произвольной точкой прямой, коллинеарной вектору $\boldsymbol{\gamma}$ и проходящей через центр масс миделева сечения тела $\mathcal{S}(\boldsymbol{\gamma})$. Вектор $\mathbf{s}$ в общем случае зависит от $\boldsymbol{\gamma}$. Если $\mathbf{I}$ –

тензор инерции тела относительно неподвижной точки, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела, то в случае, когда скорость потока существенно больше линейных скоростей точек тела, уравнения движения имеют вид [3]

$$\dot{\mathbf{I}}\omega = \mathbf{I}\omega \times \omega + f\gamma \times \mathbf{c}(\gamma)S(\gamma), \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad f = \rho V^2 \quad (3.9)$$

Было отмечено [3], что если существует функция $U = U(\gamma)$, такая, что

$$\mathbf{c}(\gamma)S(\gamma) = \partial U / \partial \gamma \quad (3.10)$$

то уравнения (3.9) представляют собой уравнения Пуанкаре – Четаева. Однако в общем случае условие (3.10) не имеет места. Так для тела, ограниченного эллипсоидальной поверхностью с полуосями b_1, b_2, b_3 , коллинеарными осям связанной с телом системы координат, площадь миделева сечения S определяется соотношением

$$S(\gamma) = \pi b_1 b_2 b_3 (\gamma_1^2/b_1^2 + \gamma_2^2/b_2^2 + \gamma_3^2/b_3^2)^{1/2} \quad (3.11)$$

В качестве вектора $\mathbf{c}$, как и в любом другом случае, когда поверхность тела центрально-симметрична, можно взять вектор, соединяющий неподвижную точку и центр эллипсоидальной поверхности. Этот вектор постоянен в связанной с телом системе координат, в силу чего условие (3.10) в случае, когда все полуоси b_i различны, оказывается невыполненным. Вместе с тем, если тело ограничено поверхностью вращения с осью, проходящей через неподвижную точку, причем $b_1 = b_2 = b$, $\mathbf{c} = (0, 0, c_3)$, то в силу выполнения соотношения $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ потенциал U существует и записывается в виде эллиптической квадратуры

$$U(\gamma_3) = \pi b b_3 c_3 \int_0^{\gamma_3} \left(1 + \frac{b^2 - b_3^2}{b_3^2} u^2 \right)^{1/2} du \quad (3.12)$$

Если тензор $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$ – симметричен и $I_1 = I_2$, то уравнения движения допускают дополнительный интеграл $J_3 = I_3 \omega_3$ и оказываются вполне интегрируемыми.

Как известно, для интегрирования уравнений (3.1), (3.2) в общем случае недостает одного первого интеграла. Классические случаи существования такого первого интеграла (см., например, [4]), а также недавно найденный случай [14], хорошо известны в механике.

Рассмотрим систему (3.1) при

$$\mathbf{P} = \gamma \times \partial H / \partial \gamma, \quad \mathbf{Q} \neq 0 \quad (3.13)$$

Спрашивается, при каких условиях, налагаемых на компоненты вектора $\mathbf{Q}$, уравнения (3.1), (3.13) сохраняют дополнительный интеграл.

Пусть, например, дополнительный интеграл имеет вид

$$J_3 = 1/2(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + U(\gamma) \quad (3.14)$$

как это имеет место, скажем, в случае Клебша.

Утверждение 9. Если помимо интеграла J_1 уравнения (3.1), (3.13) допускают интеграл вида (3.14), то

$$\mathbf{Q} = \alpha \mathbf{M} \times \gamma, \quad \alpha = \alpha(\mathbf{M}, \gamma) \quad (3.15)$$

Доказательство. Дифференцируя J_1, J_3 в силу системы (3.1), (3.13), имеем

$$(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) = 0, \quad (\gamma, \mathbf{Q}) = 0 \quad (3.16)$$

откуда и находим соотношение (3.15).

Интересно заметить, что если обобщенный момент Q имеет вид (3.15), то уравнения (3.14) допускают также интеграл J_2 .

Пример 2. Движение тела с неподвижной точкой в магнитном поле. Была рассмотрена ([4], см. также [15, 16]) задача о движении твердого тела в постоянном однородном магнитном поле с напряженностью γ в предположении о том, что тело изготовлено из материала, намагничивающегося при вращении (эффект Барнетта – Лондона). Если пренебречь эффектом де Гааза – Эйнштейна, двойственным эффектом Барнетта – Лондона и состоящим в том, что при намагничивании тело из такого материала начинает вращаться, то, согласно упомянутым работам, уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\dot{M} = M \times I^{-3} M + A M \times \gamma, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times I^{-1} M$$

Тогда, если $A = \alpha E$, $\alpha = \text{const}$, то эти уравнения принадлежат классу уравнений (3.14), (3.15).

4. Гамильтонова структура линейных дифференциальных уравнений. Исследовался [2] вопрос о гамильтоновой структуре линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих квадратичный первый интеграл. Как известно, линейные дифференциальные уравнения всегда могут быть проинтегрированы в явном виде, однако в общем случае первые интегралы оказываются рациональными. Оказывается, что в ряде случаев можно выполнить нелинейную замену переменных, сохраняющую линейность дифференциальных уравнений и приводящую соответствующие интегралы к квадратичному виду.

Рассмотрим простейший пример. Пусть

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 \quad (4.1)$$

Эти уравнения вполне интегрируемы, они допускают два неавтономных первых интеграла

$$F_i(x_i) = e^{-\lambda_i t} x_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.2)$$

из которых можно сконструировать один не зависящий явно от времени первый интеграл, имеющий вид

$$F = x_1^{\lambda_2} / x_2^{\lambda_1} \quad (4.3)$$

в области $\mathcal{X} = \{x: x_1 > 0, x_2 > 0\}$ остальные области рассматриваются аналогично.

Выполним в $\mathcal{X}$ замену переменных

$$X_i = x_i^{\mu_i}, \quad i = 1, 2$$

которая имеет особенности лишь на границе области $\mathcal{X}$. Тогда

$$\dot{X}_i = \mu_i x_i^{\mu_i-1} \dot{x}_i = (\mu_i \lambda_i) X_i, \quad i = 1, 2$$

Полагая

$$\lambda_1 \mu_1 = 1, \quad \lambda_2 \mu_2 = -1$$

приводим уравнения движения к виду

$$\dot{X}_1 = X_1 = \partial H / \partial X_2, \quad \dot{X}_2 = -X_2 = -\partial H / \partial X_1, \quad H(X_1, X_2) = X_1 X_2$$

Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda x_2 \quad (4.4)$$

Как известно, общее решение такой системы имеет вид

$$x_1 = (C_2 t + C_1) e^{\lambda t}, \quad x_2 = C_2 e^{\lambda t}$$

откуда не зависящий от времени первый интеграл записывается как

$$F = \lambda x_2 e^{-\lambda x_1/x_2}$$

Тогда заменой переменных

$$X_1 = e^{-\lambda x_1/x_2}, \quad X_2 = x_2$$

уравнения (4.4) приводятся к виду

$$\dot{X}_1 = \lambda X_1 = \frac{\partial H}{\partial X_2}, \quad \dot{X}_2 = -\lambda X_2 = -\frac{\partial H}{\partial X_1}, \quad H = \lambda X_1 X_2$$

Таким образом, если линейная система в каноническом виде образована двумерными блоками вида (4.1) или (4.4), то описанные выше замены приводят ее к гамильтонову виду всюду, за исключением координатных осей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96150, 01-01-02001), Федеральной целевой программы "Интеграция", Национального научного фонда (NSF), Учебно-научного центра по математике, информатике и научным вычислениям Национальной школы мостов и шоссе (CERMICS ENPC).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jacobi K.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Reimer, 1884. 189 s.
2. *Козлов В.А.* Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
3. *Буров А.А., Каранетян А.В.* О движении тела в потоке частиц // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 77–81.
4. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 429 с.
5. *Blankenstein G., van der Schaft A.J.* Symmetry and reduction in implicit generalized Hamiltonian systems // Rep. Math. Phys. 2001. V. 47. № 1. P. 57–100.
6. *van der Schaft A.J., Maschke B.M.* Interconnected mechanical systems. Pt 1.: Geometry of interconnection and implicit Hamiltonian systems // Proc. Workshop Modelling and Control of Mechanical Systems. L.: Imperial Colledge, 1997. P. 1–15.
7. *Blankenstein G., van der Schaft A.J.* Symmetry and Reduction in Implicit Generalized Hamiltonian Systems // Memorandum 1489. Twente: University of Twente, Faculty of Math. Sci. 1999. 41 p.
8. *Blankenstein G., van der Schaft A.J.* Reduction of implicit Hamiltonian systems with symmetry // Proc. 5th Europ. Control Conf. ECS'99. Karlsruhe: 1999.
9. *Dalsmo M., van der Schaft A.* On representations and integrability of mathematical structures in energy-conserving physical systems // SIAM Journal Contr. and Optimiz. 1999. V. 37. № 1. P. 54–91.

10. *la Vallée Poussin Ch.-J. de.* Cours d'analyse Infinitésimale. Louvain: Librairie Univ.; Paris. Gauthier-Villars, 1925 = де ла Валле-Пуссен Ш.-Ж. Курс анализа бесконечно малых. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1933. 468 с.
11. *Галиуллин А.С., Гафаров Г.Г., Малайшжа Р.П. и др.* Аналитическая динамика систем Гельмгольца, Биркгофа, Намбу. М.: Редакция журнала "Успехи физических наук", 1997. 324 с.
12. *Morse M.* Relations between the critical points of a real function of n independent variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1925. V. 27. № 3. P. 345–396.
13. *Hirsh M.W.* Differential Topology. N.Y., etc.: Springer, 1976 = Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
14. *Соколов В.В.* Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // Теорет. мат. физика. 2001. Т. 129. № 1. С. 31–37.
15. *Самсонов В.А.* О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 4. С. 32–34.
16. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.

Москва
e-mail: aburov@ccas.ru

Поступила в редакцию
23.VII.2001