

УДК 531.36

© 2002 г. В.С. Сергеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ОСОБЕННОСТЕЙ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЯДРАХ

Рассматриваются системы с последствием, состояние которых описывается интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерры, зависящими от функционалов в интегральной форме, в частности от аналитических функционалов, представимых рядами Фреше. Интегральные ядра могут допускать особенности типа особенностей ядер Абеля. Исследуется устойчивость при постоянно действующих возмущениях и структура общего решения в окрестности нуля для уравнения с голоморфной нелинейностью в предположении асимптотической устойчивости нулевого решения линеаризованного невозмущенного уравнения. Даются условия неустойчивости в критическом случае одного нулевого корня, обобщающие полученные ранее результаты.

Интегродифференциальные уравнения с ядрами рассматриваемого типа используются в моделях вязкоупругости (например, в механике полимеров) и моделях аэромеханики, учитывающих влияние на тело нестационарного потока с помощью интегральных членов.

1. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Будем рассматривать систему с последствием, которая описывается интегродифференциальным уравнением типа Вольтерры

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_{t_0}^t K(t,s)x(s)ds + F(x,y,z,t) + \mu\Phi(\mu,x,y,z,t) \quad (1.1)$$

$$x, y, z \in R^n, x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$$

где

$$y = \int_{t_0}^t k(t,s)\varphi(x(s),s)ds \quad (1.2)$$

и $z = \text{col}(z_1, \dots, z_n)$ – аналитический функционал, заданный рядом Фреше

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j(k)=1}^n \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t K^{j(k)}(t,s_1,\dots,s_k)x_{j_1}(s_1)\dots x_{j_k}(s_k)ds_1\dots ds_k \quad (1.3)$$

Через $j(k)$ обозначен набор индексов $j_1, \dots, j_k$.

Заданная на множестве $I = \{t \in R : t \geq t_0\}$ $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ имеет непрерывные ограниченные элементы, $(n \times n)$ -матрица $K(t,s)$ непрерывна и задана на множестве $J'_1 = \{(t,s) \in R^2 : t_0 \leq s < t < +\infty\}$. Непрерывные $(n \times n)$ -матрица-функция $k(t,s)$ и n -вектор-функция $K^{j(k)}(t,s_1,\dots,s_k)$ заданы соответственно на множествах J'_1 и $J'_k = \{(t,s_1,\dots,s_k) \in R^{k+1} : t_0 \leq s_j < t < +\infty, j = 1, \dots, k\}$. Функции $\varphi(x,t)$, $F(x,y,z,t)$, $\Phi(\mu,x,y,z,t)$ голоморфны по μ, x, y, z в некоторой окрестности нуля в соот-

ветствующих пространствах, непрерывны, ограничены по t при $t \in I$ и такие, что $\varphi(0, t) \equiv 0$ и разложение функции $F(x, y, z, t)$ не содержит членов ниже второго порядка.

В ряде задач нестационарной аэромеханики [1, 2], а также механики деформируемого твердого тела [3, 4] функционалы (1.2), (1.3) имеют убывающие интегральные ядра (разностного типа), которые допускают особенности при $t = s$ или $t = s_j$. Поэтому будем здесь считать, что для интегральных ядер, входящих в представления (1.2), (1.3), справедливы оценки

$$\|k(t, s)\| \leq \frac{C \exp[-\beta(t-s)]}{(t-s)^{\rho_0}} \quad (1.4)$$

$$\|K^{j(k)}(t, s_1, \dots, s_k)\| \leq C \frac{\exp[-\beta_1(t-s_1) - \dots - \beta_k(t-s_k)]}{[(t-s_1) \dots (t-s_k)]^\rho} \quad (1.5)$$

где $C > 0$, $\rho, \rho_0, \beta > 0$, β_i ($i = 1, \dots, k$) – постоянные, причем $0 \leq \rho_0 < 1$, $0 \leq \rho < 1$, и существует не зависящее от k число β_0 , такое, что $0 < \beta_0 \leq \beta_i$.

В уравнении (1.1) $\mu \geq 0$ – малый параметр и величина $\mu\Phi(\mu, x, y, z, t)$ считается постоянно действующим возмущением.

Рассмотрим для уравнения (1.1) вопрос об устойчивости при постоянно действующих возмущениях (в смысле Малкина [5]) состояния системы, соответствующего значению $x = 0$. Выясним также структуру общего решения этого уравнения в окрестности нуля при условии асимптотической устойчивости решения $x = 0$ невозмущенного уравнения (т.е. при $\mu\Phi(\mu, x, y, z, t) \equiv 0$). С этой целью воспользуемся первым методом Ляпунова и представим общее решение задачи Коши в виде степенного ряда по начальным значениям $x_0 = x(t_0) = \text{col}(x_{01}, \dots, x_{0n})$ и параметру μ .

Обозначим через $X(t, s)$ ($X(t, t) = E_n$) фундаментальную матрицу линеаризованного невозмущенного уравнения (1.1) с нижним пределом интегрирования s в интегральном члене. Будем считать, что

$$\|X(t, s)\| \leq C \exp[-\alpha(t-s)], \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad (1.6)$$

Теорема 1. Пусть для уравнения (1.1) – (1.3) выполнены неравенства (1.4) – (1.6) и пусть выбрано число $\gamma < \min(\alpha, \beta_0, \beta)$.

Тогда

1) общее решение уравнения (1.1) – (1.3) в окрестности точки $x = 0$ представляется рядом

$$\begin{aligned} x(t) = & \Gamma(t) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{sl(n)=m} S_1^{l(n)}(t) x_{01}^{l_1} \dots x_{0n}^{l_n} + \sum_{l_{n+1}=1}^{\infty} S_2^{l_{n+1}}(t) \mu^{l_{n+1}} + \\ & + \Gamma(t) \sum_{l_{n+1}, m=1}^{\infty} \sum_{sl(n)=m} S_3^{l(n+1)}(t) x_{01}^{l_1} \dots x_{0n}^{l_n} \mu^{l_{n+1}}, \quad \Gamma(t) = \exp[-\gamma(t-t_0)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

$(sl(n) = l_1 + \dots + l_n)$

с непрерывными ограниченными коэффициентами $S_i^{(\cdot)}(t)$, который сходится абсолютно и равномерно при $\|x_0\| < \delta$, $\mu < \delta$ для некоторого $\delta > 0$;

2) точка $x = 0$ устойчива при постоянно действующих возмущениях.

Доказательство проводится аналогично изложенному ранее [6, 7] с использованием интегрального уравнения

$$x(t) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, s)(F(x(s), y(s), z(s), s) + \mu\Phi(\mu, x(s), y(s), z(s), s))ds \quad (1.8)$$

которое эквивалентно уравнению (1.1) с начальным условием x_0 . Переменные $y(t)$ и $z(t)$ представляются рядами, аналогичными (1.7), с заменой коэффициентов $S(t)$ с

разными индексами на коэффициенты $P(t)$ и соответственно $Q(t)$ с теми же индексами. Указанные коэффициенты $S(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ определяются последовательно для возрастающих m , l_{n+1} на основании формул (1.8), (1.2), (1.3). Для $m = 1$, $l_{n+1} = 1$, например, получаем соотношения

$$\Gamma(t) \sum_{sl(n)=1} S_1^{l(n)}(t) x_{01}^{l_1} \dots x_{0n}^{l_n} = X(t, t_0) x_0, \quad S_2^{(1)}(t) = \int_{t_0}^t X(t, s) \Phi(0, 0, 0, 0, s) ds \quad (1.9)$$

и неравенства

$$\|S_1^{l(n)}(t)\| \leq C, \quad \|S_2^{(1)}(t)\| \leq C_1, \quad C_1 = \text{const} > 0$$

На основании равенств (1.2), (1.7) (1.9) также имеем

$$\Gamma(t) \sum_{sl(n)=1} P_1^{l(n)}(t) x_{01}^{l_1} \dots x_{0n}^{l_n} + \mu P_2^{(1)}(t) = \int_{t_0}^t k(t, s) \varphi'_x(0, s) [X(s, t_0) x_0 + \mu S_2^{(1)}(s)] ds$$

и следовательно, при $sl(n) = 1$, согласно оценке (1.4), учитывая, что $\|\varphi'_x(0, t)\| \leq \varphi_0 = \text{const}$, получаем для $t \in I$ оценки

$$\|P_1^{l(n)}(t)\| \leq C^2 \varphi_0 \Gamma^{-1}(t) \int_{t_0}^t \frac{\exp[-\beta(t-s)]}{(t-s)^{\rho_0}} \exp[-\alpha(s-t_0)] ds \leq C^2 \varphi_0 K_{\beta-\gamma, \rho_0}^*$$

$$\|P_2^{(1)}(t)\| \leq C C_1 \varphi_0 K_{\beta, \rho}^*; \quad K_{\beta, \rho}^* = \int_0^\infty \frac{\exp(-\beta\tau)}{\tau^\rho} d\tau$$

Аналогичным образом, например, для коэффициента $Q_1^{(1)}(t)$ разложения для z ввиду соотношений (1.3), (1.5), (1.6) имеем оценку

$$\|Q_1^{(1)}(t)\| \leq C^2 K_{\beta_0-\gamma, \rho}^*$$

Как и ранее [6, 7], строятся степенные ряды

$$u = u(\mu, x_0), \quad v = v(\mu, x_0), \quad w = w(\mu, x_0)$$

мажорирующие разложения соответственно для x , y , z . Для их определения имеем уравнения

$$u = C(x_0 + M_1 F^*(u, v, w) + \frac{\mu}{\alpha - \gamma} \Phi^*(\mu, u, v, w)) \quad (1.10)$$

$$v = C K_{\beta-\gamma, \rho_0}^* \Phi^*(u), \quad w_i = \frac{C K_{\beta_0-\gamma, \rho}^* u'}{1 - K_{\beta_0-\gamma, \rho}^* u'}, \quad u' = u_1 + \dots + u_n \quad (1.11)$$

$$u_i \geq x_i, \quad w_i \geq z_i, \quad w = \text{col}(w_1, \dots, w_n), \quad i = 1, \dots, n$$

где

$$F^*(x, y, z) \geq F(x, y, z, t), \quad \Phi^*(\mu, x, y, z) \geq \Phi(\mu, x, y, z, t), \quad \varphi^*(x) \geq \varphi(x, t)$$

и в качестве постоянной M_1 можно взять $1/(\alpha - \gamma)$.

Согласно общей теории мажорирующих уравнений [8], уравнение (1.10) имеет единственное положительное решение $u = u(\mu, x_0)$ в форме сходящегося степенного ряда по x_0 , μ , обращающееся в нуль при $x_0 = 0$, $\mu = 0$. Таким образом, ряд (1.7) сходится абсолютно и равномерно при всех $t \in I$ и $\|x_0\| < \delta$, $\mu < \delta$ для некоторого $\delta > 0$, что в свою очередь влечет устойчивость при постоянно действующих возмущениях точки $x = 0$.

Остановимся на уравнении (1.1) – (1.3), отказавшись от требования голоморфности функций и предположив существование мажорант Ляпунова [9] для функций $\varphi(x, t)$, $F(x, y, z, t)$ и постоянно действующего возмущения $\mu\Phi(x, y, z, t)$ (μ – малый параметр). Будем считать, что эти функции имеют в некоторой окрестности нуля $B'(x)$, либо $B(x, y, z)$ – непрерывные ограниченные первые производные по x либо x, y, z и непрерывны и ограничены по $t \in I$, причем $\varphi(0, t) \equiv 0$, $F(0, 0, 0, t) \equiv 0$. Условия, налагаемые на функции $A(t)$, $K(t, s)$, $k(t, s)$, $K^{(k)}(t, s_1, \dots, s_k)$, остаются прежними; в частности, выполнены неравенства (1.4), (1.5).

Пусть $\varphi^*(x)$, $F^*(x, y, z)$, $\Phi^*(x, y, z)$ – мажоранты Ляпунова для соответствующих функций ($\varphi^*(0) = 0$, $F^*(0, 0, 0) = 0$) и, следовательно, являются положительными монотонно возрастающими по x, y, z вместе со своими первыми производными в некоторой окрестности нуля. Будем считать, что мажоранты $\varphi^* = \text{col}(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$, $F^* = \text{col}(F_1^*, \dots, F_n^*)$ удовлетворяют для произвольного ε , такого, что $0 \leq \varepsilon \leq 1$, следующим условиям:

$$\begin{aligned} \varphi_i^*(\varepsilon u) &\leq \varepsilon \varphi_i^*(u), \quad u \in B'(u) \\ F_i^*(\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w) &\leq \varepsilon^{1+\delta} F_i^*(u, v, w), \quad \delta > 0, (u, v, w) \in B(u, v, w) \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.12)$$

Будем так же, как и ранее, полагать, что выполнено неравенство (1.6).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть для уравнения (1.1) – (1.3) с функциями $\varphi(x, t)$, $F(x, y, z, t)$, $\Phi(x, y, z, t)$, удовлетворяющими оговоренным выше условиям гладкости и непрерывности, существуют мажоранты Ляпунова $\varphi^*(x)$, $F^*(x, y, z)$, $\Phi^*(x, y, z)$, подчиненные неравенствам (1.12). Пусть выполнены неравенства (1.4) – (1.6).

Тогда точка $x = 0$

- 1) устойчива при постоянно действующих возмущениях $\mu\Phi(x, y, z, t)$;
- 2) обладает свойством притяжения, если дополнительно выполняется условие

$$\|\Phi(0, 0, 0, t)\| \leq C \exp(-\gamma_0 t), \quad \gamma_0 = \text{const} > 0 \quad (1.13)$$

Доказательство проводится методом последовательных приближений на основании уравнения (1.8) и аналогично доказательству теоремы 1 из [10].

Если $x_k(t)$, $y_k(t)$, $z_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) – последовательные приближения для $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, причем

$$x_1(t) = X(t, t_0)x_0 + \mu \int_{t_0}^t X(t, s)\Phi(0, 0, 0, s)ds$$

и

$$u_k \geq x_k(t), \quad v_k \geq y_k(t), \quad w_k \geq z_k(t)$$

то для мажорант

$$u \geq x(t), \quad v \geq y(t), \quad w \geq z(t)$$

имеем мажорирующее уравнение

$$u = C(x_0 + \frac{1}{\alpha} F^*(u, v, w) + \frac{\mu}{\alpha} \Phi^*(u, v, w)) \quad (1.14)$$

в котором для функций v и w можно взять выражения (1.11).

Утверждение 1 теоремы 2 непосредственно следует из существования в окрестности точки $u = 0$ обращающегося в нуль при $x_0 = 0$, $\mu = 0$ гладкого монотонно возрастающего по каждой координате решения $u = u(\mu, x_0)$ уравнения (1.14).

Утверждение 2, обусловленное дополнительным неравенством (1.13), следует из возможности представления решения в данном случае в форме

$$x(t) = \exp(-\gamma t) \tilde{x}(t), \quad \gamma < \min(\alpha, \beta, \beta_0, \gamma_0), \quad \|\tilde{x}(t)\| \leq \text{const}, \quad t \in I$$

что можно установить так же, как аналогичное свойство решения в теореме 1 из [10].

В качестве примера рассмотрим задачу [11] о движении твердого тела (крыла) при нестационарном обтекании воздушным потоком, который в невозмущенном режиме набегаёт на тело с постоянной скоростью, а в возмущенном режиме на него накладываются малые флуктуации (порывы). Эти малые возмущения являются функциями времени и в отличие от случая, рассмотренного ранее [11], не будут здесь предполагаться экспоненциально затухающими. Кроме того, можно считать, что интегральные ядра $I_{ij}(t)$ и $J_{ij}(t)$ в представлениях для аэродинамических сил и их моментов (выражение (1.5) в [11]) в форме, предложенной в [1], – дифференцируемые функции, такие, что их производные допускают оценку типа (1.4). Тогда, переходя от уравнений движения в виде, не разрешенном относительно производных, к стандартной форме интегродифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных, получим уравнения типа (1.1). При этом можно допустить, что нелинейные члены уравнений могут содержать интегральные члены с ядрами, содержащими особенности рассмотренного выше типа. Следовательно, применима теорема 1 (или теорема 2) в зависимости от характера рассматриваемых нелинейных членов. Положение равновесия крыла, удерживаемого вязкоупругими пружинами, свойства которых сохранены такими же, как в [11], будет устойчиво при постоянно действующих возмущениях, если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.

2. Неустойчивость в критическом случае одного нулевого корня. Исследуем устойчивость по Ляпунову движения, отвечающего нулевому решению уравнения

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \int_{t_0}^t K(t-s)x(s)ds + F(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

в котором A – постоянная $(n \times n)$ -матрица, $(n \times n)$ -матрица $K(t)$ непрерывна при $t > 0$ и удовлетворяет оценке типа (1.4)

$$\|K(t)\| \leq C \frac{\exp(-\beta t)}{t^{\rho_0}}, \quad C > 0, \quad \beta > 0, \quad 0 \leq \rho_0 < 1 \quad (2.2)$$

Голоморфная по x, y, z в некоторой окрестности нуля и непрерывная ограниченная по $t \in I$ функция $F(x, y, z, t)$ обладает теми же свойствами, что и аналогичная функция в уравнении (1.1), и, кроме того, коэффициенты разложения в степенной ряд экспоненциально стремятся при $t \rightarrow +\infty$ к постоянным или сами постоянны. Переменные y, z задаются представлениями (1.2), (1.3), в которых интегральные ядра разностного типа

$$k(t, s) \equiv k_0(t-s), \quad K^{j(k)}(t, s_1, \dots, s_k) \equiv K_0^{j(k)}(t-s_1, \dots, t-s_k)$$

подчинены неравенствам (1.4), (1.5).

Составим для уравнения (2.1) характеристическое уравнение

$$\det(\lambda E_n - A - K^*(\lambda)) = 0 \quad (2.3)$$

где $K^*(\lambda)$ – преобразование Лапласа для $K(t)$.

Пусть в полуплоскости $\text{Re } \lambda > -\beta$ уравнение (2.3) имеет конечное число корней $\lambda'_j (j = 1, \dots, L, L \geq n)$, занумерованных в порядке возрастания вещественных частей, причем

$$\text{Re } \lambda'_1 \leq \text{Re } \lambda'_2 \leq \dots \leq \text{Re } \lambda'_{L-1} < \lambda'_L = 0 \quad (2.4)$$

Будем считать корни λ'_{L-k} ($k = 1, \dots, n-1$) простыми (среди них могут быть комплексно-сопряженные). Для характеристических показателей имеем соотношения $\lambda_i = \operatorname{Re} \lambda'_{L+1-i}$ ($i = 1, \dots, n$).

Исследование устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для уравнения (2.1) проводилось ранее [12–15] для более простой структуры функции F и интегральных ядер, не содержащих особенностей. Была развита [12–14] методика определения постоянной Ляпунова и способ доказательства неустойчивости на примере уравнений с интегральными ядрами экспоненциально-полиномиального типа. Было приведено [15] утверждение о неустойчивости в случае уравнений с ядрами $K(t) \in C$, не имеющими особенностей, функцией $F(x, t)$ рассматриваемого здесь типа и корнями λ'_j , удовлетворяющим условию (2.4).

Приводимый ниже результат (теорема 3) обобщает соответствующее утверждение работы [15] на случай интегральных ядер с особенностями типа (2.2), (1.4), (1.5) и функцией $F(x, y, z, t)$, фигурирующей в уравнении (2.1).

Следуя известной процедуре [16], представим резольвенту линеаризованного уравнения (2.1) в форме

$$R(t) = \sum_{i=L-n+1}^L p_i \exp(\lambda'_i t) + R_1(t), \quad t \in I$$

где p_i – постоянная диагональная матрица, $(n \times n)$ -матрица $R_1(t) \in C^1$ и $\|R_1(t)\| \leq C \exp(-\beta^* t)$ ($C, \beta^* = \operatorname{const} > 0$) для $-\beta < -\beta^* < \lambda_1$. Будем, кроме того, полагать, что

$$\|dR_1(t)/dt\| \leq C \exp(-\beta' t), \quad \beta' = \operatorname{const} \geq \beta^* \quad (2.5)$$

Обозначим через $X'(t) = (x'_{ij}(t))$ ($i, j = 1, \dots, n$) фундаментальную матрицу решений линеаризованного уравнения (2.1), нормальную в смысле Ляпунова [17, 18].

Пусть $Y'(t) = (y'_{ij}(t))$ – матрица, такая, что $Y'(t)X'(t) = E_n$, и пусть $X'_1(t)$ – матрица, получаемая из $X'(t)$ вычеркиванием n -й строки и n -го столбца.

Проведем, следуя описанному ранее подходу [14, 15], преобразование, выделяющее критическую переменную и приводящее линеаризованное уравнение (2.1) к дифференциальному уравнению с постоянной диагональной матрицей. С этой целью полагаем

$$\begin{aligned} z' &= \operatorname{col}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \exp(\Lambda' t) Y'_1(t) x' \\ x' &= \operatorname{col}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad \Lambda'_1 = \operatorname{diag}(\lambda'_{L-n+1}, \dots, \lambda'_{L-1}) \end{aligned}$$

и вводим критическую переменную

$$z_n = \sum_{j=1}^n y'_{nj}(t) x_j$$

При этом предполагается, что выполнены следующие условия, позволяющие отнести рассматриваемые преобразования к классу преобразований Ляпунова:

$$\begin{aligned} \left\| \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j t\right) \det X'(t) \right\| &\geq d' > 0, \quad t \in I \\ \|y'_{nn}(t)\| &\geq \delta' > 0, \quad d', \delta', h' = \operatorname{const} \\ \left\| \exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j t\right) \det X'_1(t) \right\| &\geq h' > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Будем использовать следующие определения.

Будем говорить, что функция $f(t) \in e_1(\alpha)$, если при $t \in I$ справедлива оценка

$$\|f(t)\| \leq C \exp(\alpha t), \quad C > 0, \quad \alpha = \operatorname{const}$$

Будем также говорить, что функция $\varphi(t, s) \in e'_2(\gamma, \alpha)$, если при $t_0 \leq s < t < +\infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, s)\| \leq C \frac{\exp[\alpha(t-s)]}{(t-s)^\gamma}, \quad C > 0, \quad 1 > \gamma \geq 0, \quad \alpha = \text{const}$$

Аналогично функция $\psi(t, s_1, s_2, \dots, s_k) \in e'_{k+1}(\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ($\alpha_j = \text{const}$), если на J'_k

$$\|\psi(t, s_1, \dots, s_k)\| \leq C \frac{\exp[\alpha_1(t-s_1) + \dots + \alpha_k(t-s_k)]}{[(t-s_1)\dots(t-s_k)]^\gamma}$$

Если последнее неравенство имеет место при $\gamma = 0$ для $t_0 \leq s_j \leq t < +\infty$ ($j = 1, \dots, k$), то будем считать, что $\psi(t, s_1, s_2, \dots, s_k) \in e_{k+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Если при этом $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \alpha$, то $e'_{k+1}(\gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ и $e_{k+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ будем обозначать также через $e'_{k+1}(\gamma, \alpha)$ и $e_{k+1}(\alpha)$ соответственно.

Все проводимые преобразования, позволяющие выделить постоянную Ляпунова и доказать неустойчивость, должны сохранять свойство всех интегральных ядер принадлежать классу $e_{k+1}(-\alpha_1, \dots, -\alpha_k)$ или $e'_{k+1}(\gamma, -\alpha_1, \dots, -\alpha_k)$ ($\alpha_j > 0$) и свойство всех коэффициентов $\varphi(t)$ при членах, не содержащих интегралов, экспоненциально убывать при $t \rightarrow +\infty$, т.е.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1(t), \quad \varphi_0 = \text{const}, \quad \varphi_1(t) \in e_1(-\alpha), \quad \alpha > 0 \quad (2.7)$$

Оценим некоторые коэффициенты с интегральными членами, появляющиеся в ходе проведения преобразований. Так, для $K(t-s) \in e'_2(\gamma, -\beta)$ ($\beta > 0$) получаем

$$\int_{t_0}^t K(t-s)ds = \int_{t_0}^\infty K(s)ds - \int_t^\infty K(s)ds = k_0 + k_1(t)$$

т.е. имеем функцию типа (2.7) с $k_1(t) \in e_1(-\beta)$.

Пусть $K(t, s) \in e'_2(\gamma, -\beta)$ и $f(t) \in e_1(-\alpha')$ при $\beta > 0$, $\alpha' > 0$. Тогда

$$\left\| \int_{t_0}^t K(t, s)f(s)ds \right\| \leq C \exp(-\alpha't) \int_{t_0}^t \frac{\exp[-(\beta - \alpha')(t-s)]}{(t-s)^\gamma} ds \in e_1(-\delta + \epsilon) \quad (2.8)$$

где $\delta = \min(\alpha', \beta)$ и $\epsilon > 0$ – некоторое малое число, такое, что $-\delta + \epsilon < 0$.

Рассмотрим преобразование, аналогичное проведенному ранее ([14], разд. 3), позволяющее исключить из подсистемы для некритических переменных интегральные члены, линейные по z_n . Сохраняя обозначения из [14], оценим, например, введенную там функцию

$$h_1(t, \tau) = \int_{t_0}^\tau k(t, s)ds$$

где интегральное ядро, если учесть оценку (2.2) и формулу для $k(t, s)$, таково, что $k(t, s) \in e'_2(\rho_0, -\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$. Имеем

$$\|h_1(t, \tau)\| \leq C \int_{t-\tau}^{t-t_0} \frac{\exp(-\alpha s)}{s^{\rho_0}} ds < C \int_{t-\tau}^\infty \frac{\exp(-\alpha s)}{s^{\rho_0}} ds \quad (2.9)$$

Можно считать, что $h_1(t, \tau) \in e_2(-\alpha)$.

Действительно, доопределяя по непрерывности функцию $h_1(t, \tau)$ при $t = \tau$ и оценивая интеграл в правой части неравенства (2.9) (ограниченную при $0 \leq t - \tau < +\infty$ функцию), получаем для $t - \tau \geq 1$

$$\int_{t-\tau}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha s)}{s^{\rho_0}} ds < \int_{t-\tau}^{\infty} \exp(-\alpha s) ds$$

Следовательно, имеем

$$\|h_1(t, \tau)\| \leq C' \exp[-\alpha(t - \tau)], \quad 0 \leq \tau \leq t < +\infty, \quad C' = \text{const} > 0$$

Оценки и характер убывания функций $h_2(t, s)$, $R_i(t, s)$ ($i = 1, 2, 3$), введенных ранее [14], также сохраняются. Оценим, например, появляющийся в ходе преобразований интеграл вида

$$I_1(t, \tau) = \int_{\tau}^t h(s, \tau) h'(t, s) ds, \quad h \in e'_2(\gamma_1, -\alpha_1), \quad h' \in e'_2(\gamma_2, -\alpha_2), \quad \alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0$$

Имеем

$$\begin{aligned} |I_1(t, \tau)| &\leq C' \int_{\tau}^t \frac{\exp[-\alpha_1(s - \tau)]}{(s - \tau)^{\gamma_1}} \frac{\exp[-\alpha_2(t - s)]}{(t - s)^{\gamma_2}} ds < \\ &< C' \int_{\tau}^t \frac{\exp[-\alpha_1(s - \tau)]}{(s - \tau)^{\gamma_1}} ds \int_{\tau}^t \frac{\exp[-\alpha_2(t - s)]}{(t - s)^{\gamma_2}} ds = \\ &= C' \int_0^{t-\tau} \frac{\exp(-\alpha_1 s)}{s^{\gamma_1}} ds \int_0^{t-\tau} \frac{\exp(-\alpha_2 s)}{s^{\gamma_2}} ds, \quad 0 \leq \tau < s < t < +\infty \end{aligned} \quad (2.10)$$

и, таким образом, $I_1(t, \tau) \in e_2(-\alpha)$ для $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$.

В результате на данном этапе преобразований получается система уравнений

$$\frac{dz_n}{dt} = Z_n(z', z_n, t) \quad (2.11)$$

$$\frac{dz'}{dt} = \Lambda'_1 z' + \int_{t_0}^t R_3(t, \tau) Z_n(z', z_n, \tau) d\tau - \int_{t_0}^t R_2(t, \tau) \Phi(z', z_n, \tau) d\tau + \Phi'(z', z_n, t) \quad (2.12)$$

где

$$R_3(t, \tau) = R_1(t, \tau) + \int_{\tau}^t h_1(s, \tau) R_2(t, s) ds \in e_2(-\alpha)$$

для некоторого $\alpha > 0$, и разложения для Z_n , Φ начинаются с квадратичных членов, а разложение для Φ' содержит также член, линейный по z_n . Порядок некоторого члена, входящего в $\Phi(z, z_n, t)$, определяется степенью параметра ε при этом члене в разложении по ε для $\Phi(\varepsilon z, \varepsilon z_n, t)$ при замене $z \rightarrow \varepsilon z$, $z_n \rightarrow \varepsilon z_n$, в том числе и под знаками интегралов.

Уравнения (2.11), (2.12) содержат интегральные члены с интегральными ядрами, удовлетворяющими только оценкам типа (1.4), (1.5) или принадлежащими классу $e_k(-\alpha)$ для некоторых k и $\alpha > 0$. При определении постоянной Ляпунова в уравнении (2.11) интегральные члены порядка k , зависящие только от критической переменной z_n , преобразуются интегрированием по частям для выделения неинтегрального

члена того же порядка. Так, например, если $\kappa(t-s) \in e'_2(\gamma, -\alpha)$, $\tilde{\varphi}(t) \in e_1(-\alpha_0)$ для $\alpha > 0$, $\alpha_0 > 0$, то имеем

$$\int_{t_0}^t \kappa(t-s) \tilde{\varphi}(s) z_n^k(s) ds = z_n^k I'(t, t) - \int_{t_0}^t I'(t, \tau) k z_n^{k-1}(\tau) Z_n(z'(\tau), z_n(\tau), \tau) d\tau$$

$$I'(t, \tau) = \int_{t_0}^{\tau} \kappa(t-s) \tilde{\varphi}(s) ds$$

где, согласно оценке (2.8), $I'(t, t) \in e_1(-\gamma')$ для некоторого $\gamma' > 0$. Аналогично оценке (2.8) имеем $I'(t, \tau) \in e_2(-\gamma'')$ для некоторого $\gamma'' > 0$.

Подобным же образом проводится преобразование и оценка членов ряда Фреше, зависящих лишь от критических переменных. В частности, для квадратичного члена ряда Фреше с интегральным ядром $K^{n,n}(t-s_1, t-s_2) \in e'_3(\gamma, -\beta_0)$ ($\beta_0 > 0$) получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K^{n,n}(t-s_1, t-s_2) z_n(s_1) z_n(s_2) ds_1 ds_2 &= \int_{t_0}^t [z_n(t) \int_{t_0}^t K^{n,n}(t-s_1, t-s_2) ds_1 - \\ &- \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} K^{n,n}(t-\tau, t-s_2) d\tau Z_n(z'(s_1), z_n(s_1), s_1) ds_1] z_n(s_2) ds_2 = z_n^2(t) k^{n,n}(t) + \dots \end{aligned}$$

где многоточие означает члены более второго порядка. Коэффициент $k^{n,n}(t)$ дается выражением

$$k^{n,n}(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K^{n,n}(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = k_0^{n,n} + k_1^{n,n}(t); \quad k_0^{n,n} = \int_{t_0}^{\infty} \int_{t_0}^{\infty} K^{n,n}(s_1, s_2) ds_1 ds_2$$

причем $k_0^{n,n}$ – постоянная и $k_1^{n,n}(t) \in e_1(-\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$.

Преобразование подсистемы (2.12) для некритических переменных сводится к исключению из правой части членов, зависящих только от z_n , до некоторой степени k_1 и интегральных членов, линейных по z' и содержащих z_n в степенях, не превышающих некоторое число k_2 . Так, например, для определения постоянной g_2 из уравнения (2.11) с помощью замены

$$u = z' + u'_1(t) z_n + u'_2(t) z_n^2 + \int_{t_0}^t M_1(t, s) z'(s) z_n(s) ds \quad (2.13)$$

исключаются линейный и квадратичный по z_n члены, а также квадратичный интегральный член, содержащий $z' z_n$. В (2.13) $u'_1(t)$, $u'_2(t)$ – непрерывные ограниченные при $t \in I$ функции и функция $M_1(t, s)$ непрерывна при $(t, s) \in J'_1$. Эти функции определяются так же, как и ранее [14], и, в частности, имеем выражение

$$M_1(t, s) = -\exp(\Lambda'_1 t) \int_s^t \exp(-\Lambda'_1 \tau) M'_1(\tau, s) d\tau$$

где $M'_1(\tau, s)$ – заданное ядро интегрального члена, который подлежит исключению. При этом $M'_1(\tau, s) \in e'_2(\gamma, -\alpha)$ ($\alpha > 0$) и, следовательно, согласно оценке (2.10), $M_1(t, s) \in e_2(-\alpha')$ для некоторого $\alpha' > 0$.

В общем случае при определении, например, постоянной g_{2m+1} ($g_k = 0$, $k = 2, 3, \dots, 2m$) проводится преобразование типа (2.13), в котором содержится многочлен по z_n степени $4m$ и интегральный член, линейный по z' и являющийся многочленом по z_n

степени $2m + 1$. Коэффициенты $u_i'(t)$ и ядра $M_p(t, s)$ этого преобразования находятся так же, как в (2.13), и таковы, что $M_p(t, s) \in e_2'(\gamma, -\alpha)$, либо $M_p(t, s) \in e_2(-\alpha)$ ($\alpha > 0$), а $u_i'(t)$ типа (2.7). Далее, в уравнении для критической переменной стандартной процедурой [13, 14] выделяется постоянная Ляпунова g_p , и это уравнение для новой критической переменной u_n принимает форму

$$\frac{du_n}{dt} = g_p u_n^p + U_n^{(2)}(u, u_n, t) + U_n^{(p+1)}(u, u_n, t) \quad (2.14)$$

где $U_n^{(2)}, U_n^{(p+1)}$ – интегральные операторы, такие, что $U_n^{(2)}(0, u_n, t) \equiv 0$, $U_n^{(2)}(\epsilon u, \epsilon u_n, t)$ – многочлен по ϵ степени p без свободного и линейного членов, а разложение по ϵ для $U_n^{(p+1)}(\epsilon u, \epsilon u_n, t)$ начинается с члена, содержащего ϵ^{p+1} .

Далее, так же, как и ранее [13, 14], если $p = 2m$ и $g_p \neq 0$ или $p = 2m + 1$ и $g_p > 0$, строится сектор, в котором траектория уходит от точки $x = 0$, и с помощью теоремы Четаева о неустойчивости устанавливается неустойчивость нулевого решения.

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 3. Пусть характеристическое уравнение (2.3) для уравнения (2.1), (1.2), (1.3), (2.2) имеет в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > -\beta$ конечное число корней λ_j' ($j = 1, \dots, L$), причем $\lambda_L' = 0$ и справедливы неравенства (2.4), пусть выполнены условия (1.4), (1.5), (2.5), (2.6) и пусть в уравнении (2.14) постоянная $g_p \neq 0$ ($g_s = 0$, $s = 2, \dots, p - 1$) при p четном или $g_p > 0$ при p нечетном.

Тогда нулевое решение уравнения (2.1), (1.2), (1.3) неустойчиво.

Возвращаясь к задаче о движении твердого тела в нестационарном потоке, рассмотренной в разд. 1, отметим, что полученные ранее [11] результаты по неустойчивости равновесия тела в критическом случае нулевого корня естественным образом распространяются на основе теоремы 3 на случай интегральных ядер, допускающих оценки (1.4), (1.5), (2.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196, 00-15-96150).

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
2. Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
4. Трояновский И.Е. О построении периодических решений интегродифференциальных уравнений вязкоупругости // Механика полимеров. 1974. № 3. С. 529–531.
5. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. Сергеев В.С. Об устойчивости решений интегродифференциальных уравнений в некоторых случаях // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, 1987. С. 98–105.
7. Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых системах с последствием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.
8. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 431 с.
9. Лика Д.К., Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиинца, 1974. 291 с.
10. Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последствием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.

11. *Сергеев В.С.* Об устойчивости равновесия крыла в нестационарном потоке // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 227–236.
12. *Сергеев В.С.* О неустойчивости решений одного класса интегродифференциальных уравнений в критическом случае нулевого корня // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1985. С. 54–84.
13. *Сергеев В.С.* К вопросу о неустойчивости в критическом случае нулевого корня для интегродифференциальных уравнений Вольтерра // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 86–92.
14. *Сергеев В.С.* О неустойчивости нулевого решения одного класса интегродифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. Т. 24. 1988. № 8. С. 1443–1454.
15. *Сергеев В.С.* Об устойчивости в некоторых критических случаях для интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра // Актуальные проблемы классической и небесной механики. М.: Эльф, 1998. С. 128–137.
16. *Jordan J.S., Wheeler R.L.* Structure of resolvents of Volterra integral and integrodifferential systems // SIAM J. Math. Anal. 1980. V. 11. № 1. P. 119–132.
17. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч. Т. 2. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
18. *Быков Я.В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во Киргиз. ун-та, 1957. 327 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XI.2001