

УДК 539.375

© 2003 г. В. А. Ковтуненко

**ИНВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЭНЕРГИИ
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О ТРЕЩИНЕ
С ВОЗМОЖНЫМ КОНТАКТОМ БЕРЕГОВ**

Рассматриваются общие двумерная и трехмерная постановки нелинейной задачи о трещине в условиях взаимного непроникания ее берегов для неоднородного, анизотропного линейно-упругого тела. При общем виде дифференцируемого возмущения области с разрезом с помощью метода материальных производных получены первая производная функции потенциальной энергии по параметру возмущения и ее представление в виде инвариантного интеграла по произвольному замкнутому контуру. Выведены достаточные условия существования и инвариантного интеграла энергии в общем виде и построены примеры инвариантных интегралов при разных типах возмущений и разной геометрии разреза.

Рассматривается нелинейная задача о равновесии тела, содержащего трещину, при выполнении условия взаимного непроникания берегов. Используется общая двумерная или трехмерная модель линейно-упругого, неоднородного, анизотропного тела. В отличие от классической линейной постановки задачи о трещине при условии свободных от напряжений берегов нелинейная задача сводится к вариационному неравенству. Исследуются возмущения данной задачи с целью получения общего вида инвариантных интегралов энергии (ИИЭ). Классическим примером ИИЭ является интеграл Черепанова–Райса, который описывает скорость притока энергии в вершину трещины и используется в механике разрушения при описании роста трещины. Был определен [1–3] не зависящий от пути интеграл в собственно нелинейных задачах о нелинейно-упругом и неупругом деформировании материалов с трещинами. Изучались [4, 5] некоторые задачи о трещинах с условиями одностороннего контакта их берегов. Представлено [6, 7] математическое обоснование ИИЭ для линейных задач.

При рассмотрении областей с негладкими границами, например тела с трещинами, обычно используется теория сингулярных возмущений [8, 9]. При отображении области с помощью гладких координатных преобразований используются регулярные возмущения, несмотря на негладкость границы. Данный подход распространяет методы оптимизации формы для гладких областей [10] на области с негладкими границами. Впервые производная энергии в нелинейной задаче была получена в [11]. С использованием вариационной постановки линейных и нелинейных задач о трещинах [12, 13] затем были найдены формулы для производной потенциальной энергии и соответствующие ей инвариантные интегралы для ряда случаев [14, 15].

В разд. 1 исследуется задача общего возмущения области с разрезом, при этом геометрия разреза не конкретизируется. Поставлена исходная задача о равновесии тела с трещиной в виде вариационного неравенства; построена возмущенная задача в области с разрезом, и найдены условия взаимной однозначности ее отображения на исходную область; выведена асимптотика возмущенного решения и определена материальная производная решения; с помощью материальной производной получена асимптотика функции потенциальной энергии и формула для ее первой производной.

Разд. 2 посвящен применению полученных в разд. 1 соотношений для нахождения инвариантных интегралов. Получены общий вид ИИЭ и достаточные условия его существования; на основе общей формулы построены примеры инвариантных интегралов при помощи возмуще-

ния всего разреза, края разреза и при возмущении вершины разреза, которые также будут справедливы и для классической линейной задачи о трещине.

1. Общее возмущение области с разрезом.

Постановка исходной задачи. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, где $N = 2$ или 3 , с липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$ и некоторой ее частью $\Gamma_D \subseteq \partial\Omega$ с $\text{meas } \Gamma_D > 0$. Пусть внутри Ω расположен разрез Γ_0 как некоторое $(N-1)$ -мерное многообразие в $\mathbf{R}^N$, т.е. Γ_0 – незамкнутая кривая при $N = 2$ или поверхность при $N = 3$. Обозначим край разреза через γ_0 .

Предположение 1. Набор $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_D)$ удовлетворяет следующему условию. Область Ω может быть разбита на подобласти Ω_1 и Ω_2 т.е. $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, с общей границей Γ , т.е. $\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 = \bar{\Gamma}$ и при этом выполнены следующие условия: а) Ω_1 и Ω_2 имеют липшиц-непрерывные границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ б) $\Gamma_0 \subset \Gamma$, в) $\text{meas}(\partial\Omega_n \cap \Gamma_D) > 0$ для $n = 1, 2$.

Условия а и б определяют гладкость области с разрезом, а условие в необходимо для выполнения неравенства Корна. В частности, из предположения 1 следует липшиц-непрерывность разреза Γ_0 поэтому можем выбрать единичный вектор $v = (v_1, \dots, v_N)$ нормали к Γ_0 по крайней мере почти всюду на разрезе. Считаем, что выбранное направление v соответствует положительному берегу разреза Γ_0^+ а $-v$ – отрицательному берегу Γ_0^- . Определим теперь область с разрезом в $\mathbf{R}^N$ как $\Omega_0 = \Omega \setminus \Gamma_0$ с границей $\partial\Omega_0 = \partial\Omega \cup \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^- \cup \gamma_0$.

Всюду далее, если не оговорено иное, индексы i, j, k, l принимают значения $1, \dots, N$; по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Введем пространство Соболева

$$\tilde{H}^1(\Omega_0) = \{v = (v_1, \dots, v_N): v_i \in H^1(\Omega_0), v_i = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_D\}$$

которое содержит в себе однородное условие Дирихле (закрепление тела) на части внешней границы Γ_D . Потребуем выполнение условия взаимного непроникания берегов разреза, которое можно записать в виде следующего неравенства для скачка функции на разрезе [12]:

$$[v] \cdot v \equiv [v_i]v_i \geq 0, \quad [v_i] = v_i|_{\Gamma_0^+} - v_i|_{\Gamma_0^-}$$

Данное условие приводит к определению множества допустимых функций в виде

$$K_0 = \{v = (v_1, \dots, v_N) \in \tilde{H}^1(\Omega_0): [v] \cdot v \geq 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_0\}$$

которое выпукло и замкнуто в $\tilde{H}^1(\Omega_0)$. В рамках линейной теории упругости для вектора перемещений $v = (v_1, \dots, v_N)$ определим стандартным образом тензоры деформаций и напряжений

$$\epsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \sigma_{ij}(v) = c_{ijkl}\epsilon_{kl}(v)$$

с симметричным и положительно определенным тензором коэффициентов упругости $\{c_{ijkl}\}$, т.е. $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}$ и $c_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq c_0\xi_{ij}\xi_{ij} > 0$. При этом считаем, что $c_{ijkl} \in C^2(\mathbf{R}^N)$.

Пусть внешняя нагрузка в области $f = (f_1, \dots, f_N)$ задана также гладкими функциями $f_i \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Рассматривается следующая задача теории упругости в области с разрезом Ω_0 при условии непроникания берегов разреза Γ_0 в обобщенной формулировке:

$$\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(v - u^0) d\Omega_0 \geq \int f_i(v - u^0)_i d\Omega_0, \quad \forall v \in K_0 \quad (1.1)$$

В силу предположения 1 и предыдущих построений существует единственное решение $u^0 \in K_0$ вариационного неравенства (1.1). Оно характеризуется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j}(u^0) &= f_i \quad \text{почти всюду в } \Omega_0 \\ [u^0] \cdot v &\geq 0, \quad [\sigma_{ij}(u^0)v_j] = 0, \quad \sigma_{kj}(u^0)v_j v_k \leq 0 \\ \sigma_{ij}(u^0)v_j - \sigma_{kj}(u^0)v_j v_k v_i &= 0, \quad \sigma_{kj}(u^0)v_j v_k ([u^0] \cdot v) = 0 \quad \text{на } \Gamma_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Соотношениям на разрезе можно придать точный смысл в пространстве $H_{00}^{1/2}(\Gamma_0)$ для скачка перемещений и его двойственном пространстве для соответствующих напряжений, как было продемонстрировано ранее [12], если дополнительно потребовать $C^{1,1}$ -гладкость разреза. Более того, было показано [12], что решение u^0 задачи (1.1) обладает дополнительной локальной H^2 -гладкостью внутри области Ω_0 и вплоть до берегов разреза $\Gamma_0^\pm$ исключая окрестность края разреза γ_0 .

Постановка возмущенной задачи. Для малого параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ возьмем возмущение $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_N)(\varepsilon)(x)$, которое задано гладкими функциями $\Phi_i \in C^2(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N))$ и $\Phi(0) = I$ с тождественным оператором I . Зафиксируем ε . Используя координатное преобразование $\Phi(\varepsilon)(x)$ для $x \in \Omega$, $x \in \partial\Omega$ и $x \in \Gamma_0$ получим возмущенную область $\Phi(\varepsilon)(\Omega)$ с границей $\Phi(\varepsilon)(\partial\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi(\varepsilon)(\Gamma_0)$ соответственно. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi(\varepsilon)(\Omega) \setminus \bar{\Gamma}_\varepsilon$. Согласно имеющейся гладкости функции Φ справедливо разложение по ε в ряд

$$\Phi(\varepsilon) = I + \varepsilon V + o(\varepsilon) \quad \text{в } \mathbb{R}^N \quad (1.3)$$

где через вектор $V = (V_1, \dots, V_N)$ обозначены значения $\partial\Phi/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$. Тогда из формулы (1.3) следует, что якобиан данного преобразования допускает представление

$$J(\varepsilon) \equiv |\partial\Phi/\partial x|(\varepsilon) = 1 + \varepsilon \operatorname{div} V + o(\varepsilon) \quad \text{почти всюду в } \mathbb{R}^N \quad (1.4)$$

и поэтому строго положителен при достаточно малых ε . Следовательно, координатное преобразование

$$y_i = \Phi_i(\varepsilon)(x), \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega_0, \quad y = (y_1, \dots, y_N) \in \Omega_\varepsilon \quad (1.5)$$

задает взаимно однозначное соответствие между областями Ω_0 и Ω_ε . При этом существует обратное преобразование $x = \Phi^{-1}(\varepsilon)(y)$, где $\Phi^{-1} = (\Phi_1^{-1}, \dots, \Phi_N^{-1})$ с функциями $\Phi_i^{-1}(\varepsilon) \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, и $\Phi^{-1}(\varepsilon)(\bar{\Omega}_\varepsilon) = \bar{\Omega}_0$.

Пусть $\operatorname{meas} \Phi(\varepsilon)(\Gamma_D) > 0$ и справедливо следующее предположение.

Предположение 2. Для каждого допустимого ε набор возмущенных множеств $(\Phi(\varepsilon)(\Omega), \Gamma_\varepsilon, \Phi(\varepsilon)(\Gamma_D))$ так же как и набор $(\Omega, \Gamma_0, \Gamma_D)$ удовлетворяет условиям а–в в предположении 1.

Введем пространство Соболева

$$\tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon) = \{v = (v_1, \dots, v_N): v_i \in H^1(\Omega_\varepsilon), v_i = 0 \text{ почти всюду на } \Phi(\varepsilon)(\Gamma_D)\}$$

Согласно взаимной однозначности отображения областей (1.5), дифференцируемости $\Phi(\varepsilon)$ и сделанных предположений, отображение (1.5) задает также взаимно-однозначное соответствие между пространствами $\tilde{H}^1(\Omega_0)$ и $\tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Именно из включения $v \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$ следует $v \circ \Phi(\varepsilon) \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$, и наоборот, $v \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ влечет $v \circ \Phi^{-1}(\varepsilon) \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$, где $(v \circ \Phi(\varepsilon))(x) = v(\Phi(\varepsilon)(x))$ и $(v \circ \Phi^{-1}(\varepsilon))(y) = v(\Phi^{-1}(\varepsilon)(y))$. Пусть $v^\varepsilon = (v_1^\varepsilon, \dots, v_N^\varepsilon)$ – единичный вектор нормали к возмущенному разрезу Γ_ε . Определим множество допустимых перемещений в области Ω_ε

$$K_\varepsilon = \{v = (v_1, \dots, v_N) \in \tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon): [v] \cdot v^\varepsilon \geq 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_\varepsilon\}$$

которое будет выпукло и замкнуто в $\tilde{H}^1(\Omega_\varepsilon)$. Чтобы получить взаимно однозначное соответствие между множествами K_0 и K_ε , достаточно потребовать выполнения следующего условия.

Предположение 3. Преобразование Φ и геометрия разрезов Γ_0 и Γ_ε таковы, что при всех допустимых ε выполнено условие

$$v^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) = v \quad (1.6)$$

Условие (1.6) будет выполнено, например, при $v^\varepsilon = v = \text{const}$ и произвольном преобразовании Φ или при $v^\varepsilon = v$, зависящем только от $(x_1, \dots, x_{N-1})$ и $\Phi_i = x_i$ для всех $i = 1, \dots, N-1$.

Сформулируем теперь задачу равновесия в возмущенной области Ω_ε

$$\int \sigma_{ij}(u^\varepsilon) \epsilon_{ij}(v - u^\varepsilon) d\Omega_\varepsilon \geq \int f_i(v - u^\varepsilon)_i d\Omega_\varepsilon, \quad \forall v \in K_\varepsilon \quad (1.7)$$

В силу предположения 2, по тем же соображениям, что и для задачи (1.1), существует единственное решение $u^\varepsilon \in K_\varepsilon$ вариационного неравенства (1.7) при каждом допустимом ε . Таким образом, при каждом фиксированном Φ построено однопараметрическое семейство задач (1.7), зависящих от параметра возмущения области ε .

Исходная задача (1.1) является частным случаем задачи (1.7) при $\varepsilon = 0$.

Асимптотика решения. Можно применить координатное преобразование (1.5) к функциям и интегралам в неравенстве (1.7), чтобы отобразить его на исходную область Ω_0 . Использование обратной функциональной матрицы $\Psi = (\partial\Phi/\partial x)^{-1}$ дает преобразование производных $\partial/\partial u_i = \Psi_{ki} \partial/\partial x_k$ и трансформированный тензор деформаций

$$E_{ij}(\Psi; v) = 1/2(v_{i,k} \Psi_{kj} + v_{j,k} \Psi_{ki})$$

Следовательно, в силу предположения 3 задача (1.7) перепишется в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} & \int J(\varepsilon)(c_{ijkl} \circ \Phi(\varepsilon)) E_{kl}(\Psi(\varepsilon); u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) E_{ij}(\Psi(\varepsilon); v - u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) d\Omega_0 \geq \\ & \geq \int J(\varepsilon)(f_i \circ \Phi(\varepsilon))(v - u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))_i d\Omega_0, \quad \forall v \in K_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 1. При достаточно малых ε решение u^ε возмущенной задачи (1.7), отображенное на исходную область Ω_0 с помощью преобразования (1.5), является единственным решением $u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) \in K_0$ вариационного неравенства (1.8).

Используя имеющуюся гладкость $\Phi f, \{c_{ijkl}\}$, можно разложить операторы в задаче (1.8) в ряд по ε . Действительно, из формул (1.3) и (1.4) следует

$$\Psi(\varepsilon) \equiv (\partial\Phi/\partial x)^{-1}(\varepsilon) = I - \varepsilon \partial V / \partial x + o(\varepsilon) \quad \text{почти всюду в } \Omega_0$$

(I – единичная матрица). Поэтому справедливо следующее представление трансформированного тензора деформаций:

$$E_{ij}(\Psi(\varepsilon); v) = \epsilon_{ij}(v) - \varepsilon E_{ij}(\partial V / \partial x; v) + o(\varepsilon) r_1(v) \quad \text{почти всюду в } \Omega_0 \quad (1.9)$$

с некоторой непрерывной формой r_1 . Через r здесь и далее обозначаются остаточные слагаемые в разложениях.

Из формулы (1.3) также следует разложение коэффициентов упругости в виде

$$c_{ijkl} \circ \Phi(\varepsilon) = c_{ijkl} + \varepsilon (V \nabla c_{ijkl}) + o(\varepsilon) \quad \text{почти всюду в } \Omega_0 \quad (1.10)$$

и аналогичная формула для функций нагрузки

$$f_i \circ \Phi(\varepsilon) = f_i + \varepsilon (V \nabla f_i) + o(\varepsilon) \quad \text{почти всюду в } \Omega_0 \quad (1.11)$$

Таким образом, подстановка выражений (1.4) и (1.9)–(1.11) в неравенство (1.8) дает асимптотическое разложение оператора в левой части этого неравенства в виде

$$\begin{aligned} \int J(\varepsilon) (c_{ijkl} \circ \Phi(\varepsilon)) E_{kl}(\Psi(\varepsilon); u) E_{ij}(\Psi(\varepsilon); v) d\Omega_0 = \\ = \int (\sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) + \varepsilon A_1(V; u, v) + o(\varepsilon) r_2(u, v)) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

с билинейной и симметричной по u, v формой

$$A_1(V; u, v) = \operatorname{div}(V c_{ijkl}) \epsilon_{kl}(u) \epsilon_{ij}(v) - \sigma_{ij}(u) E_{ij}(\partial V / \partial x; v) - \sigma_{ij}(v) E_{ij}(\partial V / \partial x; u) \quad (1.13)$$

и представление оператора в правой части неравенства (1.8) в виде

$$\int J(\varepsilon) (f_i \circ \Phi(\varepsilon)) v_i d\Omega_0 = \int (f_i v_i + \varepsilon \operatorname{div}(V f_i) v_i + o(\varepsilon) r_3(v)) d\Omega_0 \quad (1.14)$$

с некоторыми непрерывными формами r_2 и r_3 .

Множество K_0 является конусом в пространстве $\tilde{H}^1(\Omega_0)$ поэтому можно выбрать $v = 0$ и $v = 2(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))$ в качестве пробных функций в неравенстве (1.8), что приводит к равенству

$$\begin{aligned} \int J(\varepsilon) (c_{ijkl} \circ \Phi(\varepsilon)) E_{kl}(\Psi(\varepsilon); u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) E_{ij}(\Psi(\varepsilon); u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) d\Omega_0 = \\ = \int J(\varepsilon) (f_i \circ \Phi(\varepsilon)) (u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))_i d\Omega_0 \end{aligned}$$

Использование здесь разложений (1.12) и (1.14) по ε дает представление

$$\begin{aligned} \int \sigma_{ij}(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) \epsilon_{ij}(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) d\Omega_0 = \int \{ f_i (u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))_i + \varepsilon (\operatorname{div}(V f_i) (u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))_i - \\ - A_1(V; u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon), u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))) + o(\varepsilon) r_4(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon), u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)) \} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

с некоторой непрерывной формой r_4 . Следовательно, после применения неравенств Корна и Гельдера равенство (1.15) приводит к равномерной оценке

$$\|u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)\|_{\tilde{H}^1(\Omega_0)} \leq c_1 \quad (1.16)$$

при достаточно малых ε .

Возьмем теперь $v = u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)$ в (1.1), $v = u^0$ в (1.8) и сложим эти неравенства. Опять с учетом соотношений (1.12) и (1.14) выводим представление

$$\int \sigma_{ij}(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) - u^0) \epsilon_{ij}(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) - u^0) d\Omega_0 \leq \int \{ \varepsilon (\operatorname{div}(V f_i)(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) - u^0))_i - \\ - A_1(V; u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon), u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) - u^0) + o(\varepsilon) r_4(u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon), u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) - u^0) \} d\Omega_0$$

Аналогично, применяя здесь неравенства Корна и Гельдера, с учетом оценки (1.16) и непрерывности формы A_1 выводим оценку

$$\|u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) - u^0\|_{\tilde{H}^1(\Omega_0)} \leq c_2 \varepsilon \quad (1.17)$$

В частности, неравенство (1.17) означает, что

$$u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon) \rightarrow u^0 \text{ сильно в } \tilde{H}^1(\Omega_0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.18)$$

Из неравенства (1.17), деленного на ε , следует существование слабого предела $\dot{u}(\Phi) \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ на некоторой подпоследовательности ε_n т.е.

$$\varepsilon_n^{-1}(u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n) - u^0) \rightarrow \dot{u}(\Phi) \text{ слабо в } \tilde{H}^1(\Omega_0) \text{ при } \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad (1.19)$$

Этот предел может быть не единственным.

Согласно определению [10], такая функция $\dot{u}(\Phi)$ называется слабой материальной производной (МП) решения, которую можно также интерпретировать как полную производную от возмущенного решения $u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)$ по параметру ε .

Выясним ее свойства. Во-первых, обозначим через $C(u^0) \subseteq \Gamma_0$ множество точек на разрезе, в которых выполнено равенство $[u_0] \cdot \nu = 0$ для решения u^0 задачи (1.1). Поскольку в силу условия (1.6) имеем $[u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon)] \cdot \nu \geq 0$ на Γ_0 то на основании принципа компактности из сходимости (1.19) следует $[\dot{u}(\Phi)] \cdot \nu \geq 0$ на $C(u^0)$. Во-вторых, возьмем $v = u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)$ в качестве пробной функции в неравенстве (1.1), разделим его на ε_n и перейдем к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ в силу сходимостей (1.18) и (1.19). В итоге получим

$$\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(\dot{u}(\Phi)) d\Omega_0 \geq \int f_i \dot{u}_i(\Phi) d\Omega_0 \quad (1.20)$$

Из неравенства (1.8) для подпоследовательности функций $u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)$ с пробной функцией $v = u^0$ в силу разложений (1.12) и (1.14) имеем

$$\int \sigma_{ij}(u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)) \epsilon_{ij}(u^0 - u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)) d\Omega_0 \geq \int \{ f_i(u^0 - u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n))_i + \\ + \varepsilon_n (\operatorname{div}(V f_i)(u^0 - u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)))_i - A_1(V; u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n), u^0 - u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)) + \\ + o(\varepsilon_n) r_4(u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n), u^0 - u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n)) \} d\Omega_0$$

Аналогично предыдущему, разделим это неравенство на ε_n и перейдем к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ на основании соотношений (1.18) и (1.19). Это дает

$$-\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(\dot{u}(\Phi)) d\Omega_0 \geq -\int f_i \dot{u}_i(\Phi) d\Omega_0 \quad (1.21)$$

Неравенства (1.20) и (1.21) приводят к равенству

$$\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(\dot{u}(\Phi)) d\Omega_0 = \int f_i \dot{u}_i(\Phi) d\Omega_0 \quad (1.22)$$

Определим теперь замкнутое выпуклое множество

$$Z(u^0) = \{v = (v_1, \dots, v_N) \in \tilde{H}^1(\Omega_0): [v] \cdot v \geq 0 \text{ на } C(u^0), \\ \int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(v) d\Omega_0 = \int f_i v_i d\Omega_0\}$$

которое является гиперплоскостью в пространстве $\tilde{H}^1(\Omega_0)$ касательной к конусу K_0 в точке u^0 . Оно не пустое, например, $\pm u^0 \in Z(u^0)$. С учетом полученного тождества (1.22) и предыдущих рассуждений доказан следующий результат.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 существует слабая МП решения $\dot{u}(\Phi) \in Z(u^0)$ в смысле сходимости (1.19).

Можно вывести еще одно важное соотношение, характеризующее $\dot{u}(\Phi)$. Задача (1.1) дает очевидное тождество

$$\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(u^0) d\Omega_0 = \int f_i u_i^0 d\Omega_0$$

Вычтем его из равенства (1.15) с $\varepsilon = \varepsilon_n$, полученное соотношение разделим на ε_n и перейдем к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ в силу (1.18) и (1.19). В итоге получим

$$2 \int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(\dot{u}(\Phi)) d\Omega_0 = \int (f_i \dot{u}_i(\Phi) + \operatorname{div}(V f_i) u_i^0 - A_1(V; u^0, u^0)) d\Omega_0$$

что с учетом равенства (1.22) дает требуемый результат в виде следующей леммы.

Лемма 1. Для МП $\dot{u}(\Phi)$ из теоремы 2 выполнены следующие условия ортогональности:

$$\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(\dot{u}(\Phi)) d\Omega_0 = \int f_i \dot{u}_i(\Phi) d\Omega_0 = \int (\operatorname{div}(V f_i) u_i^0 - A_1(V; u^0, u^0)) d\Omega_0 \quad (1.23)$$

Отметим, что единственное решение $U \in Z(u^0)$ вариационного неравенства

$$\int \sigma_{ij}(U) \epsilon_{ij}(v - U) d\Omega_0 \geq \int (\operatorname{div}(V f_i)(v - U)_i - A_1(V; u^0, v - U)) d\Omega_0, \quad \forall v \in Z(u^0)$$

удовлетворяет всем соотношениям, полученным для $\dot{u}(\Phi)$ но в общем случае не удается доказать, что $U = \dot{u}(\Phi)$. Эти функции совпадают только в частных случаях, например, если выполнено условие $[u^0] \cdot v = 0$ на всей трещине Γ_0 или $[U] \cdot v \geq 0$ на Γ_0 и тогда МП $\dot{u}(\Phi) = U$ определяется единственным образом из указанной выше вариационной задачи.

Согласно определению (1.19), МП можно интерпретировать как полную производную от возмущенного решения по параметру возмущения. Для сравнения, приведенные ранее [16, 17] весовые функции Бюкнера определяются из частной производной $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} (u^\varepsilon - u^0)$. Для линейной задачи о трещине были построены [18] задачи

для нахождения МП произвольного порядка и соответствующих весовых функций.

Асимптотика потенциальной энергии. Для фиксированного возмущения Φ можно определить функцию потенциальной энергии $\Pi(\Phi): (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \mapsto \mathbf{R}$ для задачи (1.7) в виде

$$\Pi(\Phi)(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij}(u^\varepsilon) \epsilon_{ij}(u^\varepsilon) d\Omega_\varepsilon - \int f_i u_i^\varepsilon d\Omega_\varepsilon$$

где $u^\varepsilon \in K_\varepsilon$ – решение задачи (1.7). С учетом равенства

$$\int \sigma_{ij}(u^\varepsilon) \epsilon_{ij}(u^\varepsilon) d\Omega_\varepsilon = \int f_i u_i^\varepsilon d\Omega_\varepsilon$$

приходим к эквивалентной форме

$$\Pi(\Phi)(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int f_i u_i^\varepsilon d\Omega_\varepsilon \quad (1.24)$$

В частности, при $\varepsilon = 0$ получаем значение потенциальной энергии для задачи (1.1):

$$\Pi(\Phi)(0) = -\frac{1}{2} \int f_i u_i^0 d\Omega_0 \quad (1.25)$$

В условиях теоремы 1 применим к интегралу в формуле (1.24) координатное преобразование (1.5), что приведет к равенству

$$\Pi(\Phi)(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \int J(\varepsilon) (f_i \circ \Phi(\varepsilon)) (u^\varepsilon \circ \Phi(\varepsilon))_i d\Omega_0 \quad (1.26)$$

Найдем первую производную функции потенциальной энергии. Возьмем подпоследовательность ε_n из формулы (1.19), вычтем значение (1.25) из равенства (1.26) с $\varepsilon = \varepsilon_n$, разделим это соотношение на ε_n и перейдем к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ в силу сходимостей (1.18), (1.19) и разложений (1.4), (1.11). В итоге получаем

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \varepsilon_n^{-1} (\Pi(\Phi)(\varepsilon_n) - \Pi(\Phi)(0)) = \Pi'(\Phi)(0) \quad (1.27)$$

$$\Pi'(\Phi)(0) = -\frac{1}{2} \int (\operatorname{div}(V f_i) u_i^0 + f_i \dot{u}(\Phi)) d\Omega_0$$

На основании леммы 1, с помощью тождества (1.23) можно избавиться от МП во второй формуле (1.27) и получить эквивалентное соотношение

$$\Pi'(\Phi)(0) = \int (-\operatorname{div}(V f_i) u_i^0 + \frac{1}{2} A_1(V; u^0, u^0)) d\Omega_0 \quad (1.28)$$

Поскольку представление (1.28) уже не зависит от $\dot{u}(\Phi)$ то первая производная функции $\Pi(\Phi)$ определяется единственным образом и справедлива формула

$$\Pi(\Phi)(\varepsilon) = \Pi(\Phi)(0) + \varepsilon \Pi'(\Phi)(0) + o(\varepsilon) \quad (1.29)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для каждого допустимого возмущения Φ существует первая производная $\Pi'(\Phi)(0)$ функции потенциальной энергии $\Pi(\Phi)$ по параметру возмущения ε при $\varepsilon = 0$ и справедлива асимптотическая формула (1.29) при достаточно малых ε .

Важным дополнением теоремы 3 является следующая лемма.

Лемма 2. Если два разных возмущения $\Phi^1(\varepsilon)$ и $\Phi^2(\varepsilon)$ переводят область с разрезом Ω_0 в одну и ту же возмущенную область Ω_ε при всех ε то $\Pi'(\Phi^1)(0) = \Pi'(\Phi^2)(0)$.

Действительно, решение u^ε задачи (1.7) и энергия $\Pi(\Phi)(\varepsilon)$ в представлении (1.24) определяются возмущенной областью Ω_ε и не зависят от выбора функции возмущения Φ . Значение $\Pi(\Phi)(0)$ из формулы (1.25) вообще не зависит от Φ . Поэтому и единственная производная $\Pi'(\Phi)(0)$ в разложении (1.29) будет тоже независима в этом смысле от выбора функции возмущения Φ .

С помощью представления (1.13) интеграл в формуле (1.28) можно переписать в виде функционала $\mathcal{L}_1: W^{1,\infty}(\Omega_0)^N \rightarrow \mathbf{R}$, зависящего от поля скоростей V , в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(V) = & \int (-\operatorname{div}(V f_i) u_i^0 + \frac{1}{2} \operatorname{div}(V c_{ijkl}) \epsilon_{kl}(u^0) \epsilon_{ij}(u^0) - \\ & - \sigma_{ij}(u^0) E_{ij}(\partial V / \partial x; u^0)) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Интегральное представление (1.30) первой производной энергии в рассматриваемой нелинейной задаче при постоянных коэффициентах упругости $\{c_{ijkl}\}$ впервые

было выведено [19] с помощью обратного координатного преобразования $\Phi^{-1}(\varepsilon) \in W^{2,\infty}(\mathbf{R}^N)^N$. При этом использовались вариационные свойства функционала потенциальной энергии аналогичные условиям ортогональности (1.23), что позволило не рассматривать МП решения.

Отметим также, что с помощью условий ортогональности для МП $\dot{u}(\Phi)$ можно дифференцировать не только функционал потенциальной энергии. Например, рассмотрим функционал отклонения решения u^ε задачи (1.7) от заданной гладкой финитной функции $w \in C_0^\infty(\Omega)$ по энергетической норме

$$F(\Phi)(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij}(u^\varepsilon - w) \epsilon_{ij}(u^\varepsilon - w) d\Omega_\varepsilon$$

Функция w принадлежит всем K_ε при достаточно малых ε . Подстановка $v = u^0 \pm w$ в неравенство (1.1) и $v = u^{\varepsilon_n} \circ \Phi(\varepsilon_n) \pm w$ в неравенство (1.8) с последующим вычитанием полученных соотношений, деленных на ε_n , и переход к пределу при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ дают тождество (ср. с условиями (1.23))

$$\int \sigma_{ij}(\dot{u}(\Phi)) \epsilon_{ij}(w) d\Omega_0 = \int (\operatorname{div}(V f_i) w_i - A_1(V; u^0, w)) d\Omega_0$$

В силу гладкости w имеем разложение по ε в ряд:

$$w \circ \Phi(\varepsilon) = w + \varepsilon(V \cdot \nabla w) = o(\varepsilon) \text{ в } \Omega_0$$

Поэтому, применяя преобразование (1.5) к $F(\varepsilon)$, с учетом сходимостей (1.18) и (1.19) можно вычислить следующий частный предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \varepsilon_n^{-1} (F(\Phi)(\varepsilon_n) - F(\Phi)(0)) &= \\ &= \int \left(\frac{1}{2} A_1(V; u^0 - w, u^0 - w) + \sigma_{ij}(u^0 - w) \epsilon_{ij}(\dot{u}(\Phi) - V \cdot \nabla w) \right) d\Omega_0 \end{aligned}$$

Но в силу условий (1.23) и полученного тождества можно избавиться здесь от МП $\dot{u}(\Phi)$ что дает производную функционала $F(\Phi)$ по ε при $\varepsilon = 0$ в виде

$$F'(\Phi)(0) = \int (\operatorname{div}(V f_i)(u^0 - w)_i - 1/2 A_1(V; u^0 + w, u^0 - w) - \sigma_{ij}(u^0 - w) \epsilon_{ij}(V \cdot \nabla w)) d\Omega_0$$

Можно заметить, что правила дифференцирования по ε рассматриваемых выше функционалов $F(\Phi)$ и $\Pi(\Phi)$ в формуле (1.27) формально соответствуют принципу дифференцирования движущегося объема (см. [20]). Но в общем случае произвольного функционала $F(\Phi)(\varepsilon)$ этот принцип здесь нельзя использовать в силу неединственности МП для задачи (1.1).

Если МП решения $\dot{u}(\Phi)$ определяется единственным образом и функции Φ , f , $\{c_{ijkl}\}$ достаточно гладкие, то существует вторая производная потенциальной энергии $\Pi''(\Phi)(0)$, как показано ранее [15]. В рассматриваемом здесь случае ее можно вывести по аналогии с первой производной в виде

$$\Pi''(\Phi)(0) = \int (-F_2(\Phi) u^0 - \operatorname{div}(V f_i) \dot{u}_i(\Phi) + 1/2 A_2(\Phi; u^0, u^0) + A_1(V; u^0, \dot{u}(\Phi))) d\Omega_0$$

где F_2 и A_2 – коэффициенты при $\varepsilon^2/2$ в следующих членах разложений (1.14) и (1.12) соответственно.

2. Инвариантные интегралы энергии.

Общий вид инвариантного интеграла. Пусть область $D \subset \mathbf{R}^N$ с кусочно-гладкой границей ∂D такова, что $\operatorname{meas} D > 0$, $\bar{D} \subseteq \bar{\Omega}_0$ и решение u^0 задачи (1.1) имеет H^2 -

гладкость в области D вплоть до границы. Согласно сделанному ранее замечанию о гладкости решения, такая область всегда существует. Интеграл из формулы (1.30) можно дифференцировать по частям в области D . Обозначим через $q = (q_1, \dots, q_N)$ единичный вектор внешней нормали к границе области D . Тогда имеем эквивалентное представление функционала (1.30) в виде суммы

$\mathcal{L}_1(V) = I(V) + I_1 + I_2 + I_3$ следующих интегралов:

$$I_1 = \int (\sigma_{ij,j}(u^0) + f_i)(V \cdot \nabla u_i^0) dD$$

$$I_2 = \int f_i (V \cdot \nabla u_i^0) d(\Omega_0 \setminus D) - \int (V \cdot \nu) f_i u_i^0 d(\partial\Omega_0 \setminus \Gamma_D) \cap (\bar{\Omega}_0 \setminus D) + \\ + \frac{1}{2} \int (V \cdot \nabla c_{ijkl}) \epsilon_{kl}(u^0) \epsilon_{ij}(u^0) d(\Omega_0 \setminus D)$$

$$I_3 = \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} \operatorname{div} V \epsilon_{ij}(u^0) - E_{ij} \left(\frac{\partial V}{\partial x}; u^0 \right) \right) d(\Omega_0 \setminus D)$$

и интеграла по замкнутой границе ∂D

$$I(V) = \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} (V \cdot q) \epsilon_{ij}(u^0) - q_j (V \cdot \nabla u_i^0) \right) d(\partial D) \quad (2.1)$$

Здесь $I_1 = 0$ в силу уравнений равновесия (1.2).

Ближайшая цель – представить производную функции энергии только интегралом по границе (2.1). Выведем достаточные условия, при которых $I_2 = I_3 = 0$. Интегралы в I_2 обращаются в нуль при $V = 0$ или $f = 0$, $\nabla c_{ijkl} = 0$. Чтобы интеграл I_3 обратился в нуль, с учетом симметрии тензора $\{c_{ijkl}\}$ достаточно потребовать выполнения соотношения

$$c_{ijkl}(x) \xi_{kl} \left(\frac{1}{2} \operatorname{div} V(x) \xi_{ij} - \xi_{im} V_{m,j}(x) \right) = 0, \quad \forall \{\xi_{ij}\}, \quad \text{для почти всех } x \in \Omega_0 \setminus \bar{D} \quad (2.2)$$

Равенство (2.2) выполняется, очевидно, для $V \equiv \text{const}$. Кроме того, при $N = 2$ вектор $V = x$ дает

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} V = 1, \quad V_{m,j} = \delta_{mj}, \quad \frac{1}{2} \operatorname{div} V \xi_{ij} - \xi_{im} V_{m,j} = \xi_{ij} - \xi_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2$$

Также при $N = 2$ вектор $V = (-x_2, x_1)$ дает антисимметричную матрицу $V_{m,j} = V_{j,m}$ при $m \neq j$ и $V_{j,j} = 0$ ($m, j = 1, 2$), подстановка которой в соотношение (2.2) приводит формально к условию, связывающему коэффициенты упругости,

$$c_{1111} = c_{2222} = c_{1212} = -c_{1122}, \quad c_{1211} = c_{1222} = 0$$

Это условие не удовлетворяется даже для изотропного случая. При $N = 3$ не удастся построить примеры непостоянного вектора $V \neq \text{const}$, для которого было бы выполнено соотношение (2.2).

Подытожим данные рассуждения в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть в условиях теоремы 3 подобласти $D \subseteq \Omega_0$ с достаточно гладкой границей ∂D удовлетворяют следующим предположениям: а) решение u^0 задачи (1.1) из класса H^2 в $\bar{D}$, б) в области $\bar{\Omega}_0 \setminus D$ выполняются условия $V = 0$ или $f = 0$, $\nabla c_{ijkl} = 0$, в) функции V и c_{ijkl} таковы, что справедливо равенство (2.2) почти всюду в $\Omega_0 \setminus \bar{D}$. Тогда первая производная потенциальной энергии $\Pi'(\Phi)(0)$ представляется инвариантным интегралом $I(V)$ вида (2.1) по границам ∂D .

В следующих разделах на основе формулы (2.1) построены инвариантные интегралы (ИИ) для конкретных примеров возмущения области и геометрии разреза.

Возмущение всего разреза. Выберем срезающую функцию $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)$, которая финитна в области Ω и $\eta \equiv 1$ в некоторой окрестности $\bar{\mathcal{O}}(\Gamma_0) \subset \mathbf{R}^N$ всего разреза. При этом предполагаем, что $\Gamma_0 \subset \bar{\mathcal{O}}(\Gamma_0) \subset \text{supp} \eta \subset \Omega$. Пусть разрез плоский, именно, лежит в плоскости $x \cdot v = a$, $a = \text{const}$. Для выбранного вектора $p = (p_1, \dots, p_N)$ рассмотрим сдвиг разреза в направлении p при помощи возмущения $\Phi(\epsilon) = I + \epsilon p \eta$. Тогда координатное преобразование (1.5) даст возмущенный разрез Γ_ϵ который лежит в плоскости $(y - \epsilon p) \cdot v = a$, область $\Phi(\epsilon)(\Omega) = \Omega$ в силу финитности η , и возмущенную область с разрезом $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bar{\Gamma}_\epsilon$. Если справедливо предположение 1, то и предположение 2 будет тогда выполняться при достаточно малых ϵ . Также, очевидно, выполнено условие (1.6) в предположении 3 в силу постоянного вектора нормали $v^\epsilon = v$.

Можно воспользоваться теоремой 4 с $\bar{D} = \text{supp} \eta \setminus \mathcal{O}(\Gamma_0)$, если потребовать дополнительно $f \equiv 0$ и $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$ в окрестности $\bar{\mathcal{O}}(\Gamma_0)$ разреза.

Действительно, решение u^0 задачи (1.1) обладает дополнительной локальной H^2 -гладкостью вне окрестности края разреза γ_0 , а значит, в $\bar{D}$, и тогда условие *a* теоремы 4 выполнено. Вне $\text{supp} \eta$ имеем $V \equiv 0$, в $\bar{\mathcal{O}}(\Gamma_0)$ предположении $f \equiv 0$ и $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$, следовательно, условие *b* тоже будет выполнено. Вне $\text{supp} \eta$ функция V равна нулю, в окрестности $\mathcal{O}(\Gamma_0)$ в силу $\eta \equiv 1$ имеем тоже постоянное поле скоростей $V \equiv p$, поэтому справедливо равенство (2.2) и условие *в*.

Таким образом, приходим к ИИ $I(p\eta)$ вида (2.1) по границе ∂D , состоящий из границы носителя срезающей функции $\partial D_1 = \partial(\text{supp} \eta)$ и границы окрестности $\partial D_2 = \partial \mathcal{O}(\Gamma_0)$. Но интеграл по ∂D_1 равен нулю. С другой стороны, по лемме 2 первая производная $\Pi'(I + \epsilon p \eta)(0)$, а значит, и ее представление $I(p\eta)$ не зависят от выбора срезающей функции η , а значит, и от ∂D_2 . Поэтому получаем интеграл

$$I(p\eta) = \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} (p \cdot q) \epsilon_{ij}(u^0) - q_j \frac{\partial u_i^0}{\partial p} \right) d\Xi(\Gamma_0) \quad (2.3)$$

по любому достаточно гладкому замкнутому $(N - 1)$ -мерному многообразию $\Xi(\Gamma_0)$ вокруг всего разреза Γ_0 из окрестности $\mathcal{O}(\Gamma_0) \subset \Omega$, где $f \equiv 0$, $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$, и для произвольного вектора p .

Для линейной задачи без условий непроникания берегов трещины требование (1.6) в предположении 3 снимается. Поэтому в линейном случае будет справедливо представление производной энергии ИИ (2.3) при произвольной геометрии разреза, удовлетворяющего предположению 1, и произвольном направлении сдвига p . Для изучаемой здесь нелинейной задачи с условиями непроникания соотношение (1.6) выполняется только в частных случаях выбора неплоского разреза Γ_0 и направления сдвига p .

Например, пусть разрез Γ_0 лежит на поверхности, которая задана уравнением $x_N = \psi(x_1, \dots, x_{N-1})$ с достаточно гладкой функцией ψ . Тогда сдвиг $\Phi(\epsilon) = I + \epsilon p \eta$ в направлении $p = (0, \dots, 0, p_N)$ позволяет удовлетворить условию (1.6) и дает ИИ (2.3) для такого неплоского разреза.

Возмущение края разреза. Пусть плоский разрез Γ_0 с краем γ_0 (замкнутая кривая при $N = 3$ или две точки при $N = 2$) лежит в плоскости $x \cdot v = a$. Предположим, что существует некоторая окрестность края разреза $\mathcal{O}_1(\gamma_0) \subset \mathbf{R}^N$, в которой $f \equiv 0$ и $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$. При этом предполагаем, что граница этой окрестности пересекает разрез, что отличает данное построение от приведенного в предыдущем разделе. Выберем срезающую функцию $\chi \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^N)$ с $\chi \equiv 1$ в $\mathcal{O}_1(\gamma_0)$ и $\chi \equiv 0$ вне $\mathcal{O}_2(\gamma_0)$, где $\gamma_0 \subset \bar{\mathcal{O}}_1(\gamma_0) \subset \bar{\mathcal{O}}_2(\gamma_0) \subset$

$\subset \Omega$ и граница $\mathbb{O}_2(\gamma_0)$ тоже пересекает разрез. Для касательного вектора к разрезу $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ т.е. $\tau \cdot \nu = 0$, применение возмущения сдвига $\Phi(\varepsilon) = I + \varepsilon \tau \chi$ переводит Γ_0 в разрез Γ_ε в той же плоскости $u \cdot \nu = a$ с возмущенным краем γ_ε .

В силу сделанных допущений можно применить теорему 4 с $D = \mathbb{O}_2(\gamma_0) \setminus \bar{\mathbb{O}}_1(\gamma_0)$, пользуясь теми же рассуждениями, что и в предыдущем разделе. При этом граница ∂D будет состоять уже из трех частей

$$\partial D_1 = \partial \mathbb{O}_2(\gamma_0), \quad \partial D_2 = (\bar{\mathbb{O}}_2(\gamma_0) \setminus \mathbb{O}_1(\gamma_0)) \cap \Gamma_0, \quad \partial D_3 = \partial \mathbb{O}_1(\gamma_0)$$

Часть интеграла $I(\tau \chi)$ из формулы (2.1) по ∂D_1 равна здесь нулю в силу тождества $V \equiv 0$. По лемме 2 имеем, что $I(\tau \chi)$ не зависит от выбора срезающей функции χ , а значит, и от ∂D_2 . С другой стороны, подынтегральное выражение в $I(\tau \chi)$ по границе ∂D_2 ограничено в силу дополнительной локальной гладкости решения u^0 . Поэтому можно перейти к пределу в $I(\tau \chi)$ при $\text{meas}(\partial D_2) \rightarrow 0$. В результате остается только интеграл по части границы ∂D_3 , который опять в силу леммы 2 не зависит от выбора $\mathbb{O}_1(\gamma_0)$.

Таким образом, имеем ИИ энергии при возмущении сдвига вдоль плоского разреза в форме

$$I(\tau \chi) = \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} (\tau \cdot q) \epsilon_{ij}(u^0) - q_j \frac{\partial u_i^0}{\partial \tau} \right) d\Xi(\gamma_0) \quad (2.4)$$

по произвольному замкнутому, достаточно гладкому $(N-1)$ -мерному многообразию $\Xi(\gamma_0)$ вокруг края разреза γ_0 в окрестности $\mathbb{O}_1(\gamma_0)$ где $f \equiv 0$, $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$, и в произвольном касательном направлении τ к разрезу. Например, $\Xi(\gamma_0)$ можно взять в форме тора вокруг края разреза в $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что выбор в предыдущем разделе $p = \tau$ для сдвига всего разреза приводит к той же области, что и при сдвиге края разреза. Поэтому из леммы 2 следует, что $I(\tau \eta) = I(\tau \chi)$ в формулах (2.3) и (2.4) соответственно.

Пусть край γ_0 плоского разреза в трехмерной области включает в себя прямолинейный отрезок L . Как было показано [14] для прямоугольника, в этом случае можно получить ИИ вида (2.4) по замкнутой поверхности вокруг только части $\gamma_0 \setminus L$ края разреза при возмущении сдвига вдоль L . При этом необходимо использовать соотношения, выполняемые на разрезе, и дополнительную локальную гладкость решения вдоль L .

Для линейной задачи о трещине ИИ типа (2.3), (2.4) рассматривались ранее [21].

Возмущение вершины разреза. Рассмотрим случай $N = 2$ прямолинейный разрез Γ_0 . Пусть $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ – единичный направляющий вектор и $C^1 = (B\tau_1, B\tau_2)$, $C^2 = (A\tau_1, A\tau_2)$ – две вершины разреза. Другими словами, разрез Γ_0 лежит на прямой, проходящей через начало координат. Выберем срезающие функции $\chi^1, \chi^2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)$ в окрестности вершин разреза C^1, C^2 соответственно. Предполагаем, что они финитные, имеют непересекающиеся носители $\text{meas}(\text{supp} \chi^1 \cap \text{supp} \chi^2) = 0$ и $\chi^1 \equiv 1$ в окрестности $\mathbb{O}(C^1)$, $\chi^2 \equiv 1$ в окрестности $\mathbb{O}(C^2)$. Рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, в этом случае дают ИИ $I(\tau(\chi^1 + \chi^2))$ и формулы (2.4) в виде суммы двух интегралов по непересекающимся, замкнутым, достаточно гладким кривым $\Xi(C^1)$ и $\Xi(C^2)$ вокруг вершин C^1 и C^2 соответственно. С другой стороны, пользуясь леммой 2, можно выяснить, что эти интегралы взаимно независимы.

В итоге получаем ИИ для каждой вершины разреза. Рассмотрим одну вершину, которая не совпадает с $(0, 0)$, пусть это будет C^1 . Согласно формуле (2.4), имеем представление соответствующего ИИ в виде

$$I(\tau \chi^1) = \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} (\tau \cdot q) \epsilon_{ij}(u^0) - q_j \frac{\partial u_i^0}{\partial \tau} \right) d\Xi(C^1) \quad (2.5)$$

для $f \equiv 0$ и $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$ в окрестности $\mathbb{O}(C^1)$.

Формула (2.5) хорошо известна в механике разрушения для линейной задачи о трещине как независимый от пути интеграл Черепанова – Райса. В классическом случае функция $u^0 \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$ в (2.5) является решением линейной задачи (ср. с (1.1))

$$\int \sigma_{ij}(u^0) \epsilon_{ij}(v) d\Omega_0 = \int f_i v_i d\Omega_0, \quad \forall v \in \tilde{H}^1(\Omega_0)$$

В нелинейном случае получено такое же выражение интеграла (2.5) для решения $u^0 \in K_0$ нелинейной задачи (1.1).

С другой стороны, формула (2.5) является не единственным возможным представлением первой производной энергии. Применим возмущение локального растяжения $\Phi(\epsilon) = I + \epsilon x B^{-1} \chi^1$. Это даст тот же возмущенный прямолинейный разрез Γ_ϵ с вершинами $C_\epsilon^1 = ((B + \epsilon)\tau_1, (B + \epsilon)\tau_2)$ и $C_\epsilon^2 = C^2$, что и локальный сдвиг $I + \epsilon \tau \chi^1$, рассмотренный выше. При растяжении поле скоростей $V = x B^{-1} \chi^1$ в окрестности вершины разреза $\mathcal{O}(C^1)$, где $\chi^1 \equiv 1$, имеет вид $V \equiv x B^{-1}$. Поэтому условие (2.2) удовлетворяется. Таким образом, при сделанных предположениях, когда справедливо представление производной энергии $\Pi'(I + \epsilon \tau \chi^1)(0)$ интегралом по контуру (2.5), также будет справедливо представление $\Pi'(I + \epsilon x B^{-1} \chi^1)(0)$ в виде ИИ

$$I(x B^{-1} \chi^1) = \frac{1}{B} \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} (x \cdot q) \epsilon_{ij}(u^0) - q_j (x \cdot \nabla u_i^0) \right) d\Xi(C^1) \quad (2.6)$$

В силу леммы 2 выполнено равенство

$$\Pi'(I + \epsilon \tau \chi^1)(0) = \Pi'(I + \epsilon x B^{-1} \chi^1)(0)$$

Поэтому ИИ (2.5) и (2.6) равны между собой, т.е. $I(\tau \chi^1) = I(x B^{-1} \chi^1)$. Для линейной задачи о трещине, ИИ аналогичные (2.6) и (2.7), были введены ранее [22].

Отметим также, что те же рассуждения, что и выше, приводят к еще одному ИИ в двумерном случае. Именно, применим возмущение растяжения $\Phi(\epsilon) = I + \epsilon x \eta$ ко всему прямолинейному разрезу, который лежит на прямой $x \cdot v = 0$, со срезающей функцией η , которая была определена ранее. Это дает ИИ в виде

$$I(x \eta) = \int \sigma_{ij}(u^0) \left(\frac{1}{2} (x \cdot q) \epsilon_{ij}(u^0) - q_j (x \cdot \nabla u_i^0) \right) d\Xi(\Gamma_0) \quad (2.7)$$

по произвольной, достаточно гладкой, замкнутой кривой $\Xi(\Gamma_0)$ вокруг разреза Γ_0 в окрестности $\mathcal{O}(\Gamma_0)$ где $f \equiv 0$ и $\nabla c_{ijkl} \equiv 0$.

3. Заключение. Для нелинейной задачи о трещине с условиями взаимного непроникания берегов, при выполнении условия (1.6), налагаемого на геометрию трещины и общий вид возмущения области, справедливо асимптотическое представление (1.19) решения возмущенной задачи по малому параметру возмущения со слабой МП решения.

Методом МП получено асимптотическое разложение (1.29) функции потенциальной энергии по параметру возмущения (аналог формулы Гриффитса). При этом первая производная энергии не зависит от МП решения, а вторая производная существует, если МП единственна. В линейной задаче о трещине справедливо полное асимптотическое разложение произвольного порядка как возмущенного решения, так и функции энергии.

Первая производная функции энергии допускает общее представление в виде ИИ по замкнутому контуру (2.1), если выполнено достаточное условие (2.2), налагаемое на функцию возмущения и коэффициенты упругости. ИИ в выражении (2.1) определяется полем скоростей выбранного возмущения. Представление (2.1) с условием (2.2) справедливо как для нелинейной, так и для линейной задачи о трещине. Пост-

роены следующие ИИ в двумерном и трехмерном случаях: по произвольному гладкому контуру вокруг всего разреза в виде формулы (2.3) при возмущении сдвига плоского разреза в произвольном направлении и неплоского разреза в направлении, удовлетворяющем условию (1.6), в виде формулы (2.7) при растяжении прямолинейного разреза; по контуру вокруг края плоского разреза в виде формулы (2.4) при возмущении сдвига вдоль разреза; по контуру вокруг вершины прямолинейного разреза в виде формулы (2.5) при возмущении локального сдвига вдоль разреза и в виде эквивалентной ей формулы (2.6) при возмущении локального растяжения.

Полученные формулы инвариантных интегралов энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов могут быть использованы в задачах квазистатического роста трещины, оптимизации ее формы и расположения в теле.

Автор посвящает статью 50-летию профессора А.М. Хлуднева и благодарит его за консультации и помощь при работе над данной темой.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00842) и Министерства образования РФ в области фундаментального естествознания (2000.4.19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. О распространении трещин в сплошной среде // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 476–488.
2. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks // Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 2. P. 379–386.
3. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
4. Гольдштейн Р.В., Спектор А.А. Вариационные оценки решений некоторых смешанных пространственных задач теории упругости с неизвестной границей // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 2. С. 82–94.
5. Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В., Морозова Т.М. Равновесие системы разрезов при образовании на них областей налегания и раскрытия // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 672–678.
6. Назаров С.А. Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. М., 1990. Вып. 1. С. 17–31.
7. Назаров С.А., Полякова О.Р. Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 104–119.
8. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
9. Mazja W.G., Nazarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 432S.
10. Sokolowski J., Zolesio J.-P. Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. 250 p.
11. Khudnev A.M., Sokolowski J. The Griffith formula and the Rice-Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // Euro. J. Appl. Math. 1999. V. 10. № 4. P. 379–394.
12. Khudnev A.M., Kovtunen V.A. Analysis of Crack in Solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 1999. 408 p.
13. Kovtunen V.A. Crack in a solid under Coulomb friction law // Appl. Math. 2000. V. 45. № 4. P. 265–290.
14. Соколовский Я., Хлуднев А.М. О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 6. С. 776–779.

15. *Bach M., Khludnev A.M., Kovtunen V.A.* Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Signorini and friction conditions // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2000. V. 23. № 6. P. 515–534.
16. *Rice J.R.* Some remarks on elastic crack-tip stress field // *Intern. J. Solids Struct.* 1972. V. 8. № 6. P. 751–758.
17. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1989. № 2. С. 152–160.
18. *Kovtunen V.A.* Sensitivity of cracks in 2D-Lamé problem via material derivatives // *ZAMP.* 2001. V. 52. № 6. P. 1071–1087.
19. *Khludnev A.M., Ohtsuka K., Sokolowski J.* On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // *Les prepublications de l'Institut Elie Cartan.* 2000. № 20. 13 p.
20. *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
21. *Budiansky B., Rice J.R.* Conservation laws and energy-release rates // *Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech.* 1973. V. 40. № 1. P. 201–203.
22. *Knowles J.K., Sternberg E.* On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1972. V. 44. № 3. P. 187–211.

Новосибирск
e-mail: kovtunenkov@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию
3.V.2001