

УДК 539.3

© 2003 г. Н. Г. Хомасуридзе

ТЕРМОУПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ

Методом разделения переменных в сферической системе координат строится эффективное решение всевозможных граничных задач термоупругости для полого бесконечного конуса и бесконечной конической панели, когда на плоских границах панели ставятся условия симметрии или антисимметрии. В случае, когда указанные тела многослойны, строится решение гранично-контактных задач термоупругости. Контактными поверхностями являются конические поверхности. На тело воздействует стационарное температурное поле и поверхностные возмущения. Кроме этого, указанным способом решаются некоторые граничные задачи теории упругости для тел, ограниченных координатными поверхностями сферической системы координат, когда на конических поверхностях тела задаются неоднородные граничные условия, на плоских границах – условия симметрии или антисимметрии, а на сферических поверхностях – специальные однородные граничные условия.

Упругое равновесие бесконечных конических тел исследовали многие авторы (см. краткий обзор этих работ в [1]). Была решена [1] задача об упругом равновесии полного бесконечного конуса. По-видимому, до сих пор не была решена даже задача об упругом равновесии полого бесконечного конуса.

1. Постановка задачи. В сферической системе координат r, α, β рассматриваются и решаются два класса задач:

1) статические задачи термоупругости для бесконечной конической панели

$$\Omega = \{0 < r < \infty, 0 < \alpha < \alpha_1, \beta_0 < \beta < \beta_1\} \quad (1.1)$$

и для многослойной бесконечной конической панели

$$\Omega^* = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots$$

где

$$\Omega_k = \{0 < r < \infty, 0 < \alpha < \alpha_1, \beta_k < \beta < \beta_{k+1}\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

причем здесь и далее при $\alpha = \alpha_j$ ($j = 0, 1; \alpha_0 = 0$) ставятся условия симметрии или антисимметрии [2];

2) некоторые граничные задачи теории упругости для конечной конической панели

$$\Omega = \{r_0 < r < r_1, 0 < \alpha < \alpha_1, \beta_0 < \beta < \beta_1\} \quad (1.3)$$

когда при $r = r_j$ ($j = 0, 1$) ставятся специальные условия.

В обоих классах задач возмущение вводится с конических поверхностей $\beta = \beta_0$ и $\beta = \beta_1$, а в случае многослойного тела – и с конических контактных поверхностей. Для бесконечной конической панели граничные условия и температурные возмущения на конических поверхностях $\beta = \beta_0$ и $\beta = \beta_1$ могут быть произвольными, так же как и контактные условия в случае термоупругого равновесия многослойной панели.

2. Уравнения равновесия, граничные условия и общее решение. Уравнения термоупругого равновесия для однородного изотропного тела можно представить в виде [3]

$$\Delta U - \frac{2}{\kappa - 2} \text{grad div } U - \frac{8 - \kappa}{\kappa - 2} \gamma \text{grad } T = 0, \quad \Delta T = 0; \quad \kappa = 4(1 - \nu) \quad (2.1)$$

Здесь $U = u_1 l_1 + u_2 l_2 + u_3 l_3$, – вектор смещений вдоль осей декартовой системы координат, T – изменение температуры тела, ν – коэффициент Пуассона, γ – коэффициент линейного теплового расширения.

Из первого уравнения (2.1) следует, что $\Delta \text{div } U = 0$, поэтому

$$2 \text{grad } T = \Delta(\mathbf{R}, T), \quad 2 \text{grad div } U = \Delta(\mathbf{R} \text{div } U), \quad \mathbf{R} = x l_1 + y l_2 + z l_3$$

При помощи этих равенств первое уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\Delta[2(\kappa - 2)U + \mathbf{R}(2 \text{div } U - (8 - \kappa)\gamma T)] = 0 \quad (2.2)$$

а также в виде

$$\text{grad}[\kappa \text{div } U - (8 - \kappa)\gamma T] - (\kappa - 2) \text{rot rot } U = 0 \quad (2.3)$$

(использовано известное тождество $\Delta U = \text{grad rot } U - \text{rot rot } U$). В сферической системе координат (или в любой другой из вращательно-симметричных координат) отсюда получается уравнение

$$\Delta[(\kappa - 2)H \text{rot}^{(\alpha)} U + z(\kappa \text{div } U - (8 - \kappa)\gamma T)] = 0 \quad (2.4)$$

где $\text{rot}^{(\alpha)} U$ – проекция вектора $\text{rot } U$ на касательную к координатной линии α , а H – одна из трех коэффициентов Ламе во вращательно-симметричных координатах (оставшиеся два коэффициента Ламе равны между собой), который в сферической системе координат равен $r \sin \beta$.

Окончательно, используя соотношения (2.2)–(2.4), в сферической системе координат r, α, β могут быть получены следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta K &= 0, \quad r^2 \sin^2 \beta \Delta D - D - 2v_\alpha = 0, \quad r^2 \sin^2 \beta \Delta v - v + 2D_\alpha = 0 \\ w_{\alpha\alpha} + \kappa^2 w &= \sin \beta (v_\alpha - \kappa D)_\beta - (\kappa - 1) \cos \beta (v_\alpha - \kappa D) - \\ &- \kappa r \sin \beta (K_r + \kappa r^{-1} K) - \frac{1}{2} (8 - \kappa) \gamma r \sin \beta [\sin \beta T_\beta + \cos \beta (rT)_r] \\ u_{\alpha\alpha} + \kappa^2 u &= r \sin \beta [(v_\alpha - \kappa D)_r - (\kappa - 1) r^{-1} (v_\alpha - \kappa D)] + \\ &+ \kappa \sin \beta K_\beta + \kappa^2 K \cos \beta - \frac{1}{2} (8 - \kappa) \gamma r [r \sin^2 \beta T_r - \sin \beta (\cos \beta T)_\beta - \kappa T] \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} K &= u \cos \beta - w \sin \beta - \frac{\sin \beta}{\kappa} [u_\beta - (rw)_r] - \frac{8 - \kappa}{2\kappa} \gamma r \cos \beta T \\ D &= u \sin \beta + w \cos \beta + \frac{1}{\kappa - 2} \left[\frac{\sin \beta}{r} (r^2 u)_r + (w \sin \beta)_\beta + v_\alpha \right] - \frac{8 - \kappa}{2(\kappa - 2)} \gamma r \sin \beta T \end{aligned}$$

Здесь u, v, w – компоненты вектора смещений U вдоль касательных к координатным линиям r, α, β ; нижними индексами r, α, β обозначены частные производные по соответствующим координатам.

Выражения напряжений через смещения и температуру имеют вид

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\mu} A^{(\alpha)} &= \chi_2 \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{2}{r \sin \beta} (v_\alpha + w \cos \beta + u \sin \beta) - \chi_3 \gamma T \\
 \frac{1}{\mu} R^{(r)} &= \chi_2 \operatorname{div} \mathbf{U} + 2u_r - \chi_3 \gamma T, \quad \frac{1}{\mu} B^{(\mu)} = \chi_2 \operatorname{div} \mathbf{U} + \frac{2}{r} (w_\beta + u) - \chi_3 \gamma T = \\
 &= (\kappa - 2) \left(\frac{\chi_2}{r \sin \beta} D + \frac{2}{\kappa - 2} \frac{1}{r} w_\beta + \frac{1}{r} u - \frac{\chi_2}{r} \operatorname{ctg} \beta w - \frac{1}{2} \chi_3 \gamma T \right) \\
 \frac{1}{\mu} B^{(\alpha)} &= \frac{1}{r \sin \beta} \left[w_\alpha + \sin^2 \beta \left(\frac{v}{\sin \beta} \right)_\beta \right], \quad \frac{1}{\mu} B^{(r)} = \frac{1}{r} (u_\beta + r w_r - w) \\
 \frac{1}{\mu} R^{(\alpha)} &= r \left(\frac{v}{r} \right)_r + \frac{1}{r \sin \beta} v_\alpha, \quad \chi_n = \frac{2^n - \kappa}{\kappa - 2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$R^{(r)}, A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}$ – нормальные напряжения, $A^{(\beta)} = B^{(\alpha)}, R^{(\beta)} = B^{(r)}, A^{(r)} = R^{(\alpha)}$ – касательные напряжения, E – модуль упругости.

Далее будет рассмотрено термоупругое равновесие бесконечной конической панели (БКП), занимающей область (1.1).

Граничные условия, которые при этом будут фигурировать, приводятся ниже

$$\alpha = \alpha_j: a) T_\alpha = 0, \quad v = 0, \quad B^{(\alpha)} = 0, \quad R^{(\alpha)} = 0 \quad \text{или} \tag{2.7}$$

$$б) T = 0, \quad A^{(\alpha)} = 0, \quad w = 0, \quad u = 0$$

$$\beta = \beta_j: \theta_{j1} T_\beta + \theta_{j2} T = \tau_j(r, \alpha) \tag{2.8}$$

$$\beta = \beta_j: g_{j1} B^{(\beta)} + g_{j2} \frac{w}{r} = f_{j1}(r, \alpha), \quad g_{j3} B^{(r)} + g_{j4} \frac{u}{r} = f_{j2}(r, \alpha) \tag{2.9}$$

$$g_{j5} B^{(\alpha)} + g_{j6} \frac{v}{r} = f_{j3}(r, \alpha)$$

Здесь $j = 0, 1$, причем $\alpha_0 = 0$; $\theta_{j1}, \theta_{j2}, g_{j1}, \dots, g_{j6}$ – заданные постоянные, подчиненные условиям

$$\theta_{j1} \theta_{j2} \geq 0, \quad g_{j1} g_{j2} \geq 0, \quad g_{j3} g_{j4} \geq 0, \quad g_{j5} g_{j6} \geq 0$$

Об условиях, наложенных на функции $\tau_i(r, \alpha)$ и $f_{jk}(r, \alpha)$ ($k = 1, 2, 3$), будет сказано в разд. 3 (при решении конкретных граничных задач); укажем лишь, что функции эти таковы, что на ребрах БКП выполняются условия согласования. Условия (2.9) можно считать неклассическими, если хотя бы семь из двенадцати коэффициентов g_{jk} ($k = 1, 2, \dots, 6$) отличны от нуля. При $g_{j2} = g_{j4} = g_{j6} = 0$ и $g_{j1} = g_{j3} = g_{j5} = 1$ будем иметь граничные условия первой задачи термоупругости, при $g_{j1} = g_{j3} = g_{j5} = 0$ и $g_{j2} = g_{j4} = g_{j6} = 1$ – второй задачи термоупругости и т.д. Поясним, что из вида условий (2.8) и (2.9) следует, что при $\beta = \beta_0$ могут задаваться одни условия, а при $\beta = \beta_1$ – другие.

Условия (2.7) в случае *a* называют условиями симметрии, а в случае *б* – условиями антисимметрии.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение системы, состоящей из первых трех уравнений (2.5), может быть представлено в виде

$$K = \varphi_1, \quad D = (\varphi_2)_\beta - \operatorname{ctg} \beta (\varphi_3)_\alpha, \quad v = (\varphi_3)_\beta + \operatorname{ctg} \beta (\varphi_2)_\alpha \tag{2.10}$$

где φ_1, φ_2 и φ_3 – произвольные гармонические функции.

Используя метод разделения переменных и учитывая граничные условия (2.7)–(2.9), гармонические функции $T \equiv \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ и φ_3 представим в виде

$$\varphi_j = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} L(\Phi^{(j)}) dn, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

$$L(\Phi^{(j)}) = \Phi_1^{(j)}(\beta, m, n) \cos(m\alpha) \cos(n \ln r) + \Phi_2^{(j)}(\beta, m, n) \cos(m\alpha) \sin(n \ln r) +$$

$$+ \Phi_3^{(j)}(\beta, m, n) \sin(m\alpha) \cos(n \ln r) + \Phi_4^{(j)}(\beta, m, n) \sin(m\alpha) \sin(n \ln r) \quad (2.11)$$

Функции $\Phi_k^{(j)}(\beta, m, n)$ выражаются через функции Лежандра следующим образом:

$$\Phi_k^{(j)}(\beta, m, n) = A_{kmn}^{(j)} \frac{P_{-1/2+in}^{-m}(\cos \beta)}{P_{-1/2+in}^{-m}(\cos \beta_1)} + B_{kmn}^{(j)} \frac{P_{-1/2+in}^{-m}(-\cos \beta)}{P_{-1/2+in}^{-m}(-\cos \beta_0)} \quad (2.12)$$

$$k = 1, 2, 3, 4; \quad i = \sqrt{-1}$$

Здесь $A_{kmn}^{(j)}, B_{kmn}^{(j)}$ – постоянные. Если $0 \leq \alpha < 2\pi$, то вместо граничных условий (2.7) ставится условие периодичности, причем $m = \tilde{m}$ ($\tilde{m} = 0, 1, 2, \dots$) и, вообще говоря, все четыре функции $\Phi_k^{(j)}(\beta, m, n)$ отличны от нуля; если $0 \leq \alpha < \alpha_1 < 2\pi$, то $m = \pi \tilde{m} / \alpha_1$ или $m = \pi(\tilde{m} + 1/2)\alpha_1$ и либо $\Phi_3^{(j)}(\beta, m, n) = 0$ и $\Phi_4^{(j)}(\beta, m, n) = 0$, либо $\Phi_1^{(j)}(\beta, m, n) = 0$ и $\Phi_2^{(j)}(\beta, m, n) = 0$. Если m – полуцелое число, т.е. число вида $\pm(\tilde{m} + 1/2)$, то вместо функций, фигурирующих в выражении (2.12), используются элементарные функции $P_{-1/2+in}^{-\tilde{m}-1/2}(\cos \beta)$ и $P_{-1/2+in}^{\tilde{m}+1/2}(\cos \beta)$, точнее, их линейные комбинации. Выражения для фигурирующих в соотношении (2.12) функций с произвольным индексом m известны из справочной литературы ([4], с. 148). В случае, когда $\beta_0 = 0$, для ограниченности решения принимаем $B_{kmn}^{(j)} = 0$.

Подставив выражения (2.11) в соотношения (2.10), будем иметь

$$q = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} L(F^{(q)}) dn, \quad q = K, D, v \quad (2.13)$$

где $F_k^{(q)}(\beta, m, n)$ – известные выражения, включающие в себя постоянные $A_{kmn}^{(j)}$ и $B_{kmn}^{(j)}$ из равенства (2.12) и зависящие от β, m и n (оператор $L(F^{(q)})$ получается из оператора $L(\Phi^{(j)})$ заменой в последнем $\Phi_k^{(j)}(\beta, m, n)$ на $F_k^{(q)}(\beta, m, n)$). Четвертое и пятое уравнения (2.5) при учете выражений (2.13) примут вид

$$p_{\alpha\alpha} + \kappa^2 p = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [L(F^{(q)}) - \Gamma_p(\varphi_{0mn})] dn, \quad p = w, u \quad (2.14)$$

Здесь

$$\Gamma_u(\varphi_{0mn}) = \frac{1}{2}(8 - \kappa)\gamma r [r \sin^2 \beta(\varphi_{0mn})_r - \sin \beta(\cos \beta \varphi_{0mn})_\beta - \kappa \varphi_{0mn}]$$

$$\Gamma_w(\varphi_{0mn}) = \frac{1}{2}(8 - \kappa)\gamma r \sin \beta [\sin \beta(\varphi_{0mn})_\beta + \cos \beta(r \varphi_{0mn})_r]$$

где φ_{0mn} – выражение под знаками ряда и интеграла в равенстве (2.11) при $j = 0$, $L(F^{(p)})$ – выражение, аналогичное выражению $L(F^{(q)})$ из соотношения (2.13).

Будем полагать, что $k \neq m$, поэтому решения уравнений (2.14) запишутся в виде

$$p = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 - m^2} [L(F^{(p)}) - \Gamma_p(\varphi_{0mn})] dn, \quad p = w, u$$

Следовательно, для K, D, v, w и u будем окончательно иметь

$$q = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [L(F^{(q)}) - P_1^{(q)}(\varphi_{0mn})] \kappa_m dn, \quad q = K, D, v, w, u \quad (2.15)$$

причем $P_1^{(q)} = 0$ при $q = K, D, v$; $P_1^{(q)}(\varphi_{0mn}) = \Gamma_p(\varphi_{0mn})$ при $p = w, u$; $\kappa_m = 0$ при $q = K, D, v$ и $\kappa_m = 1/(\kappa^2 - m^2)$ при $q = w, u$. Используя соотношения (2.15) и (2.6), для напряжений получим

$$\sigma = r^{-3/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [L(F^{(\sigma)}) - P_2^{(\sigma)}(\varphi_{0mn})] dn, \quad \sigma = R^{(r)}, A^{(\alpha)}, B^{(\beta)}, B^{(\alpha)}, B^{(r)}, R^{(\alpha)} \quad (2.16)$$

$P_2^{(\sigma)}(\varphi_{0mn})$ — известное, зависящее от φ_{0mn} выражение.

3. Аналитическое решение некоторых граничных задач. Построим для примера в области (1.1) при $\beta = \pi - \beta_0$ и при $T = 0$ регулярное решение граничной задачи (2.5), (2.7, б), (2.9) при

$$g_{j2} = g_{j4} = g_{j6} = 0, \quad g_{j1} = g_{j3} = g_{j5} = 1$$

Эту задачу назовем задачей G_0 и представим ее в виде

$$G_0 = G_1 + G_2$$

где G_1 — задача G_0 с нагрузкой, распределенной симметрично относительно плоскости $\beta = \pi/2$, а G_2 — задача G_0 с антисимметрично распределенной нагрузкой относительно плоскости $\beta = \pi/2$.

Выше говорилось о регулярном решении задачи, поэтому определим понятие регулярности.

Определенное функциями u, v, w решение системы (2.5) будем называть регулярным, если функции u, v, w трижды непрерывно дифференцируемы в области $\tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega}$ — область Ω вместе с границами $\alpha = \alpha_j$, а на поверхности $\beta = \beta_j$ могут быть представлены вместе со своими первыми производными некоторым абсолютно и равномерно сходящимся выражением, представляющим собой интеграл Фурье — Меллина по r и ряд Фурье по α .

Ограничимся решением граничной задачи G_1 , в которой кроме условий (2.7, б) выполняются условия симметрии

$$w = 0, \quad B^{(r)} = 0, \quad B^{(\alpha)} = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \pi/2$$

и условия

$$B^{(\beta)} = f_1(r, \alpha), \quad B^{(r)} = f_2(r, \alpha), \quad B^{(\alpha)} = f_3(r, \alpha) \quad \text{при} \quad \beta = \beta_0 \quad (3.1)$$

Функции φ_1, φ_2 и φ_3 в рассматриваемом случае примут вид

$$\varphi_k = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=1}^{\infty} \int_0^{\infty} R^{(ks)} P^{(1)} dn, \quad \varphi_3 = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \int_0^{\infty} R^{(3c)} P^{(2)} dn$$

Здесь

$$P^{(k)} = \frac{P_{-1/2+in}^{-m}(-\cos\beta) + (-1)^k P_{-1/2+in}^{-m}(\cos\beta)}{P_{-1/2+in}^{-m}(-\cos\beta_0)}$$

$$R^{(ks)} = R^{(k)} \sin(m\alpha), \quad R^{(3c)} = R^{(3)} \cos(m\alpha), \quad R^{(j)} = A_{1mn}^{(j)} \cos(n \ln r) + A_{2mn}^{(j)} \sin(n \ln r)$$

$$k = 1, 2, j = 1, 2, 3, m = \pi \tilde{m} / \alpha_1$$

Постоянные $A_{1mn}^{(1)}, A_{2mn}^{(1)}, \dots, A_{2mn}^{(3)}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} F_3^{(\beta\beta)}(\beta_0, m, n) &= f_{1mn}^{(c)}, & F_4^{(\beta\beta)}(\beta_0, m, n) &= f_{1mn}^{(s)} \\ F_3^{(\beta r)}(\beta_0, m, n) &= f_{2mn}^{(c)}, & F_4^{(\beta r)}(\beta_0, m, n) &= f_{2mn}^{(s)} \\ F_1^{(\beta\alpha)}(\beta_0, m, n) &= f_{3mn}^{(c)}, & F_2^{(\beta\alpha)}(\beta_0, m, n) &= f_{3mn}^{(s)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для удобства записи формул (3.2) через $\beta\beta$, βr и $\beta\alpha$ обозначены $B^{(\beta)}$, $B^{(r)}$ и $B^{(\alpha)}$ соответственно; $f_{kmn}^{(c)}$ и $f_{kmn}^{(s)}$ – коэффициенты Фурье функций $r^{3/2}f_k(r, \alpha)$ ($k = 1, 2, 3$), представленных интегралом Фурье – Меллина по r и рядом Фурье по α ; относительно функций $F_3^{(\beta\beta)}(\beta_0, m, n), \dots, F_2^{(\beta\alpha)}(\beta_0, m, n)$, см. формулы (2.16). На непрерывные функции $f_k(r, \alpha)$, фигурирующие в условиях (3.1), накладываются следующие условия [5]:

1) производные по r и по α от функции $f_k(r, \alpha)$ непрерывны и принадлежат классу Гёльдера,

2) при любом значении $\alpha \in [0, \alpha_1]$ сходится интеграл

$$\int_0^\infty |f_k(r, \alpha)| r^{-3/2} dr$$

Видно, что (3.2) – система линейных алгебраических уравнений с матрицей шестого порядка (эта система соответствующим образом преобразовывается для лучшей обусловленности ее матрицы). Единственность полученного решения доказывается с помощью интеграла энергии, а из единственности решения следует, что определитель системы (3.2) отличен от нуля.

Таким образом, получено регулярное решение задачи G_1 . Совершенно аналогично решается и задача G_2 и любая из граничных задач (2.5), (2.7)–(2.9), при любых β_0 и β_1 .

В настоящей работе основное внимание направлено на получение регулярных решений граничных задач термоупругости для БКП и не исследуется поведение решений в окрестности $r = 0$, а также при $r \rightarrow \infty$ (считается, что функции, заданные на конических граничных поверхностях, удовлетворяют требованиям, гарантирующим получение регулярных решений).

4. Многослойная БКП. Рассмотрим многослойную вдоль координатной оси β бесконечную коническую панель (МБКП), занимающую область Ω^* , представляющую собой объединение областей (1.2) при $k = 0, 1, 2, \dots, s-1$, которые контактируют между собой по коническим поверхностям $\beta = \beta_j$ ($j = 1, 2, \dots, s-1$, а s – количество слоев). Каждый слой имеет свои упругие и термические характеристики. При $\alpha = \alpha_0$ и $\alpha = \alpha_1$ для всех слоев одновременно выполняется один из наборов условий (2.7).

На границе тела, занимающего область Ω^* , выполняются условия (2.7)–(2.9) с заменой в (2.8) и (2.9) β_1 на β_s . На контактных поверхностях $\beta = \beta_j$ ($j = 1, 2, \dots, s-1$) задаются условия

$$T_j - T_{j+1} = \tau_{j1}(r, \alpha), \quad \lambda_j^*(T_j)_\beta - \lambda_{j+1}^*(T_{j+1})_\beta = \tau_{j2}(r, \alpha)$$

$$\begin{aligned} w_j - w_{j+1} &= \tilde{F}_{j1}(r, \alpha), & B_j^\beta - B_{j+1}^\beta &= \tilde{F}_{j2}(r, \alpha) \\ u_j - u_{j+1} &= \tilde{F}_{j3}(r, \alpha), & B_j^\beta - B_{j+1}^\beta &= \tilde{F}_{j4}(r, \alpha) \\ v_j - v_{j+1} &= \tilde{F}_{j5}(r, \alpha), & B_j^\beta - B_{j+1}^\beta &= \tilde{F}_{j6}(r, \alpha) \end{aligned}$$

Здесь λ_j^* , λ_{j+1}^* – коэффициенты теплопроводности, а $\tau_{j1}(r, \alpha)$, $\tau_{j2}(r, \alpha)$, $\tilde{F}_{j1}(r, \alpha)$, ..., ..., $\tilde{F}_{j6}(r, \alpha)$ – заданные функции.

Ставя задачу о нахождении термоупругого равновесия МБКП, для j -го слоя составляем при учете условий (2.7), выражений для ϕ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), q и σ (см. формулы (2.11), (2.15), (2.16)) и, следуя методу, изложенному в разд. 3, аналогично системе (3.2) получаем две системы: одну, состоящую из $4s$ линейных алгебраических уравнений с $4s$ неизвестными (определение температурного поля), и другую, состоящую из $12s$, линейных алгебраических уравнений с $12s$, неизвестными (для тела, замкнутого по α , порядок матриц соответствующих систем линейных уравнений равен $8s$ и $24s$). Доказывается сходимость рядов, представляющих смещения и напряжения, и единственность полученных решений.

Кроме приведенных, можно было бы рассмотреть ряд других контактных условий, при которых столь же эффективно выписываются решения гранично-контактных задач термоупругости для МБКП.

5. Упругое равновесие конечной конической панели. Рассмотрим упругое равновесие конечной конической панели, занимающей область (1.3) при $r_0 > 0$, когда остаются в силе условия (2.7) (естественно, при отсутствии условия для T), а при $r = r_j$ и $\beta = \beta_j$ выполняются по одному из условий из следующего набора:

$$\begin{aligned} r = r_j: \text{ а) } u &= 0, & rv_r - (\kappa - 1)v &= 0, & rw_r - (\kappa - 1)w &= 0 \\ \text{ б) } ru_r + \kappa u &= 0, & v &= 0, & w &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \beta = \beta_j: \text{ а) } w &= \tilde{f}_{j1}(r, \alpha), & u &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), & v &= \tilde{f}_{j3}(r, \alpha) \\ \text{ б) } B^{(\beta)} &= f_{j1}(r, \alpha), & u &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), & v &= \tilde{f}_{j3}(r, \alpha) \\ \text{ в) } B^{(\beta)} &= f_{j1}(r, \alpha), & u &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), & B^{(\alpha)} &= f_{j3}(r, \alpha) \\ \text{ г) } w &= \tilde{f}_{j1}(r, \alpha), & B^{(r)} &= f_{j2}(r, \alpha), & B^{(\alpha)} &= f_{j3}(r, \alpha) \\ \text{ д) } w &= \tilde{f}_{j1}(r, \alpha), & B^{(r)} &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), & v &= \tilde{f}_{j3}(r, \alpha) \\ \text{ е) } w &= \tilde{f}_{j1}(r, \alpha), & u &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), & B^{(\alpha)} &= f_{j3}(r, \alpha) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Полагаем, что функция $r^{1/2} \tilde{f}_{jk}(r, \alpha)$ вместе со своими первыми производными и функции $r^{3/2} f_{jk}(r, \alpha)$ разлагаются в равномерно сходящиеся двойные тригонометрические ряды.

В качестве примера рассмотрим решение граничной задачи (2.5), (5.1, б), (2.7, б), (5.2, в), причем в условии (5.2, в)

$$\tilde{f}_{j2}(r_j, \alpha) = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} \tilde{f}_{j2}(r, \alpha) \right]_{r=r_j} = 0$$

Функции ϕ_1 , ϕ_2 и ϕ_3 в рассматриваемом случае примут вид

$$\phi_j = r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=1}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} \Phi^{(j)}(\beta, m, n) \Psi_{mm}^{(j)}(r, \alpha), \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

Функции $\Phi^{(j)}(\beta, m, n)$ определяются формулой (2.12)

$$\Psi_{mn}^{(1)}(r, \alpha) = \sin(m\alpha)[(2\kappa - 1)\chi_s(r) - 2n\chi_c(r)]$$

$$\Psi_{mn}^{(2)}(r, \alpha) = \sin(m\alpha)\chi_s(r), \quad \Psi_{mn}^{(3)}(r, \alpha) = \cos(m\alpha)\chi_s(r)$$

$$m = \frac{\pi\tilde{m}}{\alpha_1}, \quad n = \frac{\pi\tilde{n}}{\ln r_1 - \ln r_0}, \quad \chi_s(r) = \sin\left(n \ln \frac{r}{r_0}\right), \quad \chi_c(r) = \cos\left(n \ln \frac{r}{r_0}\right)$$

Подставляя выражения (5.3) в последнее уравнение (2.10) и в два последних уравнения (2.5), получим

$$\begin{aligned} r^{1/2}v &= \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} F^{(v)}(\beta, m, n) \Psi_{mn}^{(3)}(r, \alpha), \quad r^{1/2}w = \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} F^{(w)}(\beta, m, n) \Psi_{mn}^{(2)}(r, \alpha) \\ r^{1/2}u &= \sum_{\tilde{m}=1}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} F^{(u)}(\beta, m, n) \Psi_{mn}^{(1)}(r, \alpha) \end{aligned} \quad (5.4)$$

В свою очередь, подставляя выражения (5.4) в третью и четвертую формулы (2.6) и учитывая условия (5.2, в), получим при $\beta = \beta_j$ ($j = 0, 1$)

$$\begin{aligned} r^{-3/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} F^{(1)}(\beta_j, m, n) \Psi_{mn}^{(2)}(r, \alpha) &= \frac{1}{\mu} f_{j1}(r, \alpha) - (\kappa - 2)r^{-1} \tilde{f}_{j2}(r, \alpha) \\ r^{-1/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} F^{(2)}(\beta_j, m, n) \Psi_{mn}^{(1)}(r, \alpha) &= \tilde{f}_{j2}(r, \alpha) \\ r^{-3/2} \sum_{\tilde{m}=0}^{\infty} \sum_{\tilde{n}=1}^{\infty} F^{(3)}(\beta_j, m, n) \Psi_{mn}^{(3)}(r, \alpha) &= \frac{1}{\mu} f_{j3}(r, \alpha) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из этих соотношений следует система

$$F^{(k)}(\beta_j, m, n) = f_{mn}^{(k)}, \quad j = 0, 1; \quad k = 1, 3 \quad (5.6)$$

где $f_{mn}^{(1)}$, $f_{mn}^{(2)}$ и $f_{mn}^{(3)}$ – коэффициенты Фурье функций

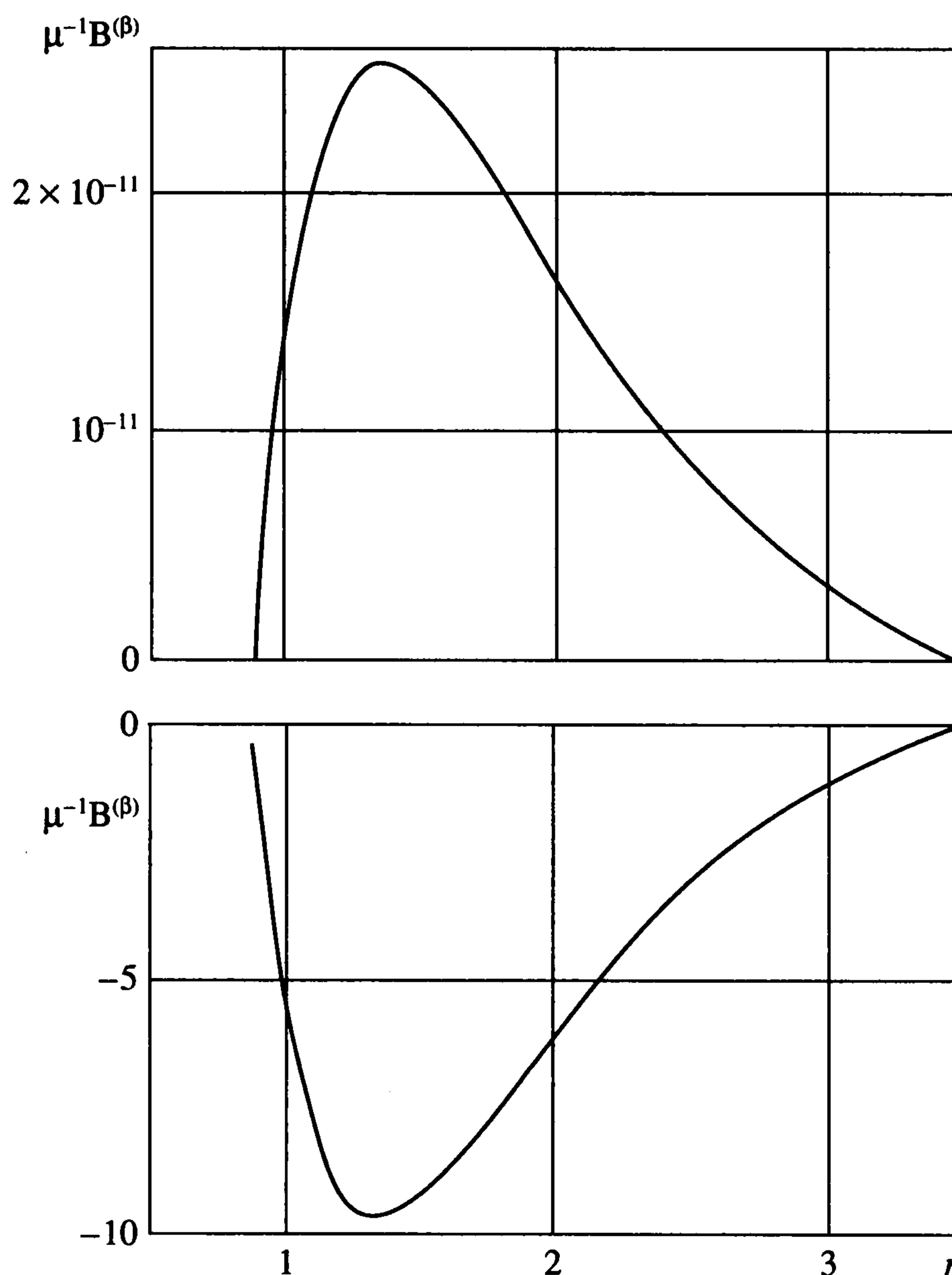
$$r^{3/2} \left[\frac{1}{\mu} f_{j1}(r, \alpha) - \frac{\kappa - 2}{r} \tilde{f}_{j2}(r, \alpha) \right], \quad r^{1/2} \tilde{f}_{j2}(r, \alpha), \quad \frac{r^{3/2}}{\mu} f_{j3}(r, \alpha)$$

соответственно. Подлежащие определению постоянные A_{1mn} , B_{1mn} , ..., B_{3mn} содержатся в выражениях $F^{(k)}(\beta_j, m, n)$ и определяются из системы (5.6) с матрицей шестого порядка. Тем самым получено регулярное решение поставленной задачи.

Если в рассмотренной выше задаче $r_0 = 0$, т.е. $0 < r < r_1$, либо $r_1 < r < \infty$, то в формулах (5.3) и (5.4) ряды по $\tilde{n}$ заменяются интегралом по n .

Таким образом, получено регулярное решение задачи в области (1.3) при $r_0 > 0$, при $r_0 = 0$ и при $r_0 > 0$, $r_1 = \infty$.

Исследование таких задач, когда хотя бы на одной из граничных поверхностей $r = r_j$ задаются условия (5.1, а), пока не производилось, но формально все изложенное в разд. 5 для граничных задач (2.5), (5.1, б), (2.7), (5.2) остается справедливым и для граничных задач (2.5), (5.1, а), (2.7), (5.2).



Не представляет труда выписать в области (1.3) решение и в случае, когда при $r = r_0$ ставится одно из условий (5.1), а при $r = r_1$ – другое.

Пример 1. Рассмотрим трехмерную граничную задачу теории упругости об изгибе тонкого конического кольца с разрезом, занимающего область (1.3) при $\alpha_1 = 2\pi$, $\beta_1 = \pi - \beta_0$ (берега разреза $\alpha = 0$ и $\alpha = 2\pi$). Изгибное напряженное состояние соответствует следующим граничным условиям:

$$\beta = \beta_j: w = f_0 r^{-1/2} \sin\left(n_1 \ln \frac{r}{r_0}\right) \sin \frac{\alpha}{2}, \quad B^{(r)} = 0, \quad B^{(\alpha)} = 0 \quad (5.7)$$

$$r = r_j: u_r + \kappa \frac{u}{r} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \quad (5.8)$$

$$\alpha = \alpha_j: A^{(\alpha)} = 0, \quad w = 0, \quad u = 0 \quad (5.9)$$

где

$$j = 0, 1, \quad \beta_1 = \pi - \beta_0, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2\pi; \quad n_1 = \frac{\pi}{\ln r_1 - \ln r_0}, \quad f_0 = \text{const}$$

Заметим, что в терминах теории тонкостенных конструкций условия (5.8) и (5.9) можно интерпретировать как свободное опирание.

Плоскость $\beta = \pi/2$ для конического кольца является плоскостью антисимметрии, поэтому

$$B^{(\beta)} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \pi/2 \quad (5.10)$$

и будет рассматриваться область (1.3), в которой $\beta_0 < \beta < \pi/2$. При этом условия (5.7) при $\beta = \beta_0$, так же как и условия (5.8) и (5.9), остаются в силе, и приходим к граничной задаче (2.5), (5.7)–(5.10) (в условии (5.7) $j = 0$). В этом случае функции φ_1 , φ_2 и φ_3 примут вид

$$\varphi_j = A_j r^{-1/2} \sin^{-1/2} \beta \operatorname{ch} \left[n_1 \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \right] \Psi_{mn}^{(0j)}(r, \alpha), \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

где A_j – постоянные; функции $\Psi_{mn}^{(0j)}(r, \alpha)$ равны соответствующим функциям $\Psi_{mn}^{(j)}(r, \alpha)$ при $n = n_1$ и $m = 1/2$.

Принимая

$$r_0 = \frac{15}{17}, \quad r_1 = \frac{60}{17}, \quad \kappa = 2.2 \left(n_1 = \frac{\pi}{2 \ln 2}, \nu = 0.45 \right), \quad f_0 = 1, \quad \beta_0 = 0.45\pi$$

находим $A_1 = -0.4036$, $A_2 = 0.7765$, $A_3 = -0.0021$ и получаем выражение для нормального напряжения $B^{(\beta)}$. График зависимости $B^{(\beta)}$ от координаты r при $\alpha = \pi$ и $\beta = \pi/2$ показан верхней кривой на фигуре.

Пример 2. Рассмотрим теперь упругое равновесие конического кольца с разрезом из предыдущего примера, изменив лишь граничные условия на конических поверхностях, а именно в условии (5.7) заменим f_0 на $(-1)^j f_0$. В этом случае будет иметь место сжатие конического кольца и плоскость $\beta = \pi/2$ будет плоскостью симметрии, поэтому

$$w = 0, \quad B^{(r)} = 0, \quad B^{(\alpha)} = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \pi/2 \quad (5.12)$$

и приходим к граничной задаче, рассматриваемой в области (1.3) при $0 < \beta < \pi/2$.

Если в выражениях (5.11) гиперболические косинусы заменить гиперболическими синусами, то получим функции φ_1 , φ_2 и φ_3 для рассматриваемой задачи. Далее, если r_0 , r_1 , κ , f_0 и β_0 оставить теми же, что в примере 1, то $A_1 = -1.0137$, $A_2 = 1.3556$, $A_3 = 0.0062$, а графиком зависимости $B^{(\beta)}$ от координаты r , при $\alpha = \pi$ и $\beta = \pi/2$, будет нижняя кривая на фигуре.

Как и следовало ожидать, в изогнутом тонком коническом кольце напряжение $B^{(\beta)}(r, \pi, \pi/2)$ по существу отсутствует (его наибольшее значение равно $2.6 \cdot 10^{-11} \mu$ и даже если считать $\mu = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, то получим $5.2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/см}^2$), тогда как в случае сжатия упомянутого кольца наибольшее по модулю значение $B^{(\beta)}(r, \pi, \pi/2) = 9.6\mu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
2. Khomasuridze N. Thermoelastic equilibrium of bodies in generalized cylindrical coordinates // Georgian Math. J. 1998. V. 5. № 6. P. 521–544.
3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 239 с.
4. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. N. Y. etc.: McGraw Hill, 1953 = Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 358 с.