

УДК 531.36

© 2002 г. Дж. Кантарелли

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СКЛЕРОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача об устойчивости положения равновесия склерономной механической системы. Метод сравнения позволяет свести ее к задаче об устойчивости скалярных дифференциальных уравнений. Находятся условия устойчивости для некоторых типов скалярных уравнений сравнения (разд. 1–4), и на их основе определяются достаточные условия устойчивости положений равновесия различных склерономных механических систем (разд. 5–9).

1. Введение. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = a(t)f(u) + G(t, u) \quad (1.1)$$

где $a : R^+ \rightarrow R$, $f : (0, U) \rightarrow (0, \infty)$ ($0 < U \leq +\infty$) и $G : R^+ \times (0, U) \rightarrow R^+$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_0^t a(s)ds \leq a_*, \quad \forall t \in R^+, \quad a_* > 0 \quad (1.2)$$

$$\int_0^u \frac{ds}{f(s)} = \infty, \quad \forall u \in (0, U) \quad (1.3)$$

Эти условия гарантируют устойчивость решения $u = 0$ невозмущенного уравнения $\dot{u} = a(t)f(u)$ (см., например, [1]).

В первой части работы (разд. 2–4) исследуется задача об устойчивости невозмущенного решения $u = 0$ при различных предположениях относительно возмущения $G(t, u)$. В разд. 2 рассматривается случай

$$G(t, u) = b(t)f(u)\varphi(AF) \quad (1.4)$$

где $b : R^+ \rightarrow R^+$ ($b(t) \neq 0$) и $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывные функции, а функции $A(t)$ и $F(u)$ определяются равенствами [1, 2]

$$A(t) = \exp\left(-\int_0^t a(s)ds\right), \quad F(u) = \exp\left(\int_{\bar{u}}^u \frac{ds}{f(s)}\right) \quad (1.5)$$

для некоторого $\bar{u} \in (0, U)$.

Замечание 1.1. Из условий (1.2) и (1.3) следует, что $A(t) \geq \exp(-a_*)$ на R^+ , функция $F(u)$ определена и строго возрастает на $(0, U)$, $F(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$. Таким образом, функцию $F(u)$ можно рассматривать как функцию типа Хана. Как известно [3], такой функцией называется функция $\gamma : R^+ \rightarrow R^+$, строго монотонно возрастающая со значением $\gamma(0) = 0$. Класс таких функций обозначим в дальнейшем через K .

В случае, когда $\varphi(s) = s^k$ ($k = \text{const} \neq 0$), уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\dot{u} = a(t)\frac{F(u)}{F'(u)} + \beta(t)\frac{F(u)^{k+1}}{F'(u)}, \quad \beta(t) = b(t)A^k(t), \quad F'(u) = \frac{dF}{du}$$

Это уравнение называется "расширенным" уравнением Бернулли (см., например, [4]) и при $f(u) = u$ совпадает с "классическим" уравнением Бернулли.

В разд. 3 получены теоремы об устойчивости решения $u = 0$ в случае, когда в равенстве (1.4) $\varphi(s) = s^k$.

В разд. 4 предполагается, что $a(t) \geq 0$ на R^+ и

$$G(t, u) = \beta(t)g(u)$$

где $g : (0, U) \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывная функция.

Замечание 1.2. Пусть даны $t_0 \in R^+$ и $u_0 \in (0, U)$. Будем обозначать через $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ решение задачи Коши

$$\dot{u} = a(t)f(u) + G(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

и $I = [t_0, \omega)$, $\omega \leq \infty$, – его максимальный интервал существования. С помощью метода сравнения можно проверить, что в рассматриваемых случаях

$$u(t, t_0, u_0) > 0, \quad \forall t \in I$$

и, следовательно, если $\omega < \infty$, то $u(t, t_0, u_0) \rightarrow U$ при $t \rightarrow \omega^-$.

Не приводя общеизвестные определения устойчивости, используем в дальнейшем следующие определения:

Определение 1.1. Решение $u = 0$ называется эквипротягивающим, если $\forall t_0 \geq 0$, $\exists \delta \in (0, U)$, $\forall \varepsilon \in (0, U)$, $\exists T > 0$, $\forall u_0 \in (0, \delta)$ $u(t, t_0, u_0) < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0 + T$.

Определение 1.2. Решение $u = 0$ называется эквиасимптотически устойчивым, если оно устойчиво и эквипротягивающее.

Определение 1.3. Невозмущенное решение $u = 0$ называется эвентуально устойчивым, если $\forall \varepsilon \in (0, U)$, $\exists T > 0$, $\forall t_0 \geq T$, $\exists \delta \in (0, U)$, $\forall u_0 \in (0, \delta)$ $u(t, t_0, u_0) < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0$.

Определение 1.4. Решение $u = 0$ называется эвентуально равномерно устойчивым, если постоянная δ в определении 1.3 не зависит от t_0 .

Во второй части работы (разд. 5–9) рассматривается устойчивость положения равновесия механической системы с голономными стационарными связями под действием сил, зависящих явно от времени. Исследуются задачи об устойчивости, когда при фиксированном времени потенциальная энергия не будет определенно-положительной и даже не будет неотрицательной.

В разд. 5 дается постановка исследуемой задачи. В разд. 6 составляются дифференциальные уравнения сравнения. В разд. 7 выводятся условия устойчивости нулевого положения равновесия механической системы по скоростям, в разд. 8 – по скоростям и координатам. В разд. 9 рассматриваются конкретные примеры.

2. Случай возмущения $G(t, u) = b(t)f(u)\varphi(AF)$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{u} = a(t)f(u) + b(t)f(u)\varphi(AF) \quad (2.1)$$

в зависимости от сходимости или расходимости интеграла

$$\int_0^r \frac{ds}{s\varphi(s)}, \quad r > 0 \quad (2.2)$$

Соответственно этим предположениям определим функцию

$$\Phi(r) = \int_0^r \frac{ds}{s\varphi(s)} \quad \text{или} \quad \Phi(r) = \int_c^r \frac{ds}{s\varphi(s)} \quad (2.3)$$

для некоторого $c > 0$ (возможно, и $c = +\infty$). В обоих случаях $\Phi(r)$ – строго монотонно возрастающая функция, определенная на интервале $(0, \infty)$ со множеством значений $(0, l)$ и $(-\infty, l)$ ($l > 0$) соответственно.

Лемма 2.1. Пусть даны $t_0 \in R^+$ и $u_0 \in (0, U)$. Тогда

$$A(t)F(u(t)) = \Phi^{-1}(\Phi(v_0) + B(t_0, t)), \quad \forall t \in I \quad (2.4)$$

$$v_0 = A(t_0)F(u_0), \quad B(t_0, t) = \int_{t_0}^t b(s)ds$$

где Φ^{-1} – функция, обратная Φ , и $u(t) = u(t, t_0, u_0)$ – решение уравнения (2.1).

Доказательство. Положим $v(t) = A(t)F(u(t))$ для любого $t \in I$, тогда из равенства (2.1) получим следующее тождество:

$$\dot{v}(t) = b(t)v(t)\varphi(v(t)), \quad \forall t \in I$$

Отсюда и из замечания 1.1 следует, что $v(t) > 0$ на I , а это значит также, что $v(t)\varphi(v(t)) > 0$ на I .

Далее, разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$\Phi(v(t)) - \Phi(v_0) = B(t_0, t)$$

В дальнейшем через $L^1(R^+)$ обозначим класс непрерывных функций $b : R^+ \rightarrow R^+$,

$$\int_0^\infty b(t)dt < +\infty$$

Теорема 2.1. Если интеграл (2.2) расходится и функция $b(t) \in L^1(R^+)$, то решение $u = 0$ устойчиво.

При дополнительном условии

$$A(t) \leq A_1 = \text{const}, \quad \forall t \in R^+$$

эта устойчивость является равномерной. Если же $A(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то решение $u = 0$ эквивалентно устойчиво.

Доказательство. Зафиксируем $t_0 \geq 0$ и $\varepsilon \in (0, U)$ и положим, что $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ – постоянная, удовлетворяющая соотношению

$$A(t_0)F(\delta) = \Phi^{-1}(\Phi(e^{-a_*} F(\varepsilon)) - B(t_0, \infty))$$

(постоянная a_* определена условием (1.2)). Соответственно имеем

$$\Phi(A(t_0)F(\delta)) + B(t_0, t) \leq \Phi(e^{-a_*} F(\varepsilon)), \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.5)$$

Легко видеть, что $F(\delta) < F(\varepsilon)$, следовательно, $0 < \delta < \varepsilon < U$. Если произвольно зафиксировать точку $u_0 \in (0, \delta)$, то функция $F(u)$ будет определена в точке u_0 и $A(t_0)F(u_0) < A(t_0)F(\delta)$. Из соотношений (2.4) и (2.5) получаем неравенство

$$\Phi(A(t)F(u(t))) < \Phi(e^{-a_*} F(\varepsilon)), \quad \forall t \in I$$

Но $\Phi(r)$ и $F(u)$ – строго возрастающие функции и $A(t) \geq e^{-a_*}$ на I . Отсюда следует, что $u(t) < \varepsilon$ на I и $I = [t_0, \infty)$, и значит, решение $u = 0$ устойчиво.

При условии $A(t) \leq A_1 = \text{const}$ число $\delta(\varepsilon)$, $0 < \delta < \varepsilon$, определенное из равенства

$$A_1 F(\delta) = \Phi^{-1}(\Phi(e^{-a_*} F(\varepsilon)) - B(0, \infty))$$

не зависит явно от t_0 . Соответственно устойчивость решения $u = 0$ будет равномерной.

Покажем, что если $A(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то решение $u = 0$ невозмущенного уравнения будет эквипротягивающим. При этом условии для $\delta \in (0, U)$, $t_0 \in R^+$ и $\varepsilon \in (0, U)$ найдется число $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что

$$A(t)F(\varepsilon) \geq \Phi^{-1}(\Phi(A(t_0)F(\delta)) - B(t_0, \infty)), \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (2.6)$$

Зафиксируем произвольное число $u_0 \in (0, U)$. Так как

$$\Phi(A(t_0)F(u_0)) + B(t_0, t) < \Phi(A(t_0)F(\delta)) + B(t_0, \infty), \quad \forall t \geq t_0$$

то, сравнивая соотношения (2.4) и (2.6), нетрудно найти, что $A(t)F(u(t)) < A(t)F(\varepsilon)$, $\forall t \geq t_0 + T$, и, следовательно, $u(t) < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0 + T$, что и завершает доказательство.

Теорема 2.2. При условии (2.2) решение $u = 0$ уравнения (2.1) неустойчиво.

Доказательство. Зафиксируем число $t_0 \in R^+$, такое, что $b(t_0) > 0$. Пусть $\varepsilon \in (0, U)$ – постоянная, удовлетворяющая неравенству

$$F(\varepsilon) < \sup_{t \geq t_0} \left\{ \frac{1}{A(t)} \Phi^{-1}(B(t_0, t)) \right\} \quad (2.7)$$

Применяя метод доказательства от противного, предположим, что существует $u_0 \in (0, U)$, такое, что $u(t) = u(t, t_0, u_0) < \varepsilon$ на $[t_0, \infty)$. Тогда, используя соотношение (2.4), получим

$$\frac{1}{A(t)} \Phi^{-1}(\Phi(A(t_0)F(u_0)) + B(t_0, t)) < F(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_0$$

что противоречит неравенству (2.7).

Следующая теорема демонстрирует, что неустойчивость не означает потерю эвентуальной устойчивости.

Теорема 2.3. Если выполняется условие (2.2), а также условие

$$\Phi^{-1}(B(t_0, t))/(A(t)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

то решение $u = 0$ невозмущенного уравнения эвентуально устойчиво.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что существует постоянная $T = T(\varepsilon)$, такая, что

$$0 < \Phi^{-1}(B(0, t)) < A(t)F(\varepsilon), \quad \forall t \geq T \quad (2.8)$$

Возьмем $t_0 \geq T$ и обозначим через $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) < \varepsilon$ число, удовлетворяющее соотношению

$$A(t_0)F(\delta) = \Phi^{-1}(B(0, t_0))$$

Зафиксируем u_0 из интервала $(0, \delta)$. Так как $F(u_0) < F(\delta)$, то отсюда следует, что

$$\Phi(A(t_0)F(u_0)) + B(t_0, t) < B(0, t_0), \quad \forall t \geq t_0$$

Отсюда, используя соотношения (2.4) и (2.8), получаем

$$A(t)F(u(t)) < A(t)F(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_0$$

Следовательно, $u(t) < \varepsilon$ на $[t_0, \infty)$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.4. Если имеет место неравенство (2.2), а также:

1) $b(t) \in L^1(R^+)$;

2) существует постоянная $A_1 < \infty$, такая, что $A(t) \leq A_1$ на R^+ ;

то решение $u = 0$ эвентуально равномерно устойчиво.

3. Случай возмущения $G(t, u) = \beta(t)f(u)F^k(u)$. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение, получаемое из (2.1) для $\varphi(s) = s^k$,

$$\dot{u} = a(t)f(u) + \beta(t)g(u), \quad g(u) = f(u) \exp \left\{ k \int_{\bar{u}}^u \frac{ds}{f(s)} \right\} \quad (3.1)$$

где $\beta : R^+ \rightarrow R^+$ – непрерывная функция, не равная тождественно нулю на R^+ .

Замечание 3.1. Если выбрать $c = \infty$, когда $k > 0$, то по определению $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = -k^{-1}s^{-k}, \quad \forall s \geq 0$$

Так как $b(t) = \beta(t)A^{-k}(t)$, соотношение (2.4) заменяется на следующее:

$$A(t)F(u(t)) = \left[(A(t_0)F(u_0))^{-k} - k \int_{t_0}^t \beta(s)A^{-k}(s)ds \right]^{-1/k}, \quad \forall t \in I \quad (3.2)$$

$$u(t) = u(t, t_0, u_0), \quad t_0 \in R^+, \quad u_0 \in (0, U)$$

Следующие результаты являются следствиями теорем 2.1, 2.3 и 2.4 соответственно.

Следствие 3.1. Если $k > 0$ и $\beta(t)A^{-k}(t) \in L^1(R^+)$, то решение $u = 0$ уравнения (3.1) равномерно устойчиво. Если также $A(t) \leq A_1 = \text{const}$ для $t \in R^+$, то эта устойчивость равномерна. Если же $A(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то решение $u = 0$ уравнения (3.1) эквивасимптотически устойчиво.

Следствие 3.2. Если $k < 0$ и

$$A^k(t) \int_0^t \beta(s)A^{-k}(s)ds \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

то решение $u = 0$ уравнения (3.1) эвентуально устойчиво.

Следствие 3.3. Если $k < 0$, $\beta(t) \in L^1(R^+)$ и $A(t) \leq A_1 = \text{const}$ на R^+ ($A_1 = \text{const} < \infty$), то решение $u = 0$ уравнения (3.1) эвентуально равномерно устойчиво.

Кроме того, имеют место следующие две теоремы.

Теорема 3.1. Пусть $k > 0$ и существуют две постоянные $B < \infty$ и $H \geq 1$, такие, что

- 1) $A^k(t) \int_0^t \beta(s)A^{-k}(s)ds \leq B, \quad \forall t \geq 0;$
- 2) $A(t_1) \leq HA(t_2), \quad \forall t_1 \geq 0, \quad \forall t_2 \geq t_1.$

Тогда решение $u = 0$ уравнения (3.1) равномерно устойчиво.

Доказательство. Заметим, что условие 1 имеет смысл только тогда, когда функция $\beta(t)A^{-k}(t)$ принадлежит классу $L^1(R^+)$. Отсюда по следствию 3.1 находим, что решение $u = 0$ устойчиво. Для доказательства равномерной устойчивости зафиксируем ϵ на интервале $(0, U)$ и определим постоянную $\delta = \delta(\epsilon) < \epsilon$ из равенства

$$F(\delta) = \left[\left(\frac{H}{F(\epsilon)} \right)^k + kB \right]^{-1/k}$$

Принимая во внимание условие 1 теоремы, заключаем, что для любых $t_0 \in R^+$ и $u_0 \in (0, \delta)$ имеет место следующее неравенство:

$$F^{-k}(u_0) - kA^k(t_0) \int_{t_0}^t \beta(s)A^{-k}(s)ds > \left(\frac{H}{F(\epsilon)} \right)^k, \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.4)$$

Соотношение (3.2) можно записать в виде

$$A(t)F(u(t)) = A(t_0) \left[F^{-k}(u_0) - kA^k(t_0) \int_{t_0}^t \beta(s)A^{-k}(s)ds \right]^{-1/k}, \quad \forall t \in I$$

Отсюда, учитывая неравенство (3.4), получаем

$$A(t)F(u(t)) < A(t_0) \frac{F(\epsilon)}{H}, \quad \forall t \in I$$

Из условия 2 следует, что

$$A(t_0) \leq HA(t), \quad \forall t \geq t_0$$

и можно заключить, что

$$F(u(t)) < F(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_0$$

Теорема доказана.

Теорема 3.2. Предположим, что $k < 0$, а также

1) выполнено условие (3.3);

2) существует постоянная $H \geq 1$, такая, что

$$A(t_1) \leq HA(t_2), \quad \forall t_1 \geq 0, \quad \forall t_2 \geq t_1$$

Тогда решение $u = 0$ уравнения (3.1) эвентуально равномерно устойчиво.

4. Случай возмущения $G(t, u) = \beta(t)g(u)$. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{u} = a(t)f(u) + \beta(t)g(u) \quad (4.1)$$

где непрерывная функция $\beta : R^+ \rightarrow R^+$ принадлежит классу $L^1(R^+)$ и $g : (0, U) \rightarrow [0, \infty)$ – непрерывная функция.

Предположим, что $a(t) \geq 0$ на R^+ . Следовательно, по условию (1.2) $a(t)$ – функция, принадлежащая классу $L^1(R^+)$.

Теорема 4.1. Предположим, что функция $a(t)\beta(t)$ тождественно не равна нулю на R^+ . Тогда нулевое решение уравнения (4.1) равномерно устойчиво, если и только если

$$I(u) = \int_0^u \frac{ds}{f(s) + g(s)} = \infty, \quad \forall u \in (0, U) \quad (4.2)$$

Доказательство. При условии (4.2) нулевое решение скалярного уравнения

$$\dot{v} = (a(t) + \beta(t))(f(v) + g(v))$$

равномерно устойчиво (см., например, [1], следствие 2.1).

Из оценки

$$\dot{u} \leq (a(t) + \beta(t))(f(u) + g(u))$$

применяя метод сравнения, выводим достаточность.

Допустим, что условие (4.2) не выполняется. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\dot{v} = \gamma(t)(f(v) + g(v)); \quad \gamma(t) = \min\{a(t), \beta(t)\}, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.3)$$

Так как функция $\gamma(t)$ положительна и тождественно не равна нулю на R^+ , то решение $u = 0$ уравнения (4.3) неустойчиво (см., например [1], теорема 3.1). Но тогда из метода сравнения имеем также, что решение $u = 0$ уравнения (4.1) неустойчиво. Необходимость доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. Если в условии (4.2)

$$I(u) < +\infty, \quad \forall u \in (0, U)$$

то решение $u = 0$ уравнения (4.1) эвентуально равномерно устойчиво.

Предположим, что [8]

$$g(u) = f(u)\omega\left(\int_{\bar{u}}^u \frac{ds}{f(s)}\right) \quad (4.4)$$

где $\omega : R \rightarrow R^+$ – непрерывная функция.

Следующий результат является следствием теоремы 4.1.

Следствие 4.1. Если имеет место соотношение (4.4) и следующий интеграл расходится:

$$\int_{-\infty}^r \frac{ds}{1+\omega(s)} = \infty, \quad \forall r > -\infty$$

то решение $u = 0$ равномерно устойчиво.

Если же этот интеграл сходится, то решение $u = 0$ эвентуально равномерно устойчиво.

5. Склерономные механические системы. Рассмотрим голономную механическую систему S с двухсторонними удерживающими связями, не зависящими явно от времени. Пусть $q^T = (q_1, \dots, q_N)$ ($N \geq 1$) – вектор-столбец независимых лагранжевых координат.

Обозначим через $T = T(q, \dot{q})$ кинетическую энергию системы S . Предположим, что она является квадратичной формой обобщенных скоростей $\dot{q}$, положительно определенной при любых q , принадлежащих открытому связанному подмножеству $\Omega \subseteq R^N$, содержащему начало координат, и, кроме того, $T \in C^1$. При этом известно [7, 9], что существует непрерывная и неубывающая скалярная функция $\alpha : R^+ \rightarrow (0, \infty)$, такая, что

$$T(q, \dot{q}) \geq \alpha(|q|)|\dot{q}|^2, \quad \forall (q, \dot{q}) \in \Omega \times R^N$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма в пространстве R^N .

Допустим, что на систему действуют некоторые потенциальные силы с потенциальной энергией

$$P = P(t, q) \quad P \in C^1(R^+ \times \Omega), \quad P(t, 0) \equiv 0$$

и непотенциальные силы

$$Q = Q(t, q, \dot{q}), \quad Q \in C(R^+ \times \Omega \times R^N)$$

Предположим, что каждое движение системы определено при всех $t \geq t_0$; другими словами, имеет место глобальная продолжимость решений соответствующих уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\dot{q}} T(q, \dot{q})) - \nabla_q [T(q, \dot{q}) - P(t, q)] = Q(t, q, \dot{q}) \quad (5.1)$$

Пусть $V : R^+ \times \Omega \times R^N \rightarrow R^+$ – некоторая функция Ляпунова. Обозначим через $\dot{V} = \dot{V}(t, q, \dot{q})$ ее производную, вычисленную вдоль движения, т.е.

$$\dot{V}(t, q, \dot{q}) = \nabla_{\dot{q}} V(t, q, \dot{q}) \ddot{q} + \nabla_q V(t, q, \dot{q}) \dot{q} + V_t(t, q, \dot{q})$$

причем $\ddot{q}$ определяется уравнением (5.1) (V_t означает частную производную по t). Заметим, что в принятых обозначениях $\nabla_{\dot{q}} V(t, q, \dot{q})$ и $\nabla_q V(t, q, \dot{q})$ – векторы-столбцы и, следовательно, $\nabla_{\dot{q}} V(t, q, \dot{q}) \ddot{q}$ и $\nabla_q V(t, q, \dot{q}) \dot{q}$ – скалярные произведения в R^N .

Пусть $S_x = \{(q, \dot{q}) \in \Omega \times R^N : |x| < r\}$, где $r > 0$ – достаточно малая действительная постоянная, и x в разд. 6 и 7 совпадает с $\dot{q}$, а в разд. 8 – с $(q, \dot{q})$.

Предположим, что

$$V(t, 0, 0) = 0, \quad \forall t \in R^+ \quad (5.2)$$

$$V(t, q, \dot{q}) \geq \gamma_0(|x|), \quad \dot{V}(t, q, \dot{q}) \leq g(t, V(t, q, \dot{q})) \quad (5.3)$$

$$\forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times S_x; \quad \gamma_0 \in K$$

где $g : R^+ \times R^+ \rightarrow R$ – непрерывная функция. Будем также в отдельных случаях предполагать, что функция $V(t, q, \dot{q})$ допускает бесконечно малый высший предел

$$V(t, q, \dot{q}) \leq \gamma_1(|q| + |\dot{q}|), \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times S_x \quad (5.4)$$

Назовем уравнением сравнения соответствующее скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{u} = g(t, u) \quad (5.5)$$

Для удобства читателя приведем следующие хорошо известные свойства (см. [5, 6, 10, 11]).

Свойство 1. Если нулевое решение уравнения (5.5) устойчиво (асимптотически устойчиво), то нулевое положение равновесия системы S устойчиво (асимптотически устойчиво) относительно x .

Свойство 2. Если нулевое решение уравнения (5.5) равномерно устойчиво и V удовлетворяет неравенству (5.4), то нулевое положение равновесия системы S равномерно устойчиво относительно x .

Аналогичные заключения имеют место и для эвентуальной устойчивости.

Замечание 5.1. Предположим, что имеет место единственность всех решений системы уравнений Лагранжа (5.1) и выполнение условий

$$\nabla_q \Pi(t, 0) \equiv 0, \quad Q(t, 0, 0) \equiv 0, \quad \forall t \in R^+$$

Это означает, что $q(t) \equiv 0$, $\dot{q}(t) \equiv 0$, т.е. нулевое положение равновесия системы S является решением системы уравнений Лагранжа. Следовательно, в этом случае эвентуальная устойчивость влечет за собой устойчивость [6].

Для возможного расширения получаемых результатов указанные предположения опускаются, и в соответствующих результатах приводятся условия только эвентуальной устойчивости.

6. Основное дифференциальное неравенство. Положим $S_{\dot{q}} = \{\dot{q} \in R^N : |\dot{q}| < r\}$. В этом разделе и в разд. 7 и 8 будем предполагать, что выполняются условия

$$\Pi(t, q) \geq -p(\sigma(t)\tau(|q|)), \quad \forall (t, q) \in R^+ \times \Omega \quad (6.1)$$

$$T(q, \dot{q}) \geq [\tau'(|q|)|\dot{q}|]^2, \quad \forall (q, \dot{q}) \in \Omega \times R^N \quad (6.2)$$

$$Q^T(t, q, \dot{q})\dot{q} + \partial \Pi / \partial t \leq a(t)f(V) - 2\dot{\sigma}(t)\tau(|q|)p'(\sigma(t)\tau(|q|)) \quad (6.3)$$

$$\forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times S_{\dot{q}}$$

Здесь

$$V(t, q, \dot{q}) = E(t, q, \dot{q}) + 2p(\sigma(t)\tau(|q|)) \quad (6.4)$$

– функция Ляпунова, представляющая собой возмущенную полную энергию

$$E(t, q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + \Pi(t, q)$$

Будем также предполагать, что

1) функция $p = p(s)$ принадлежит классу $C^1(R^+)$, $p(0) = 0$, и ее производная $p'(s)$ – возрастающая и строго положительная функция при $s > 0$;

2) функция $\sigma = \sigma(t)$ принадлежит классу $C^1(R^+)$ и строго положительная на R^+ ;

3) функция $\tau = \tau(s)$ принадлежит классу $C^1(R^+)$, $\tau(0) = 0$, и существует постоянная $\varepsilon > 0$, такая, что

$$\tau'(s) \geq \varepsilon, \quad \forall s \in R^+$$

4) функции $a = a(t)$ и $f = f(s)$ определены и непрерывны на R^+ , $f(s) > 0$ при $s > 0$ и

$$\int_0^u \frac{ds}{f(s)} = \infty, \quad \forall u > 0$$

Замечание 6.1. Так как $T(q, \dot{q}) \geq [\varepsilon |\dot{q}|]^2$ на $\Omega \times R^N$, условия (6.1) и (6.2) можно заменить следующими:

$$P(t, q) \geq -p(\sigma(t) |q|), \quad \forall (t, q) \in R^+ \times \Omega$$

$$T(q, \dot{q}) \geq [\varepsilon |\dot{q}|]^2, \quad \forall (q, \dot{q}) \in \Omega \times R^N$$

Для того чтобы применить метод сравнения, получим оценку производной $\dot{V}(t, q, \dot{q})$.
Имеем

$$\dot{V}(t, q, \dot{q}) \leq a(t)f(V) + 2\sigma(t)p'(\sigma(t)\tau(|q|))\nabla_q \tau(|q|)\dot{q} \quad (6.5)$$

$$\forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times R^N$$

С другой стороны, $|\nabla_q \tau(|q|)| = \tau'(|q|)$ на Ω , и, таким образом, можно видеть, что

$$\nabla_q \tau(|q|)\dot{q} \leq \tau'(|q|)|\dot{q}|, \quad \forall (q, \dot{q}) \in \Omega \times R^N$$

Следовательно, принимая во внимание условие (6.2), будем иметь

$$\nabla_q \tau(|q|)\dot{q} \leq \sqrt{V(t, q, \dot{q})}, \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times R^N \quad (6.6)$$

Из условия (6.1) находим

$$\sigma(t)\tau(|q|) \leq p^{-1}(V(t, q, \dot{q})), \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times R^N$$

а отсюда, учитывая, что функция $p'(s)$ возрастающая, получим

$$p'(\sigma(t)\tau(|q|)) \leq (p' \circ p^{-1})(V(t, q, \dot{q})), \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times R^N \quad (6.7)$$

Принимая во внимание неравенства (6.3), (6.6) и (6.7), из неравенства (6.5) окончательно имеем следующее дифференциальное неравенство:

$$\dot{V} \leq a(t)f(V) + 2\sigma(t)\sqrt{V}(p' \circ p^{-1})(V), \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times S_{\dot{q}} \quad (6.8)$$

Следовательно, учитывая, что

$$V(t, q, \dot{q}) \geq \varepsilon^2 |\dot{q}|^2, \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times \Omega \times S_{\dot{q}}$$

заключаем, что оба условия (5.3) выполняются при $x = \dot{q}$, и соответствующее уравнение сравнения имеет вид $\dot{u} = g(t, u)$, где $g: R^+ \times R^+ \rightarrow R$ — любая непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$a(t)f(s) + 2\sigma(t)\sqrt{s}(p' \circ p^{-1})(s) \leq g(t, s), \quad \forall (t, s) \in R^+ \times R^+ \quad (6.9)$$

7. Устойчивость по части переменных, по $\dot{q}$. Определим функцию $c: R^+ \rightarrow R^+$ равенством

$$c(t) = \max\{a(t), 2\sigma(t)\}, \quad \forall t \in R^+$$

Теорема 7.1. Если $c(t) \in L^1(R^+)$ и

$$J(u) = \int_0^u \frac{ds}{f(s) + \sqrt{s}(p' \circ p^{-1})(s)} = \infty, \quad \forall u > 0 \quad (7.1)$$

то положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы S устойчиво относительно $\dot{q}$. Если также $V(t, q, \dot{q})$ удовлетворяет условию (5.4), то устойчивость относительно $\dot{q}$ равномерна.

Доказательство. Неравенству (6.9) удовлетворяет непрерывная функция $g(t, s)$, определяемая соотношением

$$g(t, s) = c(t)[f(s) + \sqrt{s}(p' \circ p^{-1})(s)] \quad (7.2)$$

Применяя следствие 2.1 из [1], можно показать также, что нулевое решение уравнения сравнения $\dot{u} = g(t, u)$ равномерно устойчиво. Свойства 1 и 2 завершают доказательство.

Теорема 7.2. Если $c(t) \in L^1(R^+)$ и интеграл $J(u)$ (7.1) сходится, то положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ эвентуально устойчиво относительно $\dot{q}$. Если имеет место неравенство (6.4), то эта устойчивость равномерна.

Доказательство выводится, как и в предыдущем случае, из того, что решение $u = 0$ уравнения $\dot{u} = g(t, u)$, причем $g(t, s)$ определяется соотношением (7.2), равномерно устойчиво ([1, следствие 3.1]). Положим

$$r(u) = \int_{\bar{u}}^u \frac{ds}{f(s)}$$

и предположим, что существует непрерывная функция $h: R \rightarrow R^+$, такая, что

$$\sqrt{u}(p' \circ p^{-1})(u) \leq f(u)h(r(u)), \quad \forall u \in R^+ \quad (7.3)$$

где $\bar{u} > 0$ – подходящим образом выбранная действительная постоянная. Следовательно,

$$a(t)f(u) + 2\sigma(t)\sqrt{u}(p' \circ p^{-1})(u) \leq c(t)f(u)[1 + h(r(u))], \quad \forall u \in R^+ \quad (7.4)$$

Так как

$$J_1(r) = \int_0^u \frac{ds}{f(s)[1 + (h \circ r)(s)]} = \int_{-\infty}^{r(u)} \frac{ds}{1 + h(s)}, \quad \forall u \in R^+$$

то легко можно получить следующие результаты.

Следствие 7.1. Предположим, что $c(t) \in L^1(R^+)$. Если имеет место условие (7.3) и $J_1(r) = \infty$, $\forall r > -\infty$, то все условия теоремы 7.1 выполнены.

Следствие 7.2. Предположим, что $c(t) \in L^1(R^+)$ и $J_1(r) < \infty$ для $r > -\infty$. Тогда все условия теоремы 7.2 выполнены.

Замечание 7.1. Предположим, что $h(s) \leq H$, $\forall s \in R$, где $H < \infty$ – действительная постоянная. Тогда правую часть условия (7.4) можно заменить на $\tilde{a}(t)f(u)$, где $\tilde{a}(t) = a(t) + 2H\sigma(t)$.

Отсюда следует, что нулевое решение уравнения сравнения $\dot{u} = g(t, u)$ устойчиво тогда (и только тогда), когда функция $\tilde{a}(t)$ принадлежит классу $L^1(R^+)$. Это означает, в частности, что положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ системы S будет устойчивым (или равномерно устойчивым) относительно $\dot{q}$ также и тогда, когда $c(t) \notin L^1(R^+)$.

Более того, если

$$\int_0^t \tilde{a}(s)ds \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

то нулевое решение уравнения (5.5) эквивасимптотически устойчиво [1].

Тем самым можно доказать, что нулевое положение равновесия системы S эквивасимптотически устойчиво относительно $\dot{q}$.

Замечание 7.2. Предположим, что $p(s) = s^n$ ($n \geq 1$) и $f(s) = s$. Тогда неравенство (7.3) справедливо при

$$h(s) = n \exp\left(\frac{n-2}{2n}s\right)$$

Следовательно, при $1 \leq n < 2$ можно применить следствие 7.1, а при $n \geq 2$ – следствие 7.2. Случай $n = 2$ также можно включить в предыдущее замечание 7.1.

Рассмотрим случай, когда $a(t) \leq 0, \forall t \in R^+$.

Теорема 7.3. Предположим, что $a(t) \leq 0, \forall t \in R^+$, функция $\sigma(t)$ принадлежит классу $L^1(R^+)$ и

$$J_2(r) = \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{p(s)}} = \infty, \quad \forall r > 0$$

Тогда нулевое положение равновесия системы S устойчиво относительно $\dot{q}$. Устойчивость будет равномерной, если выполняется соотношение (5.4)

Доказательство. Полагая $r(s) = p^{-1}(s)$, можно видеть, что

$$\int_0^u \frac{ds}{\sqrt{s(p' \circ p^{-1})(s)}} = \int_0^{r(u)} \frac{ds}{\sqrt{p(s)}}$$

Следовательно, так как $r(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$, то условия теоремы будут гарантировать равномерную устойчивость нулевого решения уравнения сравнения

$$\dot{u} = 2\sigma(t)\sqrt{u}(p' \circ p^{-1})(u)$$

Свойства 1 и 2 завершают доказательство.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 7.4. Предположим, что $a(t) \leq 0, \forall t \in R^+$ и $\sigma(t) \in L^1(R^+)$, $J_2(r) < \infty, \forall r > 0$. Тогда положение равновесия $\dot{q} = q = 0$ эвентуально устойчиво относительно $\dot{q}$. Если выполняется соотношение (5.4), то эта устойчивость будет равномерной.

Рассмотрим частный случай, при котором в выражении (7.3) $h(s) = s^k$ (k – действительная постоянная). Следовательно, имеет место неравенство (6.9), где

$$g(t, u) = a(t)f(u) + 2\sigma(t)f(u)\exp(r(u))$$

Допустим также, что здесь функция $a(t)$ удовлетворяет условию (1.2), но функция $c(t)$ не обязательно принадлежит классу $L^1(R^+)$.

Теорема 7.5. Предположим, что $k > 0$. Тогда если $\sigma(t)A^{-k}(t) \in L^1(R^+)$, то нулевое положение равновесия системы S устойчиво относительно $\dot{q}$.

Доказательство. Согласно следствию 3.1, условия теоремы гарантируют, что нулевое решение уравнения сравнения

$$\dot{u} = g(t, u)$$

устойчиво. Свойство 1 завершает доказательство.

Аналогичным образом, на основе теоремы 3.1 доказываются следующие теоремы.

Теорема 7.6. Предположим, что выполнено соотношение (5.4), $k > 0$, а также

1) существует постоянная $B < \infty$, такая, что

$$A^k(t) \int_t^\infty \sigma(s)A^{-k}(s)ds \leq B, \quad \forall t \in R^+$$

2) существует постоянная $H \geq 1$, такая, что

$$A(t_1) \leq HA(t_2), \quad \forall t_1 \geq 0, \quad \forall t_2 \geq t_1$$

Тогда нулевое положение равновесия системы S равномерно устойчиво относительно $\dot{q}$.

Теорема 7.7. Предположим, что $k < 0$ и

$$A^k(t) \int_0^t \sigma(s) A^{-k}(s) ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Тогда нулевое положение равновесия эвентуально устойчиво относительно $\dot{q}$.

Если дополнительно имеет место соотношение (5.4) и выполнено условие 2 теоремы 7.6, то нулевое положение равновесия эвентуально равномерно устойчиво относительно $\dot{q}$.

8. Устойчивость по $(q, \dot{q})$. Полагая $S_q = \{q \in \Omega : |q| < r\}$, предположим, что

$$\Pi(t, q) \geq -p(\sigma(t)\tau(|q|)) + \varphi(|q|), \quad \forall (t, q) \in R^+ \times S_q \quad (8.1)$$

а также, что условия (6.2) и (6.3) выполнены для всех $(t, q, \dot{q}) \in R^+ \times S_q \times S_{\dot{q}}$ с тем изменением и дополнением, что $\tau = \tau(s)$ — неотрицательная и неубывающая функция, принадлежащая классу $C^1(R^+)$, и $\varphi = \varphi(s)$ принадлежит классу K .

Замечание 8.1. Неравенство (5.1) и условие (8.1) гарантируют справедливость неравенства

$$V(t, q, \dot{q}) \geq a(r)|\dot{q}|^2 + \varphi(|q|), \quad \forall (t, q, \dot{q}) \in R^+ \times S_q \times S_{\dot{q}}$$

и, следовательно, имеет место условие (5.3) при $x = (q, \dot{q})$. Более того, как и в разд. 6, можно получить дифференциальное неравенство, которое отличается от неравенства (6.8) лишь тем, что справедливо при всех $(t, q, \dot{q}) \in R^+ \times S_q \times S_{\dot{q}}$. Таким образом, обозначая через $g(t, s)$ функцию, удовлетворяющую условию (6.9), убеждаемся, что условие (5.4) также имеет место.

Следующие критерии устойчивости являются по существу аналогичными критериям устойчивости по части переменных разд. 7. Поэтому ограничимся формулировкой двух теорем, которые получаются соответственно из теорем 3.1 и 3.2. В этих теоремах

$$J(u) = \int_0^u \frac{ds}{f(s) + \sqrt{s}(p' \circ p^{-1})(s)}$$

Теорема 8.1. Если функция $c(t)$ принадлежит классу $L^1(R^+)$ и $J(u) = \infty$, $\forall u > 0$, то нулевое положение равновесия системы S устойчиво. Более того, устойчивость будет равномерной, если выполняется соотношение (5.4).

Теорема 8.2. Если функция $c(t) \in L^1(R^+)$ и $J(u) < \infty$, $\forall u > 0$, то нулевое положение равновесия системы S эвентуально устойчиво и, соответственно, при условии (5.4) оно эвентуально равномерно устойчиво.

9. Примеры. Пример 1. Рассмотрим тяжелую частицу P массы m , движущуюся по параболе

$$y = x^2 / 2p, \quad z = 0 \quad (p = \text{const} > 0)$$

в системе координат $Oxyz$. Относительно связанной с Землей системы координат, которую предполагаем инерционной, система координат $Oxyz$ вращается с угловой скоростью $\omega(t) = \omega(t)\mathbf{j}$ (через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ обозначены орты осей x, y, z соответственно) вокруг вертикальной оси y , при этом

$$\sigma^2(t) = \omega^2(t) - g/p > 0, \quad \forall t \in R^+ \quad (9.1)$$

Принимая абсциссу x в качестве лагранжевой координаты, будем иметь

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{x^2}{p^2} \right) \dot{x}^2, \quad \Pi(t, x) = -\frac{1}{2}m\sigma^2(t)x^2 \quad (9.2)$$

и $Q(t, x, \dot{x}) \equiv 0$.

Заметим, что при фиксированном $t \in R^+$ потенциальная энергия отрицательна в окрестности $x = 0$. Тем не менее, применяя теорему 7.1, можно найти, что если функция $\sigma(t)$ (9.1) ограничена на R^+ и

$$\int_0^\infty \sigma(t) dt < \infty$$

то положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ равномерно устойчиво относительно $\dot{x}$.

Пример 2. Рассмотрим пример 1, предполагая дополнительно, что на частицу P действует сила упругости $f = -kOP$, где зависящий от времени коэффициент жесткости $k = k(t)$ удовлетворяет неравенству

$$k_* \leq k(t) < m\sigma^2(t), \quad \forall t \in R^+, \quad k_* = \text{const} > 0$$

Применяя теорему 8.1, можно показать, что если функция

$$c(t) = \max \left\{ 2\sqrt{\sigma^2(t) - k(t)/m}, \frac{2w(t)\dot{w}(t) - \dot{k}(t)/m}{\sqrt{\sigma^2(t) - k(t)/m}}, \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} \right\}$$

принадлежит классу $L^1(R^+)$, то положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ устойчиво.

Пример 3. Положим в примере 1 $w(t) \equiv 0$. Также предположим, что на (тяжелую) частицу P действует зависящая от времени сила $f = \phi(t)i$, где $\phi(t) > 0$, $\forall t \in R^+$. Кинетическая энергия определяется формулой (9.1), а обобщенная потенциальная энергия будет иметь вид

$$\Pi(t, x) = -\phi(t)x + \frac{1}{2} \frac{mg}{p} x^2$$

и $Q(t, x, \dot{x}) \equiv 0$. Применяя теорему 8.2, можно показать, что если функция $\phi(t)$ ограничена на R^+ и

$$\int_0^\infty \phi(t) dt < \infty$$

то положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ эвентуально равномерно устойчиво. Заметим, что при этом $\dot{x} = x = 0$ не является решением уравнения Лагранжа. Таким образом, в данном примере эвентуальная устойчивость не гарантирует устойчивость.

Пример 4. Рассмотрим тяжелую частицу P массы m , движущуюся по кривой

$$y = \frac{4}{7} |x|^{7/4}, \quad z = 0$$

в координатной системе $Oxyz$, связанной с Землей, ось y вертикальна. Предположим, что на частицу действует зависящая от времени сила $f = m\phi(t)j$, где

$$\phi(t) > g, \quad \dot{\phi}(t) \leq 0, \quad \forall t \in R^+$$

Имеем

$$T = \frac{1}{2} m(1 + |x|^{3/2}) \dot{x}^2, \quad \Pi(t, x) = -\frac{4}{7} m(\phi(t) - g) |x|^{7/4}, \quad Q(t, x, \dot{x}) \equiv 0$$

Применяя теорему 7.4, можно показать, что если

$$\int_0^\infty (\phi(t) - g)^{4/7} dt < \infty$$

то положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ эвентуально равномерно устойчиво относительно $\dot{x}$. В этом случае $\dot{x} = x = 0$ – решение уравнения Лагранжа

$$(1 + |x|^{3/2}) \ddot{x} + \frac{3}{4} \frac{x}{|x|^{1/2}} \dot{x}^2 + (g - \phi(t)) \frac{x}{|x|^{1/4}} = 0$$

но достаточные условия единственности нулевого решения не выполняются.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cantarelli G.* Stability of the origin of scalar comparison equations, I // Riv. Mat. Univ. Parma. 1999. V. 6. № 2. P. 1–9.
2. *Cantarelli G.* Global existence in the future and boundedness of submanifolds of solutions of a scalar comparison equation // Rend. Circ. Mat. di Palermo. 1995. V. 44. № 3. P. 401–416.
3. *Hahn W.* Stability of Motion. Berlin: Springer, 1967. 446 p.
4. *Amerio L.* Analisi Matematica con Elementi di Analisi Funzionale // Torino, UTET. 1977. V. 1. 634 p.; V. 2. 622 p.
5. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Liapunov's Direct Method. N. Y. etc.: Springer, 1977. 396 p. = *Рун Н., Абетс П., Лалоу М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
6. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Liapunov's Second Method. Tokyo: Mat. Soc. of Japan, 1966. 223 p.
7. *Cantarelli G., Risito C.* Criteri di esistenza globale e di limitatezza per i sistemi olonomi scleronomi // Ann. Mat. Pura Appl. (IV). 1992. V. 162. P. 383–394.
8. *Constantin A.* Solutions globales d'equations differentielles perturbees // C. r. Acad. sci. Paris. 1995. V. 320. № 11. P. 1319–1322.
9. *Cantarelli G.* Global existence of submanifolds of solutions of nonlinear second order differential systems // Different. and Integr. Equat. 1995. V. 8. № 6. P. 1385–1394.
10. *Corduneanu C.* Sur certains systèmes différentiels non-lineaires // An. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. 1. Mat. 1960. V. 6. № 2. P. 257–260; 1960. V. 60. P. 47–58.
11. *Corduneanu C.* Sur la stabilité partielle // Rev. Roumaine de Math. Pures et Appl. 1964. V. 9. № 3. P. 229–236.

Кальяри (Италия)
e-mail: cantarel@unica.it

Поступила в редакцию
4.X.2001