

УДК 531.36

© 2002 г. С.Я. Степанов

**СИММЕТРИЗАЦИЯ КРИТЕРИЕВ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ
СИММЕТРИЧНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ**

Под симметрией выражения понимается наличие среди параметров и переменных нескольких групп, таких что от одинаковой перестановки элементов (или от перестановки их индексов) в каждой из групп вид выражения не меняется. Доказано, что для симметричных квадратичных форм симметризация критерия Сильвестра и критерия Манна путем суммирования левых частей неравенств по указанной перестановке индексов дает критерии знакоопределенности. Доказательство проводится индукцией по числу переменных, входящих в квадратичную форму, в предположении, что в векторе переменных элементы каждой группы не перемежаются с другими переменными. В качестве примера рассмотрена задача устойчивости равновесных ориентаций спутника-гиростата на круговой орбите с подвешенным к нему на тросе зондом.

Использование критериев положительной определенности квадратичных форм (КФ) в механике прежде всего связано с исследованием устойчивости [1]. В задачах динамики твердых тел группами, от одновременной циклической перестановки параметров или переменных в которых выражения основных динамических величин не меняются, могут быть, например, моменты инерции (A_1, A_2, A_3) , компоненты угловой скорости $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, направляющие косинусы $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Наличие симметрии облегчает аналитические вычисления и делает их более наглядными и компактными.

Ради сохранения симметрии иногда бывает целесообразно отказаться от исключения избыточных переменных и от применения критерия Сильвестра [1] знакоопределенности КФ и критерия Манна [2] знакоопределенности КФ на линейном многообразии, которые приводят к потере этой симметрии.

1. Симметризация критерия Сильвестра. В задачах механики размер s групп параметров и переменных, определяющих симметрию выражения, обычно, равен 3 или 2 и рассматривается циклическая перестановка индексов. Для определенности дальнейшие рассуждения проведем для типичного случая $s = 3$.

Рассмотрим квадратичную форму (КФ)

$$\varphi(x) = x^T A x, \quad A^T = A$$

Пусть среди переменных $x_1, \dots, x_n$ выделены группы по три переменных $(\beta_1, \beta_2, \beta_3), \dots, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$$x^T = (x_1, \dots, x_m, (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \dots, (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3))$$

а среди параметров, от которых зависят элементы матрицы A , выделены группы по три параметра $(c_1, c_2, c_3), \dots, (d_1, d_2, d_3)$

$$A = A(b_1, \dots, b_l, (c_1, c_2, c_3), \dots, (d_1, d_2, d_3))$$

в которых будем производить циклическую перестановку индексов (123), не распространяя ее на переменные $x_1, \dots, x_m$ и параметры $b_1, \dots, b_l$.

КФ $\varphi(x)$ предполагается симметричной в том смысле, что при перестановке индексов (123) в выделенных группах ее вид не меняется. Это значит, что каждому несимметричному члену в КФ φ соответствуют еще два члена, получающихся один из другого циклической перестановкой индексов (123). При циклической перестановке индексов они просто меняются местами.

Операцию циклической перестановки будем обозначать штрихом

$$(123)' = (231), \quad (231)' = (312), \quad (312)' = (123)$$

$$x'^T = (x_1, \dots, x_m, (\beta_2, \beta_3, \beta_1), \dots, (\gamma_2, \gamma_3, \gamma_1))$$

$$A' = A(b_1, \dots, b_l, (c_2, c_3, c_1), \dots, (d_2, d_3, d_1))$$

$$x'^T A' x' = x^T A x$$

Через Σ будем обозначать операцию суммирования по циклической перестановке индексов (123) в выделенных группах переменных и параметров, например,

$$\begin{aligned} \Sigma(c_2 + c_3)\beta_1^2 &= (c_2 + c_3)\beta_1^2 + (c_3 + c_1)\beta_2^2 + (c_1 + c_2)\beta_3^2 = \\ &= \Sigma(c_3 + c_1)\beta_2^2 = \Sigma(c_1 + c_2)\beta_3^2 = \Sigma c_1(\beta_2^2 + \beta_3^2) \end{aligned}$$

В левых частях неравенств критерия Сильвестра определенной положительности КФ $\varphi(x)$ стоят главные диагональные миноры Δ_i порядка i матрицы A . Минор Δ_i можно рассматривать как определитель матрицы $A^{(i)}$ КФ

$$\varphi^{(i)}(x^{(i)}) = \frac{1}{2} x^{(i)T} A^{(i)} x^{(i)} = \varphi(x) \Big|_{x_{i+1}=\dots=x_n=0}, \quad x^{(i)} = \text{col}(x_1, \dots, x_i) \quad (1.1)$$

получающейся из $\varphi(x)$ приравниванием нулю последних $n - i$ компонент вектора x . Если Δ_i соответствует части вектора x с урезанной циклической группой переменных, то при циклической перестановке индексов величина Δ_i будет меняться. Таким образом получим три варианта критерия Сильвестра

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0; \quad \Delta'_1 > 0, \dots, \Delta'_n > 0; \quad \Delta''_1 > 0, \dots, \Delta''_n > 0 \quad (1.2)$$

Основной результат этого раздела состоит в доказательстве того, что симметризованные условия

$$\Sigma \Delta_1 > 0, \dots, \Sigma \Delta_n > 0 \quad (1.3)$$

также дают критерий положительной определенности КФ φ . Здесь имеется в виду суммирование по циклической перестановке индексов в выделенных группах параметров, неявно входящих в определители Δ_i . Эти параметры явно появляются в развернутых выражениях определителей Δ_i .

Необходимость условий (1.3) очевидна, так как сумма положительных чисел всегда положительна. Достаточность не столь тривиальна. Покажем, что не всякое суммирование левых частей критерия Сильвестра по перестановкам компонент вектора x дает критерий положительной определенности. Например, при неполном суммировании (два слагаемых) по циклической перестановке переменных $(x_1, x_2, x_3)' = (x_2, x_3, x_1)$ и параметров $(c_1, c_2, c_3)' = (c_2, c_3, c_1)$ для знакопеременной КФ

$$\Sigma c_1 x_1^2 = 2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 = -x_1'^2 - 3x_2'^2 + 2x_3'^2$$

получим

$$\Delta_1 + \Delta'_1 = 2 - 1 > 0, \quad \Delta_2 + \Delta'_2 = -2 + 3 > 0, \quad \Delta_3 + \Delta'_3 = 6 + 6 > 0$$

Прежде чем доказывать достаточность симметризованного критерия Сильвестра (1.3), приведем еще один известный критерий положительной определенности. Очевидно, что какой бы ни была КФ $\varphi(x)$ найдется такое большое число $\sigma^* > 0$, что КФ

$\Phi(\sigma) = \varphi(x) + \sigma x^2$ при $\sigma \geq \sigma^*$ будет положительно определенной. Она останется положительно определенной и при $\sigma = 0$, если при непрерывном изменении σ от σ^* до нуля определитель матрицы КФ $\Phi(\sigma)$ (здесь и всюду далее E_i – единичная $(i \times i)$ -матрица)

$$\det(A + \sigma E_n) = \sigma^n + a_1 \sigma^{n-1} + \dots + a_n \quad (1.4)$$

не вырождается или, что то же, не имеет неотрицательных корней, что будет в том и только в том случае, когда

$$a_1 > 0, \dots, a_n > 0 \quad (1.5)$$

Коэффициенты a_i – симметричные (в указанном выше смысле) функции, так как они равны суммам C_n^i диагональных миноров порядка i матрицы A , и эти суммы, в частности, содержат и суммирование по циклической перестановке индексов (123) в выделенных группах. Таким образом, условия (1.5) также дают симметричный критерий положительной определенности КФ $\varphi(x) = \Phi(0)$, но имеют более сложную структуру, чем критерии (1.2) и (1.3).

Доказательство достаточности критерия (1.3) будем проводить индукцией по числу переменных, входящих в КФ $\varphi^{(i)}(x^{(i)})$ (1.1), в предположении, что в векторе переменных x переменные каждой группы не перемежаются с другими переменными. Индукцию проведем, сохраняя симметрию функции $\varphi^{(i)}(x^{(i)})$.

За основание индукции примем $\varphi^{(1)}(x_1)$, если x_1 не входит ни в одну циклическую группу, и $\varphi^{(3)}(x^{(3)})$, если x_1, x_2, x_3 образуют циклическую группу. Обе КФ не меняются при циклической перестановке индексов, а критерий (1.3) справедлив, так как для обеих этих КФ он совпадает с условием (1.5).

Итак, пусть критерий (1.3) справедлив для симметричной КФ $\varphi^{(i)}$. Докажем его справедливость для $\varphi^{(i+1)}(x^{(i+1)})$, если x_{i+1} не входит в циклические группы, и для $\varphi^{(i+3)}(x^{(i+3)})$, если $x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}$ образуют циклическую группу.

Рассмотрим сначала случай КФ $\varphi^{(i+1)}(x^{(i+1)})$. Докажем ее положительную определенность при выполнении условий типа (1.3)

$$\Sigma \Delta_1 > 0, \dots, \Sigma \Delta_{i+1} > 0 \quad (1.6)$$

Из первых i условий (1.6) по предположению индукции следует, что КФ $\varphi^{(i)}(x^{(i)})$ положительно определена, и поэтому для нее выполняются условия Сильвестра (1.2)

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_i > 0 \quad (1.7)$$

В силу предположения симметрии КФ $\varphi^{(i+1)}(x^{(i+1)})$ максимальный главный диагональный минор Δ_{i+1} не зависит от циклической перестановки индексов и с точностью до множителя 3 совпадает с левой частью последнего неравенства в (1.6). Это неравенство и условия (1.7) составляют условия Сильвестра для $\varphi^{(i+1)}(x^{(i+1)})$, что и доказывает ее положительную определенность.

Перейдем к доказательству положительной определенности КФ $\varphi^{(i+3)}(x^{(i+3)})$, считая, что она симметрична и выполнены условия

$$\Sigma \Delta_1 > 0, \dots, \Sigma \Delta_{i+3} > 0 \quad (1.8)$$

Из первых i условий (1.8) в силу предположения индукции следует положительная определенность КФ $\varphi^{(i)}(x^{(i)})$ и выполнение условий (1.5), которые примут вид

$$a_1^{(i)} > 0, \dots, a_i^{(i)} > 0 \quad (1.9)$$

Рассмотрим КФ

$$\Phi(\rho) = \varphi^{(i+3)}(x^{(i+3)}) + \rho(x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2 + x_{i+3}^2) = x^{(i+3)T} \begin{bmatrix} A^{(i)} & B \\ B^T & D + \rho E_3 \end{bmatrix} x^{(i+3)}$$

где матрицы B и D содержат элементы, дополняющие матрицу $A^{(i)}$ до $A^{(i+3)}$.

Соотношение (1.4) для нее имеет вид

$$\begin{vmatrix} A^{(i)} + \sigma E_i & B \\ B^T & D + (\rho + \sigma)E_3 \end{vmatrix} = \sigma^{i+3} + (3\rho + a_1^{(i+3)})\sigma^{i+2} + (3\rho^2 + \rho \Sigma a_1^{(i+2)} + a_2^{(i+3)})\sigma^{i+1} + \\ + (\rho^3 + \rho^2 \Sigma a_1^{(i+1)} + \rho \Sigma a_2^{(i+2)} + a_3^{(i+3)})\sigma^i + (\rho^3 a_1^{(i)} + \rho^2 \Sigma a_2^{(i+1)} + \rho \Sigma a_3^{(i+2)} + a_4^{(i+3)})\sigma^{i-1} + \dots \\ \dots + \rho^3 a_i^{(i)} + \rho^2 \Sigma a_{i+1}^{(i+1)} + \rho \Sigma a_{i+2}^{(i+2)} + a_{i+3}^{(i+3)} \quad (1.10)$$

При достаточно большом положительном ρ коэффициенты при различных степенях σ в (1.10) будут положительны, так как они представляют собой многочлены по степеням ρ с положительными (в силу условий (1.9)) коэффициентами при старших степенях ρ . Следовательно, на основании критерия (1.5) КФ $\Phi(\rho)$ будет определено положительно по $x^{(i+3)}$. Чтобы она осталась положительно определенной при $\rho = 0$, достаточно, чтобы корни (относительно ρ) определителя ее матрицы

$$f(\rho) = \begin{vmatrix} A^{(i)} & B \\ B^T & D + \rho E_3 \end{vmatrix} = \rho^3 a_i^{(i)} + \rho^2 \Sigma a_{i+1}^{(i+1)} + \rho \Sigma a_{i+2}^{(i+2)} + a_{i+3}^{(i+3)} \quad (1.11)$$

были отрицательными или, что то же, чтобы коэффициенты многочлена (1.11) были положительными. Учитывая соотношения

$$a_{i+1}^{(i+1)} = \Delta_{i+1}, \quad a_{i+2}^{(i+2)} = \Delta_{i+2}, \quad a_{i+3}^{(i+3)} = \Delta_{i+3}$$

заключаем, что последние три коэффициента в равенстве (1.11) как раз равны симметризованным левым частям последних трех неравенств критерия Сильвестра (первый положителен в силу условий (1.9)), что доказывает положительную определенность КФ $\Phi^{(i+3)}(x^{(i+3)})$.

Замечание 1. На практике величины Δ_{i+3} , $\Sigma \Delta_{i+2}$, $\Sigma \Delta_{i+1}$ иногда удобно вычислять дифференцированием определителя (1.11) по ρ

$$\Delta_{i+3} = f(0), \quad \Sigma \Delta_{i+2} = df(0)/d\rho, \quad \Sigma \Delta_{i+1} = \frac{1}{2} d^2 f(0)/d\rho^2$$

Замечание 2. Доказательство положительной определенности функции $\Phi^{(i+1)}(x^{(i+1)})$ можно было бы провести так же, как для $\Phi^{(i+3)}(x^{(i+3)})$, не опираясь на критерий Сильвестра. Доказательство необходимости тоже можно провести без использования критерия Сильвестра, с помощью той же индукции и с учетом соотношения $a_i^{(i)} = \Delta_i$. Тогда из этого доказательства в частности будет следовать доказательство критерия Сильвестра.

Замечание 3. Доказательство в случае симметрии с $s = 2$ является очевидным упрощением проведенного выше доказательства для $s = 3$.

2. Симметризация критерия Манна положительной определенности КФ на линейном многообразии. Рассмотрим задачу положительной определенности КФ на линейном многообразии

$$\Phi(x) = x^T A x \quad (A^T = A), \quad u = Bx = 0$$

где x и u – векторы размерности n и $k < n$, и введем КФ

$$\Psi = \Phi + \rho u^2$$

где ρ – сколь угодно большое положительное число, представляя ее в двух различных видах

$$\Psi = f(x) = x^T A x + \rho x^T B^T B x = x^T F x$$

и

$$\psi = g(u, x) = x^T A x + \rho(2u^T B x - u^2) = y^T G y$$

где

$$F = A + \rho B^T B, \quad G = \begin{bmatrix} -\rho E_k & \rho B \\ \rho B^T & A \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} u \\ x \end{bmatrix}$$

Вычислим определитель матрицы G , для чего прибавим его первую строку, умноженную на B^T слева, ко второй строке и результат разложим по первому столбцу. Получим

$$\det G = \begin{vmatrix} -\rho E_k & \rho B \\ 0 & F \end{vmatrix} = (-\rho)^k \det F \quad (2.1)$$

С другой стороны,

$$\det G = \rho^{2k} \det H(\varepsilon), \quad H(\varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon E_k & B \\ B^T & A \end{bmatrix} = H(0) + o(1) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho}, \quad H(0) = D = \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{bmatrix}$$

Сопоставляя соотношения (2.1) и (2.2), получим

$$\det F = (-1)^k \det D \rho^k + \dots$$

В многоточие включены члены со степенями ρ , меньшими k .

Проводя точно такие же рассуждения с укороченной КФ $\psi^{(i)}(x^{(i)})$, получающейся последовательным приравниванием нулю последних $n - i$ компонент вектора x , убедимся в справедливости аналогичных соотношений для главных диагональных миноров δ_i и Δ_i порядка i матриц F и D

$$\delta_i = (-1)^k \Delta_{k+i} \rho^k + \dots, \quad i = n, \dots, k+1 \quad (2.3)$$

$$\delta_i = \delta_i^\circ \rho^i + \dots, \quad i = k, \dots, 1 \quad (2.4)$$

Здесь δ_i° — сумма квадратов всевозможных миноров порядка i первых i столбцов матрицы B .

Симметризованный критерий Сильвестра (1.3) для положительной определенности КФ $f(x)$ примет вид

$$\Sigma \delta_i > 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

В силу соотношений (2.4) первые k условий (2.5) выполняются при невырожденности определителя, составленного из первых k столбцов матрицы B . Это ограничение можно заменить требованием полноты ранга матрицы, составленной из первых $k + 1$ столбцов матрицы B , так как последующие главные диагональные миноры порядка $i > k$ не изменяются от перестановки в матрице F первых $k + 1$ строк с одновременной такой же перестановкой ее первых $k + 1$ столбцов. Если в КФ $\varphi(x)$ переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ составляют циклическую группу, то в условиях (2.5) первые k неравенств будут выполнены при требовании полноты ранга матрицы, составленной из первых $k + 3$ столбцов матрицы B .

Сопоставляя последние $n - k$ неравенств в (2.5) с соотношениями (2.3) и учитывая тождество $\psi(x) = \varphi(x)$ при $u = Bx = 0$, получим симметризованный критерий Манна

положительной определенности КФ $\varphi(x)$ на линейном многообразии $u = Bx = 0$

$$(-1)^k \Sigma \Delta_i > 0, \quad i = 2k + 1, \dots, n + k \quad (2.6)$$

составляющий основной результат этого раздела.

Если вместо условий (1.3) в качестве критерия положительной определенности КФ $f(x)$ взять критерий Сильвестра (1.2), те же рассуждения дадут доказательство критерия Манна [2]

$$(-1)^k \Delta_i > 0, \quad i = 2k + 1, \dots, n + k \quad (2.7)$$

Критерий Манна неоднократно передоказывался (см., например, [3]). Приведенный вывод дает еще один способ доказательства этого критерия. Матрица D , фигурирующая в критерии Манна, рассматривалась в задаче условного минимума еще Вейерштрассом [4].

Критерий Вейерштрасса формулируется в терминах собственных значений КФ $\varphi(x)$ на линейном многообразии $u = 0$ и эквивалентен неравенствам

$$a_i > 0, \quad i = 2k + 1, \dots, n + k \quad (2.8)$$

где a_i — коэффициенты уравнения

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & B \\ B^T & A + \sigma E_n \end{vmatrix} = (-1)^k (a_{2k} \sigma^{n-k} + a_{2k+1} \sigma^{n-k-1} + \dots + a_{n+k}) = 0 \quad (2.9)$$

Коэффициенты a_i представляют суммы всевозможных диагональных миноров i -го порядка со знаком $(-1)^k$ матрицы D , окаймляющих ее главный диагональный минор k -го порядка, состоящий из нулей. Коэффициент a_{2k} равен сумме квадратов определителей порядка k , составленных из столбцов матрицы B . Фактически, критерий Вейерштрасса соответствует полной симметризации критерия Манна и требует от матрицы B только полноты ранга.

Укажем одну удобную формулу вычисления определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{vmatrix}$$

получающуюся разложением по минорам его первых k строк и столбцов

$$(-1)^k \Delta = \Sigma A_{s^i s^i} \tilde{B}_{s^i} \tilde{B}_{s^i}, \quad A_{s^i s^i} = A_{s^i s^i}, \quad \tilde{B}_{s^i} = (-1)^{s_1^i + \dots + s_k^i} B_{s^i} \quad (2.10)$$

Здесь B_{s^i} ($i = 1, \dots, m$) — все отличные от нуля определители, составленные из столбцов с номерами $s^i = (s_1^i, s_2^i, \dots, s_k^i)$ матрицы B , $A_{s^i s^i}$ — миноры матрицы A , получающиеся вычеркиванием из нее строк с номерами $s^i = (s_1^i, s_2^i, \dots, s_k^i)$ и столбцов с номерами $s^j = (s_1^j, s_2^j, \dots, s_k^j)$.

Замечание 4. При вычислении коэффициентов a_i из неравенств (2.8) могут оказаться также полезными очевидные соотношения

$$a_{2k+i} = (-1)^k \frac{d^{n-k-i} \Delta(0)}{(n-k-i)! d\sigma^{n-k-i}}$$

3. Пример. В качестве примера рассмотрим задачу устойчивости относительных равновесных ориентаций спутника-гиростата с подвешенным к нему на длинном безмассовом тросе зондом в орбитальной системе координат на круговой орбите. Эта задача является обобщением задачи, рассмотренной ранее в [5]. Под термином гиростат понимаем систему, состоящую из твердого корпуса и симметричных роторов (гиродин) с фиксированными осями вращения, подобную космической станции "Мир".

Для простоты предполагаем, что движение системы относительно ее центра масс не влияет на орбиту центра масс, что длина троса много больше размеров спутника и много меньше радиуса орбиты центра масс и что масса зонда много меньше массы спутника.

Равновесные ориентации и условия их устойчивости будем определять из условий минимума измененной потенциальной энергии действующих на спутник гравитационных сил и сил инерции, которую при сделанных предположениях можно записать в виде

$$W(\gamma, \beta) = \Sigma \left\{ \frac{3}{2} \omega^2 A_i \gamma_i^2 - \frac{1}{2} \omega^2 A_i \beta_i^2 - 3m\omega^2 L l_i \gamma_i - \omega k_i \beta_i \right\}$$

Здесь ω – кеплеровская орбитальная угловая скорость, m – масса зонда, L – длина троса, A_i – моменты инерции спутника с роторами относительно главных центральных осей инерции x_i ; γ_i, β_i – проекции на те же оси ортов γ и β радиус-вектора центра масс спутника и вектора нормали к плоскости орбиты; k_i, l_i – проекции вектора гироскопического момента k (вектор момента количеств относительных движений роторов, предполагаемый постоянным), и радиус-вектора точки подвеса троса относительно центра масс спутника.

В выражении для W учтена равновесная вертикальная ориентация троса, что не противоречит общей задаче минимума, так как такая ориентация троса доставляет измененной потенциальной энергии минимум при любых фиксированных значениях направляющих косинусов γ_i, β_i .

Переменные γ_i, β_i связаны очевидными геометрическими соотношениями

$$\psi = \gamma^2 - 1 = 0, \quad \chi = \gamma\beta = 0, \quad \varphi = \beta^2 - 1 = 0 \quad (3.1)$$

Вводя функцию V с неопределенными множителями Лагранжа λ, μ, ν

$$\begin{aligned} V(\lambda, \mu, \nu, \gamma, \beta) &= \frac{1}{\omega} W + \lambda \chi + \frac{1}{2} \mu \psi + \frac{1}{2} \nu \varphi = \\ &= \Sigma \left\{ \frac{1}{2} (\mu + 3A_i) \gamma_i^2 + \frac{1}{2} (\nu - A_i) \beta_i^2 - q_i \gamma_i - p_i \beta_i \right\} \quad q = 3mLl, \quad p = \frac{1}{\omega} k \end{aligned}$$

уравнения равновесия запишем в виде

$$\partial V / \partial \gamma_i = (\mu + 3A_i) \gamma_i + \lambda \beta_i - q_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

$$\partial V / \partial \beta_i = \lambda \gamma_i + (\nu - A_i) \beta_i - p_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3)$$

Из уравнений (3.2), (3.3) видно, что любую заданную ориентацию спутника, определяемую направляющими косинусами (γ_i, β_i) , удовлетворяющими условиям (3.1), выбором параметров q_i, p_i можно сделать равновесной, причем в этом выборе есть произвол, определяемый свободными параметрами λ, μ, ν .

Параметры μ и ν имеют простой геометрический смысл. Умножая уравнения (3.2) на γ_i , а уравнения (3.3) на β_i и суммируя по $i = 1, 2, 3$ с учетом соотношений (3.1), получим

$$\mu = \Sigma q_i \gamma_i - 3 \Sigma A_i \gamma_i^2, \quad \nu = \Sigma p_i \beta_i + \Sigma A_i \beta_i^2 \quad (3.4)$$

Геометрический смысл λ менее прозрачен.

Рассмотренные равновесные ориентации на основании теорем Лагранжа и Кельвина [1] будут устойчивыми, если заданные значения γ_i, β_i обращают функцию W при условиях (3.1) в минимум. Для этого достаточно, чтобы квадратичная часть функции V

$$\varphi(x) = \delta^2 V / 2 = x^T A x$$

была определено положительной на линейном многообразии $Bx = 0$, где

$$x = \begin{pmatrix} \delta\gamma \\ \delta\beta \end{pmatrix}, \quad A = \frac{\partial^2 V}{\partial(\gamma, \beta)^2} = \begin{pmatrix} D & \lambda E_3 \\ \lambda E_3 & C \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial(\chi, \psi, \varphi)}{\partial(\gamma, \beta)} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$C = \frac{\partial^2 V}{\partial\gamma^2} = \text{diag}(c_1, c_2, c_3), \quad D = \frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$$

$$c_i = v - A_i, \quad d_i = \mu + 3A_i$$

Для решения поставленной задачи применим критерий (2.6), для чего сначала вычислим определитель

$$-\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & B \\ B^T & A \end{vmatrix}$$

Используя формулу (2.10), получим 18 ненулевых определителей, которые можно составить из столбцов матрицы B

$$\tilde{B}_{i56} = (-1)^{i+1} \gamma_i \alpha_1, \quad \tilde{B}_{i46} = (-1)^{i+1} \gamma_i \alpha_2, \quad \tilde{B}_{i45} = (-1)^{i+1} \gamma_i \alpha_3 \quad (3.6)$$

$$\tilde{B}_{23i+3} = (-1)^i \beta_i \alpha_1, \quad \tilde{B}_{13i+3} = (-1)^i \beta_i \alpha_2, \quad \tilde{B}_{12i+3} = (-1)^i \beta_i \alpha_3, \quad i = 1, 2, 3$$

Этим определителям соответствуют следующие ненулевые дополнительные миноры матрицы A ($A_{s^i s^j} = A_{s^j s^i}$):

$$A_{156 \ 156} = c_1 d_2 d_3, \quad A_{256 \ 256} = c_1 d_1 d_3 - d_3 \lambda^2, \quad A_{356 \ 356} = c_1 d_1 d_2 - d_2 \lambda^2$$

$$A_{234 \ 234} = d_1 c_2 c_3, \quad A_{235 \ 235} = d_1 c_1 c_3 - c_3 \lambda^2, \quad A_{236 \ 236} = d_1 c_1 c_2 - c_2 \lambda^2$$

$$A_{156 \ 234} = \lambda^3, \quad A_{235 \ 256} = A_{236 \ 356} = \lambda^3 - c_1 d_1 \lambda \quad (3.7)$$

$$A_{246 \ 345} = (-1)^1 d_1 \lambda^2, \quad A_{135 \ 126} = (-1)^1 c_1 \lambda^2$$

$$A_{246 \ 126} = (-1)^1 c_2 d_3 \lambda, \quad A_{345 \ 135} = (-1)^1 c_3 d_2 \lambda$$

а также миноры, получающиеся из формул (3.7) одновременной циклической перестановкой индексов (123) и (456). Здесь показатель степени при минус единице также следует рассматривать как циклически изменяемый индекс.

Подстановка значений (3.6) и (3.7) в равенство (2.10) дает

$$-\Delta = \Sigma d_1 \alpha_1^2 \Sigma \beta_1^2 c_2 c_3 + \Sigma c_1 \alpha_1^2 \Sigma \gamma_1^2 d_2 d_3 - \lambda^2 (\Sigma c_1 \gamma_1^2 + \Sigma d_1 \beta_1^2) \quad (3.8)$$

$$\alpha_1 = \beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2$$

С учетом выражений (3.5) для c_i представим выражение (3.8) в виде квадратного трехчлена по степеням v

$$-\Delta(v) = av^2 + bv + c$$

$$a = \Sigma d_1 \alpha_1^2, \quad b = -a \Sigma (A_2 + A_3) \beta_1^2 + \Sigma d_2 d_3 \gamma_1^2 - \lambda^2$$

$$c = a \Sigma A_2 A_3 \beta_1^2 - \Sigma A_1 \alpha_1^2 \Sigma d_2 d_3 \gamma_1^2 - \lambda^2 (\Sigma d_1 \beta_1^2 - \Sigma A_1 \gamma_1^2)$$

Выписывая для этого случая определитель (1.4)

$$a(v + \sigma)^2 + b(v + \sigma) + c$$

и учитывая замечание 1 о дифференцировании определителя (1.11), условия устойчивости запишем в виде

$$a > 0, \quad 2av + b > 0, \quad av^2 + bv + c > 0 \quad (3.9)$$

Определитель (3.8) можно представить также в виде квадратного трехчлена по степеням μ

$$-\tilde{\Delta}(\mu) = \tilde{a}\mu^2 + \tilde{b}\mu + \tilde{c}$$

$$\tilde{a} = \Sigma c_1 \alpha_1^2, \quad \tilde{b} = 3a\Sigma(A_2 + A_3)\gamma_1^2 + \Sigma c_2 c_3 \beta_1^2 - \lambda^2$$

$$\tilde{c} = 9a\Sigma A_2 A_3 \gamma_1^2 + 3\Sigma A_1 \alpha_1^2 \Sigma c_2 c_3 \beta_1^2 - \lambda^2 (\Sigma c_1 \gamma_1^2 + 3\Sigma A_1 \beta_1^2)$$

Тогда условия устойчивости примут вид

$$\tilde{a} > 0, \quad 2\tilde{a}\mu + \tilde{b} > 0, \quad \tilde{a}\mu^2 + \tilde{b}\mu + \tilde{c} > 0 \quad (3.10)$$

Приведенные вычисления демонстрируют применение полученных в предыдущих разделах критериев положительной определенности симметричных квадратичных форм. Здесь мы не будем заниматься анализом полученных условий устойчивости и определением оптимальных значений параметров p и q , обеспечивающих равновесие и устойчивость. Ограничимся лишь замечанием, что при любой требуемой ориентации спутника условиям (3.9) или (3.50) можно удовлетворить за счет выбора свободных параметров μ , v и λ .

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Интеграция" (А0097) при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00785 и 00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
2. Mann H.B. Quadratic forms with linear constraints // Amer. Math. Monthly. 1943. V. 50. N 7. P. 430–433.
3. Шостак Р.Я. О признаке условной определенности квадратичной формы n переменных, подчиненных линейным связям, и о достаточном признаке условного экстремума функции n переменных // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. Вып. 2. С. 199–206.
4. Hancock H. Lectures on the Theory of Maxima and Minima of Functions of Several Variables (Weierstrass' theory). McMicken Hall: Univ. of Cincinnati, 1903. 114 p.
5. Степанов С.Я. О множестве стационарных движений спутника-гиростата в центральном ньютоновском поле сил и их устойчивости // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 4. С. 737–744.