

УДК (539.3+624.07):534.1

© 2003 г. А.П. Малышев

**ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ
ЧАСТОТНО-НЕЗАВИСИМОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ
ПО АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ
КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ**

Получены соотношения, связывающие напряжения и деформации при колебаниях с коэффициентом поглощения, и на их основе построена процедура моделирования частотно-независимого рассеяния энергии. Учтено, что демпфирование снижает резонансную частоту и в процессе колебаний не наблюдается накопления остаточных напряжений и деформаций. Полученные с помощью этой процедуры модели могут использоваться при любом, в том числе нестационарном изменении нагрузки по времени. Подробно исследован важный для практики случай степенной зависимости коэффициента поглощения от амплитуды. В качестве примера рассмотрены вынужденные поперечные колебания стержня. В одномодовом приближении получены асимптотическое и численное решения задачи.

Частотно-независимое рассеяние энергии связано, прежде всего, с конструкционным демпфированием, а при уровне напряжений, соизмеримом с пределом усталости, также и с потерями энергии в материале. Обычно это основной вид рассеяния энергии в конструкциях и сооружениях. Для его учета при стационарных колебаниях используются различные аппроксимации петли гистерезиса. Ширина петли обычно мала, и характер колебаний определяется в первую очередь площадью петли, а не ее формой. В этом случае многочисленные модели оказываются в значительной степени эквивалентными и часто могут быть заменены моделью с эллиптической гистерезисной петлей, удобной для проведения расчетов. Метод комплексных жесткостей на практике также применим к установившимся гармоническим или близким к ним колебаниям [1–3].

Когда рассматриваются переходные и волновые процессы, указанные способы описания частотно-независимого демпфирования часто оказываются неэффективными. Использование одних из них приводит к появлению остаточных деформаций. В других моделях зависимости напряжений от деформаций имеют участки, где напряжения терпят разрыв [1]. Наличие разрывов приводит к тому, что в исследуемом объекте появляются области с бесконечной скоростью распространения возмущений. Разработка моделей частотно-независимого демпфирования, не имеющих подобных недостатков, остается актуальной проблемой.

1. Процедура построения модели. В основу процедуры положено определение коэффициента поглощения как отношения энергии, рассеянной за цикл колебаний, к максимальной потенциальной энергии в течение цикла [1]. Прежде всего, примем во внимание, что модуль упругости, который определим при стремящейся к нулю амплитуде колебаний, является максимальным касательным модулем. С увеличением амплитуды нарастающее частотно-независимое демпфирование снижает частоту собственных колебаний, скорость распространения возмущений и определяющую их величину касательного модуля. Будем считать, что рассеяние энергии происходит одинаково на этапах нагрузки и разгрузки, причем оно не сопровождается появлением остаточных напряжений и деформаций. В силу последнего обстоятельства петля

гистерезиса как при полном снятии нагрузок, так и при знакопеременном нагружении должна проходить через начало координат в плоскости параметров деформация – напряжение.

Наложенные ограничения на форму петли гистерезиса позволяют записать следующее выражение для коэффициента поглощения при стационарных колебаниях по симметричному циклу:

$$\psi = 4\left(1 - \frac{\sigma\epsilon}{2P}\right), \quad P = \int_0^{\epsilon} \sigma(\epsilon_1) d\epsilon_1, \quad \epsilon > 0 \quad (1.1)$$

где ψ – коэффициент поглощения, σ и ϵ – максимальные напряжения и деформация, достигнутые на этапе нагрузки, P – наибольшая величина потенциальной энергии в цикле.

Очевидно, что $\sigma(\epsilon) = P'$ (штрихом обозначается производная по ϵ) и выражение для P можно записать в виде дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданном коэффициенте $\psi(\epsilon)$

$$\epsilon P' = (2 - \psi/2)P \quad (1.2)$$

Его решение имеет вид

$$P = C\epsilon^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^{\epsilon} \frac{\psi(\epsilon_1)}{\epsilon_1} d\epsilon_1\right) \quad (1.3)$$

где C – постоянная, определяемая из начальных условий для $P(\epsilon)$.

Когда известен закон изменения коэффициента поглощения $\psi(\epsilon)$, формула (1.3) дает возможность определить вид диаграммы $\sigma - \epsilon$ на этапе нагрузки. Далее напряжения будем относить к величине модуля упругости. Сформулированные ранее требования к виду диаграммы $\sigma - \epsilon$ налагают следующие ограничения на функцию $P(\epsilon)$:

$$0 \leq P'' \leq 1, \quad P''(0) = 1 \quad (1.4)$$

Учтено, что $P'' = \sigma'$ – текущий касательный модуль.

В дальнейшем полагаем, что диаграмма $\sigma - \epsilon$ имеет одинаковый вид для растяжения и сжатия, поэтому вторая производная P'' должна быть четной функцией.

Заметим, что всем перечисленным условиям отвечает, например, функция $P'' = 1$. Дважды проинтегрировав ее и приняв во внимание, что $P(0) = 0$ и $\sigma(0) = 0$, получим $P = \epsilon^2/2$. Такой вид функции $P(\epsilon)$, как известно, соответствует абсолютно упругому деформированию. После подстановки этого выражения в уравнение (1.2) тоже получим, что $\psi = 0$, т.е. колебания не сопровождаются рассеянием энергии. Полученный результат подтверждает непротиворечивость принятых исходных положений.

Экспериментальные зависимости коэффициента поглощения от амплитуды обычно аппроксимируются степенной функцией [2, 3]

$$\psi = A\epsilon^{\alpha} \quad (1.5)$$

После подстановки выражения (1.5) в решение (1.3) с учетом условия (1.4) при $\epsilon = 0$ получим, когда $\alpha \neq 0$,

$$P = \frac{\epsilon^2}{2} \exp\left(-\frac{\psi}{2\alpha}\right), \quad \sigma = \left(1 - \frac{\psi}{4}\right)\epsilon \exp\left(-\frac{\psi}{2\alpha}\right) \quad (1.6)$$

Когда $\alpha = 0$, т.е. уровень демпфирования не зависит от амплитуды, имеем

$$P = C\epsilon^{2-\theta}, \quad \sigma = C(2-\theta)\epsilon^{1-\theta}, \quad \theta = A/2 \quad (1.7)$$

Производная σ' при $\alpha = 0$ имеет особенность в точке $\varepsilon = 0$. Это означает, что при очень малых амплитудах колебаний частотно-независимое рассеяние энергии, по крайней мере согласно принятому способу моделирования, не может оставаться постоянным.

С учетом разгрузки можно принять [4]

$$\sigma = \left(1 - \frac{z}{4}\right)(\varepsilon - \varepsilon_m) \exp\left(-\frac{z}{2\alpha}\right) + \sigma_m, \quad z = A|\varepsilon - \varepsilon_m|^\alpha$$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{\alpha+3}{4}z + \frac{z^2}{8}\right) \exp\left(-\frac{z}{2\alpha}\right)$$
(1.8)

где ε_m и σ_m – деформация и напряжение в момент последней смены нагрузки на разгрузку или наоборот. Далее везде нижним индексом m будут отмечаться значения параметров в этот момент времени.

Касательный модуль, согласно условиям (1.4), не может быть отрицательным. Это утверждение аналогично положению о выпуклости поверхности нагружения, принимаемому в теории пластичности [5]. Анализ выражения для σ' , согласно последнему соотношению (1.8), показывает, что наименьшее значение z , вплоть до которого на этапе нагрузки $\sigma' \geq 0$, определяется равенством

$$z_* = \alpha + 3 - \sqrt{\alpha^2 + 6\alpha + 1}$$

Так как равенства (1.8) можно применять только при $z < z_*$, это значение z ограничивает наибольший коэффициент поглощения, который может быть воспроизведен моделью в случае степенной зависимости $\psi(\varepsilon)$.

В практических расчетах бывает удобнее пользоваться разложением выражений в ряд по степеням z

$$\sigma = \left(1 - \frac{\alpha+2}{4\alpha}z + \frac{\alpha+1}{8\alpha^2}z^2 - \frac{3\alpha+2}{96\alpha^3}z^3 + O(z^4)\right)(\varepsilon - \varepsilon_m) + \sigma_m$$

$$\sigma' = 1 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{4\alpha}z + \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1)}{8\alpha^2}z^2 -$$

$$- \frac{(3\alpha+1)(3\alpha+2)}{96\alpha^3}z^3 + O(z^4), \quad \alpha \neq 0$$
(1.9)

2. Поперечные колебания стержня. Рассмотрим вынужденные плоские поперечные колебания тонкого однородного прямолинейного стержня, шарнирно опертого по краям. Для учета рассеяния энергии используем описанную выше модель со степенной зависимостью коэффициента поглощения от амплитуды. Введем безразмерные параметры, полагая, что все линейные размеры и прогиб стержня отнесены к величине $\sqrt{F}$, где F – площадь поперечного сечения. Время отнесем к $\sqrt{F}/c$, напряжения, как и ранее, – к модулю упругости E , а погонную нагрузку – к $E\sqrt{F}$. Здесь $c^2 = E/\rho$, c – скорость звука в стержне, ρ – плотность. Ограничимся исследованием слабого демпфирования и учтем только два первых слагаемых разложения (1.9)

$$\sigma = \left(1 - \frac{\alpha+2}{4\alpha}A|\varepsilon - \varepsilon_m|^\alpha\right)(\varepsilon - \varepsilon_m) + \sigma_m$$
(2.1)

Примем для определенности, что стержень имеет прямоугольное сечение $h \times b$. Тогда, воспользовавшись равенством (2.1), получим

$$M = \frac{J}{r} \left(1 - b \left| \frac{1}{r_m} - \frac{1}{r} \right|^\alpha \right) - b \frac{J}{r_m} \left(\left| \frac{1}{r_m} \right|^\alpha - \left| \frac{1}{r_m} - \frac{1}{r} \right|^\alpha \right) \quad (2.2)$$

$$b = \frac{3(\alpha + 2)}{4\alpha(\alpha + 3)} A \left(\frac{h}{2} \right)^\alpha$$

где M – изгибающий момент, r – радиус кривизны нейтрального слоя, J – момент инерции сечения.

Уравнение движения стержня под действием распределенной гармонической нагрузки q имеет вид

$$M_{xx} + w_{tt} = q \sin vt \quad (2.3)$$

где w – прогиб стержня, индексами x и t обозначено дифференцирование по осевой координате x и времени t .

Поскольку рассматривается слабое демпфирование, будем считать, что его влиянием на форму колебаний можно пренебречь, и ограничимся одномерным приближением колебаний стержня

$$w(x, t) = W(t) \sin kx, \quad \frac{1}{r} = -k^2 W \sin kx, \quad q(x) = Q \sin kx \quad (2.4)$$

$$M(x, t) = M_0(t) \sin kx, \quad k = \frac{\pi}{l}$$

где l – длина стержня.

Равенства (2.2), (2.3), подставив в них соотношения (2.4), умножаем на $\sin kx$ и интегрируем по x от 0 до l . После исключения изгибающего момента уравнение движения можно записать следующим образом:

$$W_{tt} + k^4 JW = \xi f(W) + Q \sin vt$$

$$f(W) = W |W_m - W|^\alpha + W_m (|W_m|^\alpha - |W_m - W|^\alpha) \quad (2.5)$$

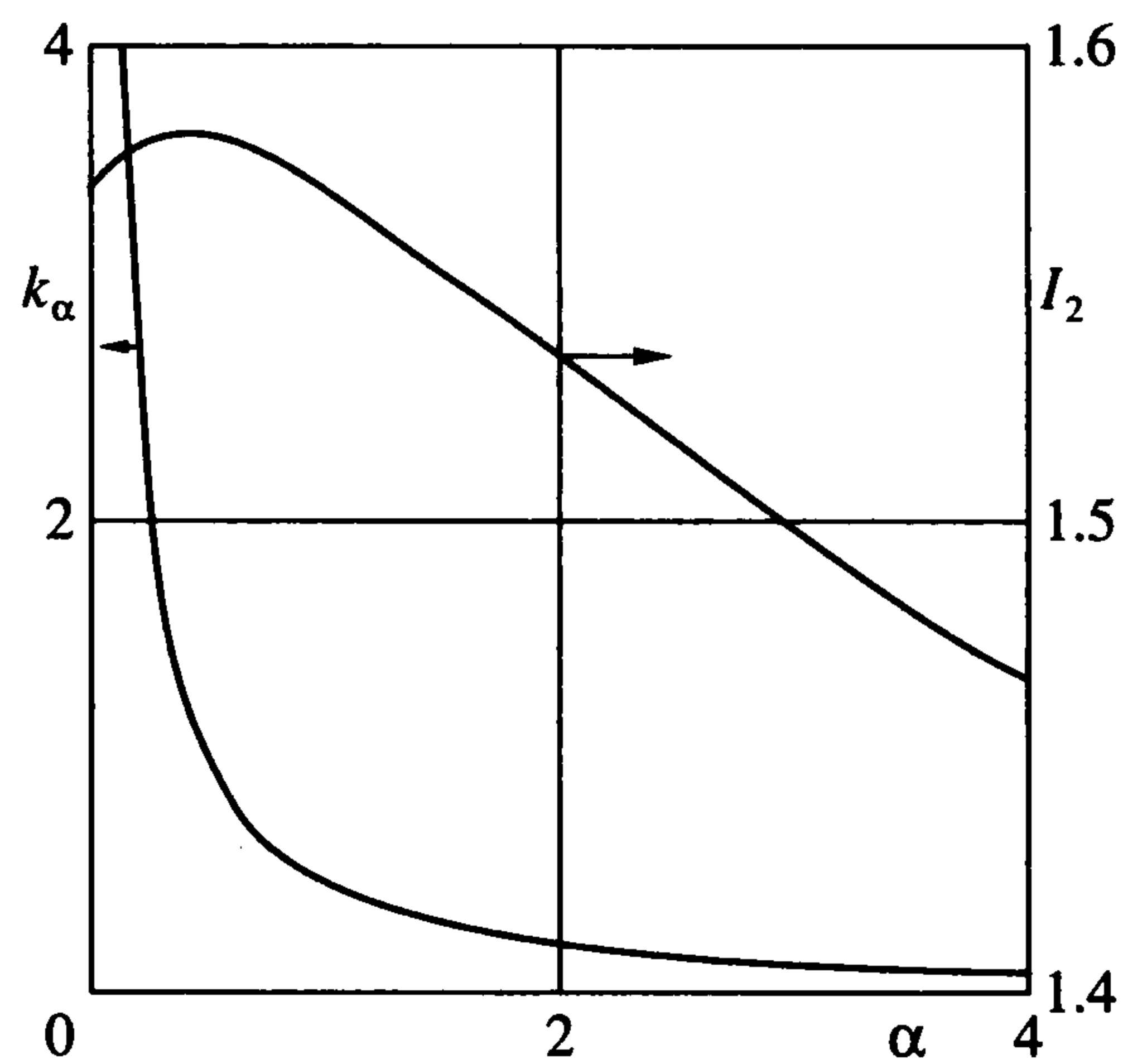
$$\xi = k_\alpha A J \left(\frac{h}{2} \right)^\alpha \left(\frac{\pi}{l} \right)^{4+2\alpha}, \quad k_\alpha = \frac{3}{\sqrt{\pi} \alpha (\alpha + 3)} \frac{\Gamma(\alpha/2 + 3/2)}{\Gamma(\alpha/2 + 1)}$$

Величина ξ может рассматриваться как малый параметр. При выбранном способе введения безразмерных параметров $(\pi/l)^{4+2\alpha} \ll 1$, а множитель A , пропорциональный коэффициенту поглощения, – малая величина. Зависимость k_α от α показана на фиг. 1. Остальные множители в выражении для ξ имеют величину порядка h^n , где $n > 1$.

Рассмотрим колебания стержня под действием гармонической нагрузки малой амплитуды, когда можно принять, что $Q = \xi R$. Уравнение (2.5) будем решать методом асимптотического усреднения [6]. Перейдем к оскулирующим переменным – амплитуде a и фазовому сдвигу ϑ

$$W = a \cos(vt + \vartheta) \quad (2.6)$$

причем a и ϑ должны удовлетворять равенствам



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
 a_t &= -\delta_e a - \frac{\xi R}{\omega + \nu} \cos \vartheta, \quad \vartheta_t = \omega_e - \nu + \frac{\xi R}{a(\omega + \nu)} \sin \vartheta; \quad \omega^2 = Jk^4 \\
 \delta_e &= \frac{\xi}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{\xi}{2\pi \omega} a^\alpha I_1, \quad I_1 = \frac{2\alpha}{\alpha + 2} \\
 \omega_e^2 &= k_e = \omega^2 - \frac{\xi}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi = \omega^2 - \frac{2\xi}{\pi} a^\alpha I_2 \\
 I_2 &= 1 - \int_0^{\pi/2} [(1 - \cos \varphi)^{\alpha+1} \cos \varphi - \sin^{\alpha+2} \varphi] d\varphi
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь δ_e , k_e , ω_e — декремент, жесткость и частота собственных колебаний эквивалентной линеаризованной системы. Частота внешней нагрузки ν близка к ω_e .

Интеграл I_2 удастся выразить в квадратурах только для отдельных значений α ; например, при $\alpha = 0, 1, 2, 4$ он равен $\pi/2, \pi/2, 9\pi/8 - 2, 55\pi/16 - 28/3$ соответственно. Полученная численным интегрированием зависимость $I_2(\alpha)$ показана на фиг. 1. При $0 < \alpha < 2$ с точностью до 1.3% можно принять $I_2 = 1.55$.

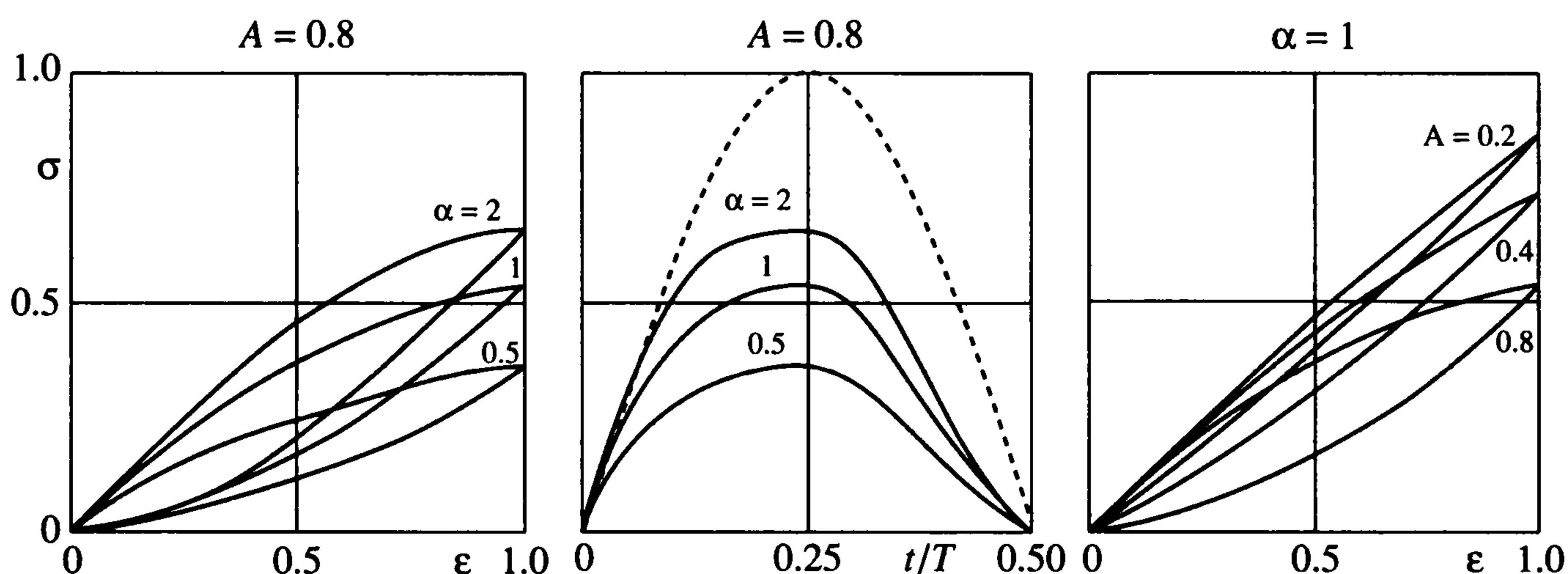
В случае стационарных колебаний следует положить $a_t = 0$ и $\vartheta_t = 0$. Тогда, исключив ϑ из первых двух равенств (2.7), получим

$$a^2 [(\omega_e - \nu)^2 (\omega + \nu)^2 + \delta_e^2 (\omega + \nu)^2] a^2 = \xi^2 R^2 \tag{2.8}$$

С точностью до величин порядка ξ^2 соотношение (2.8) преобразуется к виду

$$a^2 [(\omega_e^2 - \nu^2)^2 + 4\omega^2 \delta_e^2] = Q^2 \tag{2.9}$$

Чтобы уравнение (2.9) моделировало рассеяние энергии, не зависящее от частоты возбуждения ν , при аппроксимации слагаемого, которое содержит δ_e^2 , вместо обычно используемой замены $(\omega + \nu)^2 \approx 4\nu^2$ сделана подстановка $(\omega + \nu)^2 \approx 4\omega^2$, имеющая тот



Фиг. 2

же порядок точности. Воспользовавшись выражениями (2.7) для δ_e^2 и ω_e^2 , после преобразований имеем

$$u^2 = [(1 - I_2 s u^\alpha - p^2)^2 + I_1^2 s^2 u^{2\alpha}]^{-1} \quad (2.10)$$

$$u = \frac{\omega^2}{Q} a, \quad s = \frac{2}{\pi} Q^\alpha \left(\frac{\xi}{\omega^2} \right)^{\alpha+1}, \quad p = \frac{v}{\omega}$$

На основании равенства (2.10) выражениями для резонансной кривой, скелетной кривой и коэффициента поглощения будут соответственно

$$p = (1 - I_2 s u^\alpha \pm (1/u^2 - I_1^2 s^2 u^{2\alpha})^{1/2})^{1/2} \quad (2.11)$$

$$p = (1 - I_2 s u^\alpha)^{1/2}, \quad \psi = 2\pi I_1 s u^\alpha$$

Помимо асимптотического решения для уравнения (2.5) было также получено численное решение. После введения параметров, нормированных аналогично параметрам в выражении (2.10), уравнение (2.5) можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 u^*}{d\tau^2} + u^* = \frac{\pi}{2} s f(u^*) + \sin p\tau \quad (2.12)$$

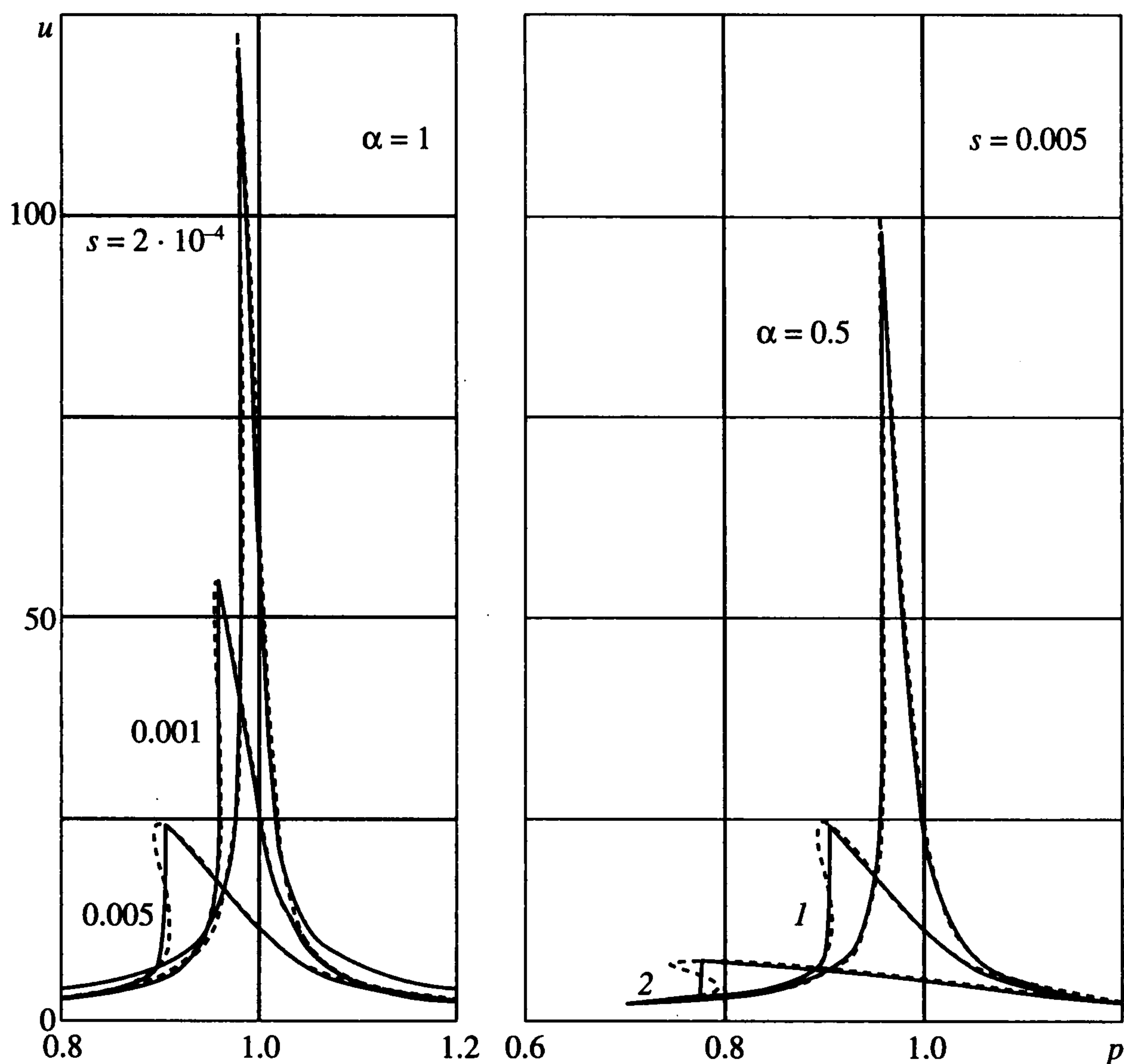
$$f(u^*) = u^* |u_m^* - u^*|^\alpha + u_m^* (|u_m^*|^\alpha - |u_m^* - u^*|^\alpha), \quad u^* = \frac{\omega^2}{Q} W, \quad \tau = t\omega$$

Нагрузка соответствует $du^*/d\tau \geq 0$. Как и в асимптотическом решении, u – амплитудное значение параметра u^* .

Уравнение (2.12) было сведено к системе двух уравнений первого порядка и интегрировалось при нулевых начальных условиях методом Рунге–Кутты четвертого порядка [7].

Шаг интегрирования принимался равным 10^{-3} . Контрольные расчеты с шагом 10^{-4} во всех случаях показали совпадение результатов с точностью не менее четырех значащих цифр. Стационарные режимы достигались за счет достаточно большого времени наблюдения, в течение которого переходные процессы успевали затухнуть.

3. Результаты численных расчетов. Петли гистерезиса, соответствующие степенной зависимости коэффициента поглощения от амплитуды, при изменении параметров модели меняют не только форму, но и ориентацию на плоскости $\sigma - \epsilon$. На фиг. 2



Фиг. 3

слева показаны петли для различных значений α и фиксированного параметра $A = 0.8$. Деформация при этом изменялась по гармоническому закону с единичной амплитудой. Видно, что с ростом α увеличивается не только площадь петли, но и угол ее наклона к оси абсцисс. Форма петли обладает центральной симметрией относительно начала координат, а каждый из ее лепестков симметричен относительно середины отрезка, соединяющего начало координат с максимальным напряжением. Такая форма петли полностью согласуется с соотношением (1.1). Подобные петли гистерезиса характерны и для модели [4], которая получена совершенно другим путем, но также может удовлетворительно аппроксимировать степенные амплитудные характеристики коэффициента поглощения. По структуре она оказалась близкой к рассматриваемой модели в случае слабого демпфирования.

В средней части фиг. 2 приведено изменение напряжений по времени при тех же значениях параметров. Время отнесено к периоду колебаний T . Для сравнения штриховой линией показан закон изменения деформаций. Форма кривых обладает центральной симметрией относительно точки $(0.5, 0)$. В конце этапов нагрузки и разгрузки напряжения изменяются значительно медленнее, чем в начале, и на полу волнах формируются почти плоские участки с малой кривизной. Рост их ширины с уменьшением параметра α сопровождается падением амплитуды напряжений. При изменении знака напряжений на кривых $\sigma(t)$ четко виден излом. Переход от нагрузки к разгрузке после достижения максимальных напряжений проходит более гладко.

Справа на фиг. 2 показано изменение петли гистерезиса, когда варьируется параметр A с сохранением линейной зависимости коэффициента поглощения от ампли-

туды, т.е. при $\alpha = 1$. Здесь с ростом A площадь петли растет, однако наклон ее к горизонтальной оси при этом не увеличивается, как в предыдущем случае, а уменьшается.

На фиг. 3 слева приведены резонансные кривые для стационарных колебаний стержня при $\alpha = 1$ и различных значениях параметра s , а справа – при постоянном $s = 0.005$ и разных α . Сплошные линии соответствуют численному решению, а штриховые – асимптотическому. Решение, полученное численным интегрированием уравнения движения, естественно, не описывает неустойчивые участки резонансных кривых, построенные согласно асимптотическому решению. В ходе интегрирования просто наблюдается скачкообразное изменение амплитуды слева от резонансного пика. В рассмотренном диапазоне изменения параметров асимптотическое решение обеспечивает достаточно высокую точность результатов. На это указывает его хорошее совпадение с численным решением.

Полученная форма резонансных кривых обусловлена нелинейностью динамической системы и соответствует “мягкой” характеристике восстанавливающей силы, когда скорость нарастания силы уменьшается с увеличением смещений. Рост параметров α , s и связанное с этим усиление демпфирования вызывают понижение частоты, на которой наблюдается скачок в величине амплитуды, а также частоты, где наблюдается пик резонансной кривой. При очень слабом демпфировании форма резонансного пика становится близкой к симметричной.

Предложенная процедура позволяет строить модели частотно-независимого рассеяния энергии, применение которых не приводит к накоплению остаточных деформаций, причем зависимости напряжений от деформаций, соответствующие им, не содержат разрывов напряжений. Поэтому их удобно использовать для описания не только периодических, но и волновых переходных процессов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 193 с.
2. Вибрации в технике. Справочник. Т. 6 / Под ред. К.В. Фролова. М.: Машиностроение, 1995. 460 с.
3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев: Наук. думка, 1971. 374 с.
4. Малышев А.П. Дифференциальная модель частотно-независимого рассеяния энергии при колебаниях // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 127–133.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584 с.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 430 с.