

УДК 532.5:531.01

© 2002 г. А.Г. Петров

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД
ПОСТРОЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ ПУАНКАРЕ
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ**

Плоскопараллельное движение частиц несжимаемой среды сводится к исследованию гамильтоновой системы. Функцией Гамильтона является функция тока. Рассматривается функция Гамильтона, периодически зависящая от времени, что соответствует процессу перемешивания несжимаемой среды в области, периодически изменяющейся со временем. Перемешивание среды связывается с динамическим хаосом. Описание перехода к динамическому хаосу осуществляется путем исследования положения лагранжевых частиц через отрезки времени, кратные периоду (точки последования Пуанкаре (ТПП)). Множество ТПП может быть получено с помощью отображения Пуанкаре на фазовом потоке.

Развитый метод применяется к исследованию плоскопараллельного движения частиц несжимаемой вязкой жидкости в тонком слое, ограниченном плоским дном, прямолинейными боковыми стенками и верхней границей, деформирующейся по заданному периодическому закону. Движение частиц определяется из системы уравнений Гамильтона. Гамильтониан (функция тока) находится в приближении тонкого слоя и зависит от двух безразмерных параметров: амплитуды деформации и касательной скорости на деформирующейся границе. В области двух параметров численно определена характерная граница, отделяющая область хаотического движения ТПП от упорядоченного движения. С помощью найденного с точностью до третьего порядка по амплитуде отображения Пуанкаре проанализирована топологическая структура фазовых траекторий до перехода к хаотическому режиму. Аналитически найденные фазовые траектории точек ТПП оказываются близкими к траекториям исходной системы Гамильтона, определенных численно. В области двух безразмерных параметров найденное отображение позволяет качественно определять границу перехода к хаосу.

Как известно [1, 2], производящие функции позволяют конструктивно строить отображения, осуществляемые фазовым потоком гамильтоновой системы. Ниже предлагается альтернативный метод построения отображений в параметрическом виде. Отображение $(X_0, Y_0) \rightarrow (X, Y)$ с якобианом, равным единице, записывается в параметрической форме в виде $(X_0, Y_0) \rightarrow (x, y) \rightarrow (X, Y)$ и выражается через функцию $\Psi(x, y)$ параметров x, y . Для отображения осуществляемого фазовым потоком гамильтоновой системы, получено уравнение типа Якоби. Для гамильтоновых систем стандартного вида решение для Ψ представлено в виде сходящегося степенного по малому параметру ряда.

На точно интегрируемых случаях показан ряд преимуществ параметрического метода перед классическим методом производящих функций. Степенной ряд для функции Ψ сходится значительно лучше, соответствующие приближения оказываются проще, а точность значительно выше по сравнению с аналогичными классическими результатами. Доказано, что для автономной гамильтоновой системы степенной ряд по малому параметру для Ψ не содержит четных степеней.

1. Введение. Рассматривается задача Коши для уравнений Гамильтона системы с n степенями свободы

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= H_{\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{Y} = -H_{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \\ H_{\mathbf{X}} &= \partial H / \partial \mathbf{X}, \quad H_{\mathbf{Y}} = \partial H / \partial \mathbf{Y} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $H(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = H(t + T, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ – произвольная достаточно гладкая T -периодическая функция, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – n -мерные векторы.

До настоящего времени нет общепринятого определения хаотических движений. Для систем с одной степенью свободы можно дать геометрическое простое определение хаоса, хотя и не вполне строгое математически. В этом случае гамильтониан системы можно трактовать как функцию тока течения несжимаемой среды. Гамильтонова система (1.1) определяет движение лагранжевых частиц среды. Введем несколько понятий, необходимых для определения хаоса лагранжевых частиц в системах с одной степенью свободы.

На траектории $\mathbf{R}\{\mathbf{X}(t, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0), \mathbf{Y}(t, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)\}$, определяемой из решения системы (1.1), рассмотрим положения точек через интервалы времени, кратные периоду $\mathbf{R}_m\{\mathbf{X}(t_n, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0), \mathbf{Y}(t_n, t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)\}$, $t_n = t_0 + Tn$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Такие точки называют *точками последования Пуанкаре* (ТПП). Множество ТПП – это след частицы при киносъемке с частотой кадров, соответствующей периоду T . ТПП образует счетное множество, точек на плоскости, которое зависит, вообще говоря, от $t_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$. Если множество ТПП принадлежит одномерной линии, то такая линия называется *инвариантной кривой*. При упорядоченном движении все множества ТПП образуют семейство инвариантных кривых. В рассмотренном ниже (разд. 9) гидродинамическом примере такой случай проиллюстрирован на первых четырех фазовых портретах ТПП. В другом случае множество ТПП заполняют двумерную область. Этот случай и будем называть хаотическим движением ТПП. Примеры расчетов хаотических движений представлены на последних шести фазовых портретах ТПП.

При периодической зависимости гамильтониана от времени множество ТПП может быть вычислено по рекуррентным формулам $\mathbf{R}_n = P_{t_0}^T(\mathbf{R}_{n-1})$, где $P_{t_0}^{\Delta t}(\Delta t = t - t_0)$ – отображение на фазовом потоке системы (1.1) или попросту решение задачи (1.1). Отображение за период $P_{t_0}^T$ называется отображением Пуанкаре.

Заметим, что введенное определение хаотизации не зависит от t_0 . Действительно, при изменении t_0 на $t_0 + \Delta t$, $0 < \Delta t < T$, множество ТПП преобразуется с помощью непрерывного отображения $P_{t_0}^{\Delta t}$. При этом одномерная линия или двумерная область переходят соответственно в одномерную линию или двумерную область. Если $\Delta t = kT$, т.е. кратно периоду, то отображение $P_{t_0}^{\Delta t} = P_{t_0}^{kT}$ переводит ТПП в себя. При произвольном значении Δt можно представить в виде $\Delta t = kT + \Delta t'$, $0 < \Delta t' < T$. Отображение $P_{t_0}^{\Delta t}$ тождественно отображению $P_{t_0}^{\Delta t'}$ и не меняет топологической структуры ТПП.

В дальнейшем для определенности выбирается $t_0 = 0$, а при обозначении отображения Пуанкаре верхний и нижний индексы будем убирать: $P = P_0^T$.

Исследование хаотичности движения с помощью отображений Пуанкаре называют также методом сечений Пуанкаре. Этой теме посвящены монографии [3–7]. Однако само построение отображения Пуанкаре – сложная вычислительная задача. Поэтому обычно ТПП находятся численно, а аналитические методы для вычисления ТПП в гидродинамических системах не применяются (за исключением очень простых искусственных примеров [8]).

Для качественного исследования систем с одной степенью свободы с гамильтонианом стандартной формы

$$H = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \varepsilon^3 H_3 + \dots \quad (1.2)$$

где ε – малый параметр, полезны следующие теоретические результаты. Известно, что автономная гамильтонова система (гамильтониан явно не зависит от времени) является интегрируемой. Лагранжевы частицы лежат на одномерных линиях тока $H(X_n, Y_n) = \text{const}$, и движение упорядоченное. Для неавтономной системы стандартного вида асимптотическая процедура метода усреднения [9, 10] позволяет построить для любого целого $k > 0$ близкую к тождественной каноническую замену переменных $X, Y \rightarrow X, Y$, так что с точностью до малых порядка ε^{k+1} уравнения для новых переменных будут иметь вид автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $\bar{H}(X, Y)$.

Последовательностью канонических замен гамильтониан системы можно привести к почти автономному виду $\bar{H}(X, Y) + \rho(t, X, Y)$. Теорема А.И. Нейштадта [11] устанавливает для неинтегрируемых систем с аналитическим гамильтонианом существование неулучшаемой оценки $|\rho| < C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. При $\rho = 0$ система имеет интеграл, и в случае одной степени свободы, хаоса не будет. Хаос вызывает именно экспоненциально малая величина $\rho(t, X, Y)$, которую методами усреднения определить невозможно. Поэтому применение метода усреднения для конструктивного описания перехода к хаотическим движениям в системах с одной степенью свободы оказывается бесполезным. Однако качественно можно констатировать следующую типичную картину нарастания хаоса при увеличении параметра ε . При достаточно малом ε множества ТПП лежат на инвариантных кривых $\bar{H}(X_n, Y_n) = \text{const}$, определяемых методами усреднения с точностью до $\rho = C_1 \exp(-C/\varepsilon)$. В этом случае в силу малости ρ хаос практически не заметен. При достаточном увеличении ε экспоненциальная добавка начинает проявляться, хаос становится заметным и площадь хаотизации достаточно быстро увеличивается с ростом ε .

Обычно начало хаоса связывают с существованием неустойчивых неподвижных точек отображения Пуанкаре [3–7]. Неподвижной точке $P(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ (точке $P^k(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$) соответствует периодическое решение с периодом T (с периодом kT). Задача устойчивости по Ляпунову периодического решения сводится к решению задачи устойчивости неподвижной точки отображения. Для ее решения применяется метод показателей Ляпунова [5]. Поскольку аналитический вид отображения P не известен, то показатели Ляпунова определяют численно. Ниже будет показано, как найти отображение P и показатели Ляпунова аналитически в виде разложений по ε , а в конкретной гидродинамической системе с точностью до ε^5 .

Доказательство хаотичности на основании какого-либо строгого определения хаоса, даже для системы с одной степенью свободы – чрезвычайно трудная задача. Были приведены [8] доказательства хаотичности для некоторых простых отображений. Для гамильтоновых систем для доказательства хаотичности используется теорема В.К. Мельникова [5], что связано с вычислением достаточно сложного интеграла. Аналитически методом В.К. Мельникова можно доказать хаотичность движений математического маятника с вибрирующей точкой подвеса. В такой системе с гамильтонианом, периодически зависящим от времени, имеется сепаратриса, представимая в простом аналитическом виде, что и обеспечивает возможность применения этой теоремы и установить расщепление сепаратрис [2]. Обычно проверка хаотичности по теореме В.К. Мельникова или другим способом определяется лишь численными достаточно громоздкими методами.

Были приведены [7] некоторые достаточно простые примеры исследования гидродинамических систем с помощью численного определения ТПП. Практически отсутствуют исследования движения вязкой жидкости в области, граница которой меняется со временем. Одно из таких исследований [12] было посвящено анализу

движения частиц несжимаемых сред с различной реологией в тонком деформирующемся слое; на границах слоя принимались условия отсутствия касательной скорости. Численные расчеты показали, что в такой системе при малых числах Рейнольдса хаос практически отсутствует.

Ниже предлагается конструктивный параметрический метод построения отображений на фазовом потоке гамильтоновой системы. Установлены в общем случае и показаны на примерах преимущества параметрического метода перед известным методом производящих функций. Развитая асимптотическая теория описания перехода к хаотическому движению применяется к анализу более общего движения сильно вязкой жидкости в тонком деформирующемся слое с учетом касательной скорости на границе. На основании найденного отображения Пуанкаре дается объяснение численных экспериментов по отсутствию хаоса при нулевой касательной скорости на границах. При наличии касательной скорости на границе хаос возможен при достаточно малых амплитудах деформации волны.

2. Уравнения, определяющие отображение Пуанкаре. Метод производящих функций используется для канонических преобразований [1, 2]. Этот же аппарат можно применить для построения отображения Пуанкаре. Для простоты рассмотрим задачу Коши (1.1) для системы с одной степенью свободы (хотя все результаты нетрудно обобщить для общего случая системы с n степенями свободы). Отображение $X_0, Y_0 \rightarrow X, Y$, сохраняющее фазовый объем, представляется через дифференцируемую функцию смешанных переменных вида $X_0 Y + S(t, X_0, Y)$ (производящая функция) в виде соотношения

$$X = X_0 + \partial S / \partial Y, \quad Y_0 = Y + \partial S / \partial X_0 \quad (2.1)$$

При выполнении условия

$$1 + \partial^2 S / \partial X_0 \partial Y > 0 \quad (2.2)$$

систему можно разрешить относительно X, Y , что дает в результате представление отображения с якобианом, равном единице при любой функции S . Если производящую функцию S определить из уравнения Гамильтона – Якоби

$$S_t(t, X_0, Y) = H(t, X_0 + S_Y(t, X_0, Y), Y), \quad S(0, X_0, Y) = 0 \quad (2.3)$$

то отображение (2.1) будет решением гамильтоновой системы (1.1).

Для системы стандартного вида (1.2) функция S представляется рядом по степеням ϵ . Любое конечное число членов разложения будет определять отображение, у которого фазовый объем будет точно сохраняться. В этом состоит удобство применения метода производящих функций. Однако в этом методе есть существенные недостатки. Отметим два из них (см. ниже пример гармонического осциллятора).

1°. Отображения вида (2.1) не являются универсальными. (Например, поворот на 90° в виде (2.1) не представим. Для такого отображения нужно в производящей функции выбрать другую пару переменных, но тогда в этих переменных нельзя представить тождественное преобразование [1, 2].)

2°. Условие разрешимости существенно ограничивает диапазон изменения параметра ϵ . Кроме того, это условие (2.2) не инвариантно по отношению к преобразованию поворота декартовых координат на фазовой плоскости [2].

Предлагается новая схема параметрического представления отображения, свободная от этих недостатков. Близкий, но не параметрический способ построения инвариантной производящей функции был предложен ранее ([2], с. 342)).

Параметрический метод. Будем искать отображение $\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ с якобианом, равным единице, в параметрической форме $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(t, \mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}$ – двумерные

векторы, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(0)$ – начальная точка траектории, $\mathbf{R}$ – точка траектории в момент времени t , $\mathbf{r}$ – некоторый вектор-параметр. Общий вид этого отображения таков

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \Psi_x \\ \Psi_y \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0E \\ -E0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

(I – симплектическая матрица, E – единичная матрица).

Отображение $\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{R}$ получается, если разрешить первое уравнение (2.4) относительно параметра $\mathbf{r}$, а затем подставить зависимость $\mathbf{r}(\mathbf{R}_0)$ во второе. Якобианы обоих отображений (2.4) равны одной и той же функции

$$J(t, \mathbf{r}) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}} \right) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \mathbf{r}} \right) = 1 + \frac{1}{4} \det \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{r} \partial \mathbf{r}} \right) \quad (2.6)$$

Поэтому якобиан суперпозиции отображений $\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ тождественно равен единице. Отображение (2.4) является аналогом (2.1), а условие (2.2) заменяется на условие $J > 0$.

Для того чтобы отображение (2.4) представляло решение задачи Коши (1.1) для уравнений Гамильтона, функция Ψ должна удовлетворять аналогу уравнения Гамильтона – Якоби (2.3)

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \left(t, \mathbf{r} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad \Psi(0, \mathbf{r}) = 0 \quad (2.7)$$

Здесь и далее для определенности выбрано $t_0 = 0$.

Для системы с одной степенью свободы в координатной форме отображение (2.4) имеет вид

$$X_0 = x - \frac{1}{2} \Psi_y, \quad Y_0 = y + \frac{1}{2} \Psi_x; \quad X = x + \frac{1}{2} \Psi_y, \quad Y = y - \frac{1}{2} \Psi_x \quad (2.8)$$

Такая параметрическая форма отображения с якобианом, равным единице была выведена [13] со ссылкой на работу Шеффера (G. Scheffers).

Соответственно уравнение (2.7) для функции $\Psi(t, x, y)$ записывается так:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \left(t, x + \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, y - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right), \quad \Psi(0, x, y) = 0 \quad (2.9)$$

Формулы (2.8) и (2.9) легко распространить на системы с n степенями свободы. Для этого в них достаточно заменить параметры x и y на вектор-параметры $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Эти результаты являются основой асимптотического метода получения отображения Пуанкаре. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 1. Отображение (2.4) является решением задачи (1.1) тогда и только тогда, когда функция Ψ является решением задачи (2.7).

Теорема 1 является частным случаем более общей теоремы о параметризации канонических преобразований, которая будет доказана ниже.

3. Параметрическая форма канонических преобразований. Для более общего результата параметризации канонической замены переменных в гамильтоновых системах справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть преобразование переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ записано в пара-

метрической форме

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \Psi_y \\ \mathbf{p} = \mathbf{y} + \frac{1}{2} \Psi_x \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{Q} = \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Psi_y \\ \mathbf{P} = \mathbf{y} - \frac{1}{2} \Psi_x \end{cases} \quad (3.1)$$

Тогда

1) якобианы двух преобразований $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ тождественно равны:

$$\frac{\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \frac{\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = J(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (3.2)$$

2) при $J > 0$ преобразование (3.1) переменных $\mathbf{q}, \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ будет каноническим, переводящим гамильтонову систему $\tilde{H} = \tilde{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p})$ в гамильтонову $H = H(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$, если функцию Ψ определить из уравнения

$$\Psi_t(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \tilde{H}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \quad (3.3)$$

где аргументы $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ и $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ в гамильтонианах H и $\tilde{H}$ выражены через параметры $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ по (3.1).

Доказательство утверждения 2 проведем с помощью критерия каноничности, согласно которому дифференциальная форма $\delta F = \mathbf{P} \delta \mathbf{Q} - \mathbf{p} \delta \mathbf{q} - (H - \tilde{H}) \delta t$ является полным дифференциалом некоторой функции $\delta F(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_t \delta t + F_x \delta \mathbf{x} + F_y \delta \mathbf{y}$ [1].

Подставляем в дифференциальную форму δF вместо $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}$ их выражения (3.1) через параметры $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и заменяем $H - \tilde{H}$ через Ψ_t согласно уравнению (3.3). После очевидных преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta F &= (\mathbf{y} - \frac{1}{2} \Psi_x)(\delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Psi_{yt} \delta t + \frac{1}{2} \Psi_{yx} \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Psi_{yy} \delta \mathbf{y}) - \\ &- (\mathbf{y} + \frac{1}{2} \Psi_x)(\delta \mathbf{x} - \frac{1}{2} \Psi_{yt} \delta t - \frac{1}{2} \Psi_{yx} \delta \mathbf{x} - \frac{1}{2} \Psi_{yy} \delta \mathbf{y}) - \Psi_t \delta t = \\ &= \mathbf{y}(\Psi_{yt} \delta t + \Psi_{yx} \delta \mathbf{x} + \Psi_{yy} \delta \mathbf{y}) - \Psi_x \delta \mathbf{x} - \Psi_t \delta t = \delta(\mathbf{y} \Psi_y - \Psi) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 1 следует из того, что для канонической замены якобиан тождественно равен единице $\partial(\mathbf{Q}, \mathbf{P})/\partial(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 1$.

Здесь под $\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ понимаются n -мерные векторы. Поэтому описанный способ канонических замен относится к гамильтоновым системам произвольного порядка n .

В частном случае $\tilde{H} = 0$ переменные $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ превращаются в начальную точку $\mathbf{q} = \mathbf{Q}(0)$, $\mathbf{p} = \mathbf{P}(0)$ траектории $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ системы с гамильтонианом $H(t, \mathbf{Q}, \mathbf{P})$. Таким образом, теорема 1 тоже доказана.

4. Асимптотический метод определения отображения Пуанкаре. Пусть гамильтониан системы стандартного вида представляется в виде степенного ряда (1.2). Тогда решение уравнения (2.7) с нулевым начальным условием представляется в виде ряда по степеням ε

$$\Psi = \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \varepsilon^3 \Psi_3 + \dots \quad (4.1)$$

Для вычисления коэффициентов ряда подставляем разложение (4.1) в правую часть

уравнения (2.7) и разлагаем ее в ряд по степеням ε

$$H(t, \mathbf{x} + \frac{1}{2}\Psi_y, y - \frac{1}{2}\Psi_x, \varepsilon) = \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 [H_2 - \frac{1}{2}\{H_1, \Psi_1\}] + \varepsilon^3 [H_3 - \frac{1}{2}(\{H_2, \Psi_1\} + \{H_1, \Psi_2\}) + \frac{1}{8}(H_{1xx}\Psi_{1y}\Psi_{1y} - 2H_{1xy}\Psi_{1x}\Psi_{1y} + H_{1yy}\Psi_{1x}\Psi_{1x})] + \dots$$

Тогда производные Ψ_n определяются как коэффициенты при степенях ε^n

$$\begin{aligned} \Psi_{1t} &= H_1, \quad \Psi_{2t} = H_2 - \frac{1}{2}\{H_1, \Psi_1\} \\ \Psi_{3t} &= H_3 - \frac{1}{2}(\{H_2, \Psi_1\} + \{H_1, \Psi_2\}) + \frac{1}{8}(H_{1xx}\Psi_{1y}\Psi_{1y} - 2H_{1xy}\Psi_{1x}\Psi_{1y} + H_{1yy}\Psi_{1x}\Psi_{1x}), \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда интегрированием по t с учетом условий $\Psi_n = 0$ при $t = 0$ коэффициенты ряда (4.1) выразятся через заданные коэффициенты ряда (1.2). Для отображения Пуанкаре за период T с точностью до малых третьего порядка получим

$$\Psi = \int_0^T \left[\varepsilon H_1(t, \mathbf{x}, y) + \varepsilon^2 \left(H_2(t, \mathbf{x}, y) - \frac{1}{2} \left\{ H_1(t, \mathbf{x}, y), \int_0^t H_1(t', \mathbf{x}, y) dt' \right\} \right) \right] dt \quad (4.3)$$

($\{f, h\} = f_y h_x - f_x h_y$ – скобка Пуассона).

Полученную формулу (4.3) можно записать более кратко

$$\Psi = \int_0^T \left[H(t, \mathbf{x}, y) - \frac{1}{2} \left\{ H(t, \mathbf{x}, y), \int_0^t H(t', \mathbf{x}, y) dt' \right\} \right] dt + O(\varepsilon^3)$$

Сходимость ряда (4.1) доказывается методом мажорант так же, как и для общей системы дифференциальных уравнений стандартного вида [14]. Таким образом, отображение Пуанкаре является аналитической функцией по параметру ε . Это согласуется также с известной теоремой об аналитичности решения дифференциального уравнения по параметру.

5. Отображение Пуанкаре для автономных гамильтоновых систем. Для автономной гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ процедура разложения в степенной ряд функции Ψ существенно упрощается.

Можно показать, что решение уравнения (2.7) $\Psi(t, \mathbf{x}, y)$ – нечетная функция по аргументу t .

Действительно, для автономной гамильтоновой системы имеет место интеграл $H(\mathbf{R}(t)) = H(\mathbf{R}_0)$. Пусть $\Psi(t, \mathbf{x}, y)$ – решение (2.7). Тогда по доказанной теореме

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}, \quad H\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}\right) = H\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2} I \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{r}}\right)$$

при любом действительном t . Далее, совершая в уравнении (2.7) замены $t = -\tau$, $\Psi = -\tilde{\Psi}$, имеем

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tau} = H\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2} I \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{r}}\right) = H\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2} I \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \mathbf{r}}\right), \quad \tilde{\Psi}(0, \mathbf{r}) = 0$$

Полученная краевая задача тождественна исходной (2.7). В силу единственности заключаем, что $\Psi(t, \mathbf{x}, y) = -\Psi(-t, \mathbf{x}, y)$.

Установленное свойство можно использовать для упрощения вычисления ряда функции Ψ в случае гамильтониана стандартного вида (1.2). Для этого запишем формально гамильтониан в виде

$$H = \varepsilon \tilde{H}(X, Y, \varepsilon_1), \quad \tilde{H} = H_1 + \varepsilon_1 H_2 + \varepsilon_1^2 H_3 + \dots$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon$ этот гамильтониан совпадает с исходным. По доказанному свойству при $\varepsilon_1 = \text{const}$ решение (2.7) представляется рядом по нечетным степеням εt

$$\Psi = (\varepsilon t) \tilde{\Psi}_1 + (\varepsilon t)^3 \tilde{\Psi}_3 + (\varepsilon t)^5 \tilde{\Psi}_5 + \dots \quad (5.1)$$

Коэффициенты этого ряда $\tilde{\Psi}_n(x, y, \varepsilon_1)$ вычисляются из уравнения (2.7) значительно проще, чем в неавтономном случае. Так, для получения разложения с точностью до малых порядка $(\varepsilon t)^5$ нужно вычислить только два коэффициента, а не четыре, как в общем случае, т.е.

$$\Psi = (\varepsilon t) \tilde{H}(x, y, \varepsilon_1) + \frac{1}{8} (\varepsilon t)^3 [\tilde{H}_{xx} \tilde{H}_y \tilde{H}_y - 2 \tilde{H}_{xy} \tilde{H}_x \tilde{H}_y + \tilde{H}_{yy} \tilde{H}_x \tilde{H}_x] + O(\varepsilon t)^5 \quad (5.2)$$

Чтобы получить окончательное разложение по степеням ε , нужно положить $\varepsilon = \varepsilon_1$ и подставить в выражение (5.2) ряд

$$\tilde{H}(X, Y, \varepsilon) = H_1 + \varepsilon H_2 + \varepsilon^2 H_3 + \dots$$

Поскольку неавтономную гамильтонову систему можно привести к автономной с повышением числа степеней свободы на единицу [1], то процедуру получения отображения Пуанкаре для общей неавтономной системы можно свести к описанной процедуре для автономной системы. Существенные упрощения для автономной системы можно использовать, чтобы получить степенной ряд с большим числом членов с меньшими выкладками. Так, применяя аналог формулы (5.2), получим отображение на два порядка точнее формулы (4.3).

6. Процедура усреднения. Процедура усреднения с помощью производящих функций описана ранее [9]. Для периодического по времени гамильтониана параметрический метод позволяет построить усредненный гамильтониан не менее эффективно. Были указаны [15, 12, 16] примеры таких расчетов с точностью до ε^3 .

Приведем общую процедуру построения асимптотического ряда усредненного гамильтониана

$$\bar{H}(X, Y, \varepsilon) = \varepsilon \bar{H}_1 + \varepsilon^2 \bar{H}_2 + \varepsilon^3 \bar{H}_3 + \dots \quad (6.1)$$

с помощью параметрического метода.

Пусть исходный гамильтониан периодичен по времени с периодом T и представляется рядом (1.2) с известными коэффициентами. Тогда по формулам (4.2) последовательно вычисляются коэффициенты ряда (4.1) для функции $\Psi(t, x, y)$. Таким образом, будем считать, что ряд (4.1) известен.

Далее нужно решить следующую задачу:

$$\Psi_t = \bar{H} \left(x + \frac{1}{2} \bar{\Psi}_y, y - \frac{1}{2} \bar{\Psi}_x, \varepsilon \right), \quad \bar{\Psi}(0, x, y, \varepsilon) = 0 \quad (6.2)$$

$$\Psi(T, x, y, \varepsilon) - \bar{\Psi}(T, x, y, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1}) \quad (6.3)$$

где $\Psi(t, x, y, \varepsilon)$ – отображение Пуанкаре исходной системы, а $\bar{\Psi}(t, x, y, \varepsilon)$ – отображение Пуанкаре, соответствующее системе с гамильтонианом $\bar{H}(x, y, \varepsilon)$. Уравнение (6.2) связывает функцию отображения $\bar{\Psi}(t, x, y, \varepsilon)$ и порождающий это отображение га-

мильтониан $\bar{H}$. Уравнение (6.3) означает совпадение положения ТПП исходной и усредненной систем через период с точностью до ϵ^{k+1} .

С учетом выражения (6.1) записываем правую часть уравнения (6.2) в виде

$$\bar{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \epsilon) = \epsilon \tilde{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \epsilon_1), \quad \tilde{H} = \tilde{H}_1 + \epsilon_1 \bar{H}_2 + \epsilon_1^2 \bar{H}_3 + \dots$$

Тогда, согласно разложениям (5.1) и (5.2), решение уравнения (6.2) будет иметь вид

$$\bar{\Psi}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \epsilon) = (\epsilon t) \tilde{\Psi}_1 + (\epsilon t)^3 \tilde{\Psi}_3 + (\epsilon t)^5 \tilde{\Psi}_5 + \dots \quad (6.4)$$

$$\tilde{\Psi}_1 = \tilde{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \epsilon_1), \quad \tilde{\Psi}_3 = \frac{1}{8}(\tilde{H}_{xx} \tilde{H}_y \tilde{H}_y - 2 \tilde{H}_{xy} \tilde{H}_x \tilde{H}_y + \tilde{H}_{yy} \tilde{H}_x \tilde{H}_x), \dots$$

Из равенства (6.3) с заданной наперед точностью находим коэффициенты асимптотического ряда усредненного гамильтониана (6.1). Например, с точностью до ϵ^3 усредненный гамильтониан, умноженный на период T , и отображающая функция совпадают:

$$T \tilde{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \epsilon) = \Psi(T, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \epsilon) \quad (6.5)$$

(Такого простого соотношения в этом приближении для производящей функции нет.) Принимая во внимание выражение (4.3), из равенства (6.5) получим известную формулу для усредненного гамильтониана в этом приближении [9]

$$\bar{H} = \frac{1}{T} \bar{\Psi} = \left\langle H - \frac{1}{2} \left\{ H, \int_0^T H dt \right\} \right\rangle + O(\epsilon^3) \quad (6.6)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду.

Аналогичные упрощения будут и в более высоких приближениях. С точностью до ϵ^5 коэффициенты ряда усредненного гамильтониана получаются из равенств $\Psi(T, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\epsilon T) \tilde{\Psi}_1 + (\epsilon T)^3 \tilde{\Psi}_3$ и (6.4). Отсюда нетрудно получить коэффициенты в этом приближении

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{T} \Psi_1, \quad \bar{H}_2 = \frac{1}{T} \Psi_2 \quad (6.7)$$

$$\bar{H}_3 = \frac{1}{T} \left[\Psi_3 - \frac{1}{8} T^3 (\bar{\Psi}_{1xx} \bar{\Psi}_{1y} \bar{\Psi}_{1y} - 2 \bar{\Psi}_{1xy} \bar{\Psi}_{1x} \bar{\Psi}_{1y} + \bar{\Psi}_{1yy} \bar{\Psi}_{1x} \bar{\Psi}_{1x}) \right] + \dots$$

Таким образом, для вычисления коэффициентов асимптотических разложений усредненного гамильтониана параметрический метод эффективнее метода производящих функций [9].

7. Отображение малой области. Будем полагать, что гамильтониан $H(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \epsilon)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция координат $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$. Как функция времени гамильтониан имеет период T . Координаты $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ меняются в некоторой компактной области.

Согласно теории конечных деформаций [17], отображение малой окрестности точки $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ определяет матрица $A = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{R}_0$ ($\mathbf{R} = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$). Пользуясь отображением (2.7), матрицу A можно выразить через производные отображающей функции $\Psi = \Psi(T, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \epsilon)$.

Согласно представлению (2.4), матрица A равна произведению обратной матрицы отображения $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}_0$ и матрицы отображения $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R}$ ($\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

$$A = A_-^{-1} A_+; \quad A_{\pm} = E \pm \frac{1}{2} I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{R}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{R}^2} = \begin{vmatrix} \Psi_{xx} & \Psi_{xy} \\ \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \end{vmatrix}, \quad I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{R}^2} = \begin{vmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{vmatrix}$$

Пользуясь тождеством $A_-^{-1} = A_+/J$, матрицу A можно представить в виде

$$A = \frac{1}{J} \left[(2 - J)E + \begin{vmatrix} \Psi_{xy} & \Psi_{yy} \\ -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \end{vmatrix} \right] \quad (7.1)$$

где J – якобиан, определяемый по формуле (2.6).

Дальнейшее изучение локального отображения проведем для двумерных областей $(X_0, Y_0) \rightarrow (X, Y)$. Выразим компоненты матрицы локального отображения через вторые производные функции Ψ и для сравнения через вторые производные производящей функции, представив это же отображение в виде (2.1)

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{2 - J}{J} + \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{(1 + S_{XY})^2 - S_{XX}S_{YY}}{1 + S_{XY}} \\ A_{12} &= \frac{\Psi_{yy}}{J} = \frac{S_{YY}}{1 + S_{XY}}, \quad A_{21} = -\frac{\Psi_{xx}}{J} = -\frac{S_{XX}}{1 + S_{XY}} \\ A_{22} &= \frac{2 - J}{J} - \frac{\Psi_{xy}}{J} = \frac{1}{1 + S_{XY}} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отображение малой окрестности $(\delta X_0, \delta Y_0) \rightarrow (\delta X, \delta Y)$ с матрицей A имеет относительно поворотов системы координат два независимых инварианта

$$I_1 = A_{11} + A_{22}, \quad I_2 = A_{12} - A_{21}$$

Для параметрического отображения J и $\Delta\Psi = \Psi_{xx} + \Psi_{yy}$ – также инварианты, так как они выражаются через инварианты I_1 и I_2 :

$$J = \frac{4}{I_1 + 2}, \quad \Delta\Psi = \frac{4I_2}{I_1 + 2}$$

Поэтому условие $J > 0$ существования параметрического отображения инвариантно и его можно представить в виде $I_1 + 2 > 0$.

Покажем, что условие существования отображения (2.2) с производящей функцией $1 + S_{XY} > 0$ не инвариантно. Действительно, вследствие последнего соотношения (7.2) это условие можно представить в виде $A_{22} > 0$. Выполнение его зависит от выбора системы координат. В системе координат X', Y' , повернутой на угол θ , это условие таково:

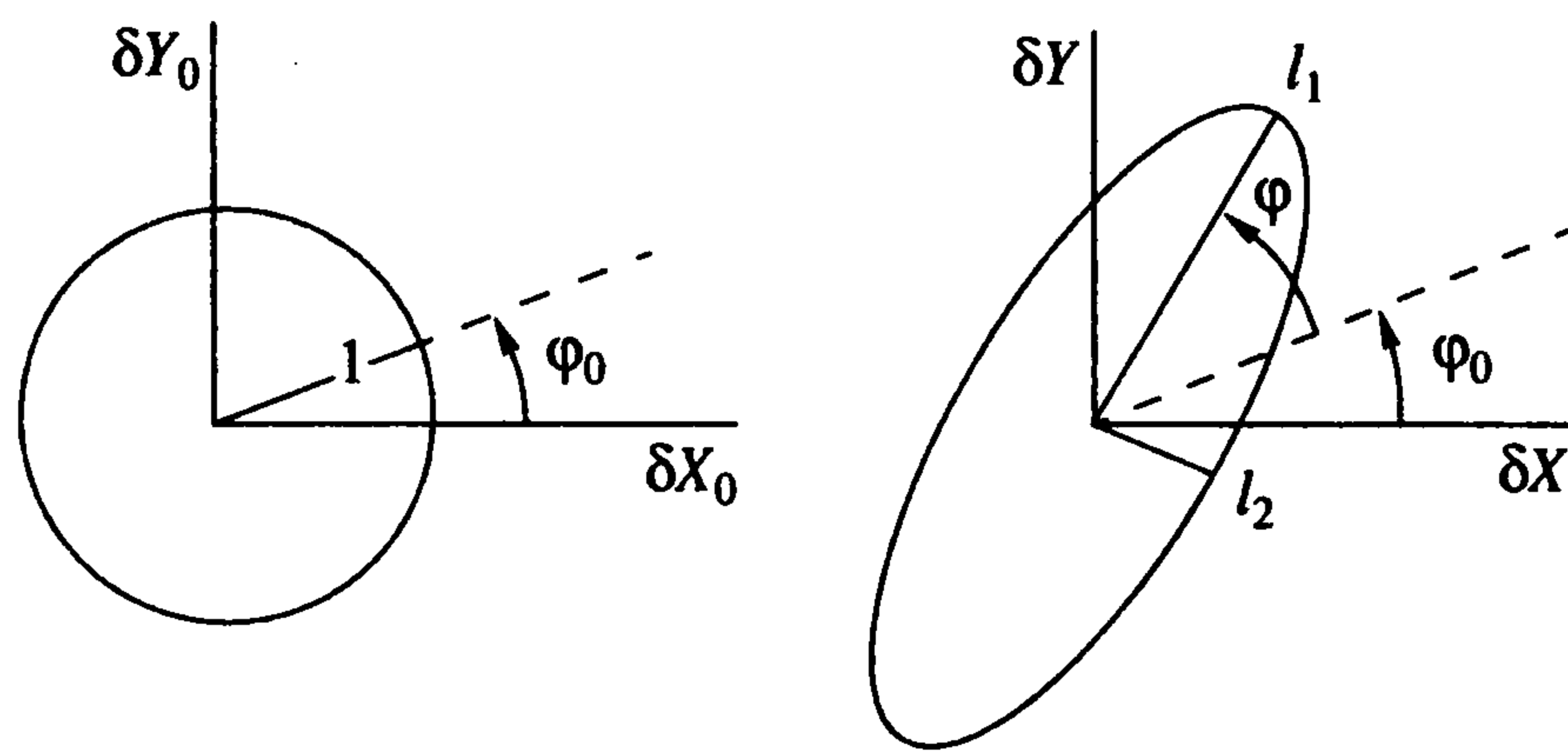
$$\frac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) - \frac{1}{2}(A_{11} - A_{22})\cos 2\theta + \frac{1}{2}(A_{12} + A_{21})\sin 2\theta > 0$$

Зависимость от угла θ будет всегда, кроме случая $(A_{11} - A_{22})^2 + (A_{12} + A_{21})^2 = 0$, или $I_1^2 + I_2^2 = 4$.

Инвариантность условия существования параметрического отображения – первое существенное преимущество перед классическим отображением с производящей функцией.

Если параметрическое отображение и отображение (2.1) вычислены с одинаковой асимптотической точностью, то область существования параметрического отображения существенно шире области существования отображения (2.1). Это второе преимущество параметрического отображения будет продемонстрировано ниже на конкретных примерах.

Характеристический множитель m , определяющий характер устойчивости неподвижной точки, является корнем характеристического многочлена $m^2 - I_1 m + 1 = 0$ и зависит только от I_1 или $J(I_1)$. Как известно, неустойчивость неподвижной точки – одно из важных условий перехода к хаосу. Поэтому при исследовании перехода к хаотическому режиму для двумерных отображений инвариант I_1 и зависящий от него $J(I_1)$ играют основную роль.



Фиг. 1

Выделим из системы стандартного вида (1.2) вырожденный случай

$$\langle H_1 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T H_1 dt = 0$$

В этом случае записанная с точностью до ϵ^3 формула (4.3) упрощается

$$\Psi = \epsilon^2 \int_0^T \left(H_2 - \frac{1}{2} \left\{ H_1, \int_0^t H_1 dt' \right\} \right) dt + O(\epsilon^3)$$

а инвариант J определяется по формуле (2.6) с точностью до пятого порядка по ϵ

$$J = 1 + \frac{1}{4} (\Psi_{xx} \Psi_{yy} - \Psi_{xy}^2) + O(\epsilon^5)$$

Следовательно, и m определяется с этой точностью. В этом случае параметрическое отображение вычисляется проще, причем позволяет с более высокой точностью исследовать устойчивость неподвижной точки отображения и описать переход к хаотическому режиму, как это и показано ниже в гидродинамическом примере.

По известной в аналитической геометрии теореме о полярном разложении матрица A всегда представляется в виде суммы матрицы поворота и симметрической матрицы. В свою очередь поворотом системы координат симметрическая матрица может быть приведена к главным осям. Таким образом, получим

$$A = C(\varphi) C(\varphi_0) \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} C(-\varphi_0), \quad l_1 l_2 = 1, \quad C(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Отображение $\delta X = A \delta X_0$ преобразует единичный круг в эллипс той же площади с осями l_1, l_2 . Угол φ_0 определяет направление волокна в круге $|\delta X_0| = 1$, который при отображении максимально удлиняется. Угол φ определяет поворот этого волокна (фиг. 1). С помощью соотношений (7.1) и (7.3) все перечисленные характеристики отображения можно выразить через элементы матрицы гессiana $\Psi_{xx}, \Psi_{xy}, \Psi_{yy}$.

Наибольшее и наименьшее удлинения волокон таковы:

$$l_1 = R + \sqrt{R^2 - 1}, \quad l_2 = R - \sqrt{R^2 - 1} \quad (7.4)$$

$$R^2 = \frac{1}{4J^2} ((2 - J)^2 + (\Psi_{xx} + \Psi_{yy})^2) + \frac{1}{2}$$

Приведем выражения углов φ и φ_0

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_{21} - A_{12}}{A_{11} + A_{22}}, \quad \operatorname{tg}(\varphi + 2\varphi_0) = \frac{A_{12} + A_{21}}{A_{11} - A_{22}}$$

Выписанные выше характеристики $l_1, \varphi, m_1, \lambda_1$ являются также инвариантами и выражаются через два основных. Угол φ_0 не является инвариантом и зависит от выбора осей координат $\delta X, \delta Y$.

8. Преимущества параметрического отображения. В параметрическом методе функция $\Psi(t, x, y)$ играет роль производящей функции. Так же как и в методе производящих функций, $\Psi(t, x, y)$ определяется из уравнения типа Гамильтона – Якоби. Любая конечная сумма первых членов ряда по ε для Ψ будет давать отображение, сохраняющее фазовый объем точно при условии $J > 1$.

Однако выше был отмечен ряд преимуществ параметрического метода перед методом производящих функций. Они состоят в следующем.

1°. Через производящую функцию нельзя выразить отображения очень простого вида. Например, через $S(X_0, Y)$ нельзя выразить поворот на 90° (отображение $X = Y_0, Y = -X_0$). Это отображение можно выразить через производящую функцию с другой парой переменных, но тогда через нее нельзя представить тождественное отображение. Параметрическое представление в этом смысле более универсально. Для тождественного преобразования $\Psi = 0$, а для поворота на 90° $\Psi = X^2 + Y^2$.

2°. Условие разрешимости (2.2), вообще говоря, зависит от выбора декартовой системы координат X, Y , тогда как в параметрическом методе условие $J > 0$ инвариантно по отношению к поворотам координат X, Y .

3°. В приближениях одинаковой по малому параметру ε точности диапазон изменения параметра ε , удовлетворяющего условию $J > 0$, существенно шире по сравнению с диапазоном изменения параметра ε , удовлетворяющего условию $1 + \partial^2 S / \partial X_0 \partial Y > 0$.

4°. Коэффициенты Ψ_n ряда $\Psi = \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon^2 \Psi_2 + \dots$ существенно меньше коэффициентов ряда S_n для производящей функции.

5°. Для автономной системы функция Ψ представляется рядом по нечетным степеням ε .

6°. С точностью до ε^3 отображение за время t и усредненный гамильтониан связаны простым соотношением $\Psi = T\bar{H}(x, y)$.

Покажем преимущества параметрического метода на примере, в котором отображение находится точно.

Вынужденные колебания осциллятора. Гамильтониан имеет вид

$$H = \varepsilon \left[\frac{1}{2} (X^2 + Y^2) + Xb \sin(t_0 + t) \right]$$

Система уравнений точно интегрируется, и координаты X_n, Y_n точек последования через период в моменты времени $t_n = 2\pi n$ таковы:

$$X_n - X_c = (X_{n-1} - X_c) \cos(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c) \sin(2\pi\varepsilon)$$

$$Y_n - Y_c = - (X_{n-1} - X_c) \sin(2\pi\varepsilon) + (Y_{n-1} - Y_c) \cos(2\pi\varepsilon)$$

$$X_c = \frac{b\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \sin t_0, \quad Y_c = \frac{b\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \cos t_0$$

Точки последования лежат на окружности с центром X_c, Y_c с угловым расстоянием друг от друга $2\pi\varepsilon$.

Параметрический метод дает

$$\Psi(x, y) = \operatorname{tg} \pi\varepsilon [(x - X_c)^2 + (y - Y_c)^2], \quad J = 1 / \cos^2(\pi\varepsilon) > 0$$

Согласно методу производящих функций, имеем

$$S(X_0, Y) = \frac{1 - \cos 2\pi\epsilon}{\cos 2\pi\epsilon} (X_0 - X_c)(Y - Y_c) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\pi\epsilon [(X_0 - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2]$$

$$1 + S_{XY} = \frac{1}{\cos 2\pi\epsilon} > 0$$

Из рассмотренного примера видно:

а) формула для Ψ короче, чем для S ;

б) радиусы сходимости рядов по степеням ϵ для Ψ в два раза больше радиусов сходимости рядов для S (в параметрическом методе допускаются повороты до 180° , а в методе производящих функций только до 90°);

в) коэффициенты ряда Ψ_n примерно в 2^n раз меньше коэффициента S_n ; соответственно для остаточных членов этих рядов r_n и R_n имеем $r_n \approx 2^{-n} R_n$.

Все преимущества 1° – 6° легко проверяются.

Пример, который рассматривается ниже, представляет собой довольно сложную гидродинамическую систему, в которой параметрическим методом удастся описать переход к динамическому хаосу для достаточно больших значений параметра. Показывается, что в этой области параметров классический метод построения отображений Пуанкаре принципиально неприменим.

9. Движение частиц вязкой жидкости в тонком слое. Рассматривается плоскопараллельное медленное течение несжимаемой вязкой жидкости в тонком слое, ограниченном плоским дном $Y = 0$, прямолинейными боковыми стенками $X = 0$, $X = 2\pi$ и верхней границей, деформирующейся по заданному периодическому закону $Y = 1 + \epsilon h(t, X)$. На нижней границе $Y = 0$ принято условие прилипания, а на верхней границе – условие непроницаемости $v_y = \epsilon \partial h / \partial t + v_x \partial h / \partial x$ и условие, налагаемое на касательную составляющую $v_x = 3\epsilon^2 \alpha (1 - \cos x)$ (фиг. 2). На боковых стенках расход равен нулю. При $\alpha = 0$ эта задача изучена ранее [12]. Аналогично [12] определяется гамильтониан системы (функция тока) в приближении тонкого слоя

$$H(t, X, Y) = \epsilon q(3\tilde{Y}^2 - 2\tilde{Y}^3) - 3\epsilon^2 \alpha (\tilde{Y}^2 - \tilde{Y}^3)(1 - \cos X) \quad (9.1)$$

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial X = 0, \quad q(0) = q(2\pi) = 0$$

$$\tilde{Y} = Y / (1 + \epsilon h(t, X))$$

Здесь X, Y – безразмерные координаты, координата $X/(2\pi)$ отнесена к длине слоя, Y – к его толщине. Безразмерная функция расхода $\epsilon q(t, X)$ через сечение $X = \text{const}$ выражается через функцию деформации слоя ϵh с помощью уравнения сохранения массы.

Движение частиц жидкости определяется из решения системы уравнений Гамильтона с гамильтонианом (9.1). Исследование системы при $\alpha = 0$ [12] показало, что перехода к хаосу до $\epsilon < 0.8$ нет.

Учет малой порядка ϵ^2 скорости v_x на границе приводит к качественным изменениям движения частиц жидкости.

Для исследования системы удобно использовать каноническую замену

$$X, Y, H(t, X, Y) \rightarrow \tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{H}(t, \tilde{X}, \tilde{Y})$$

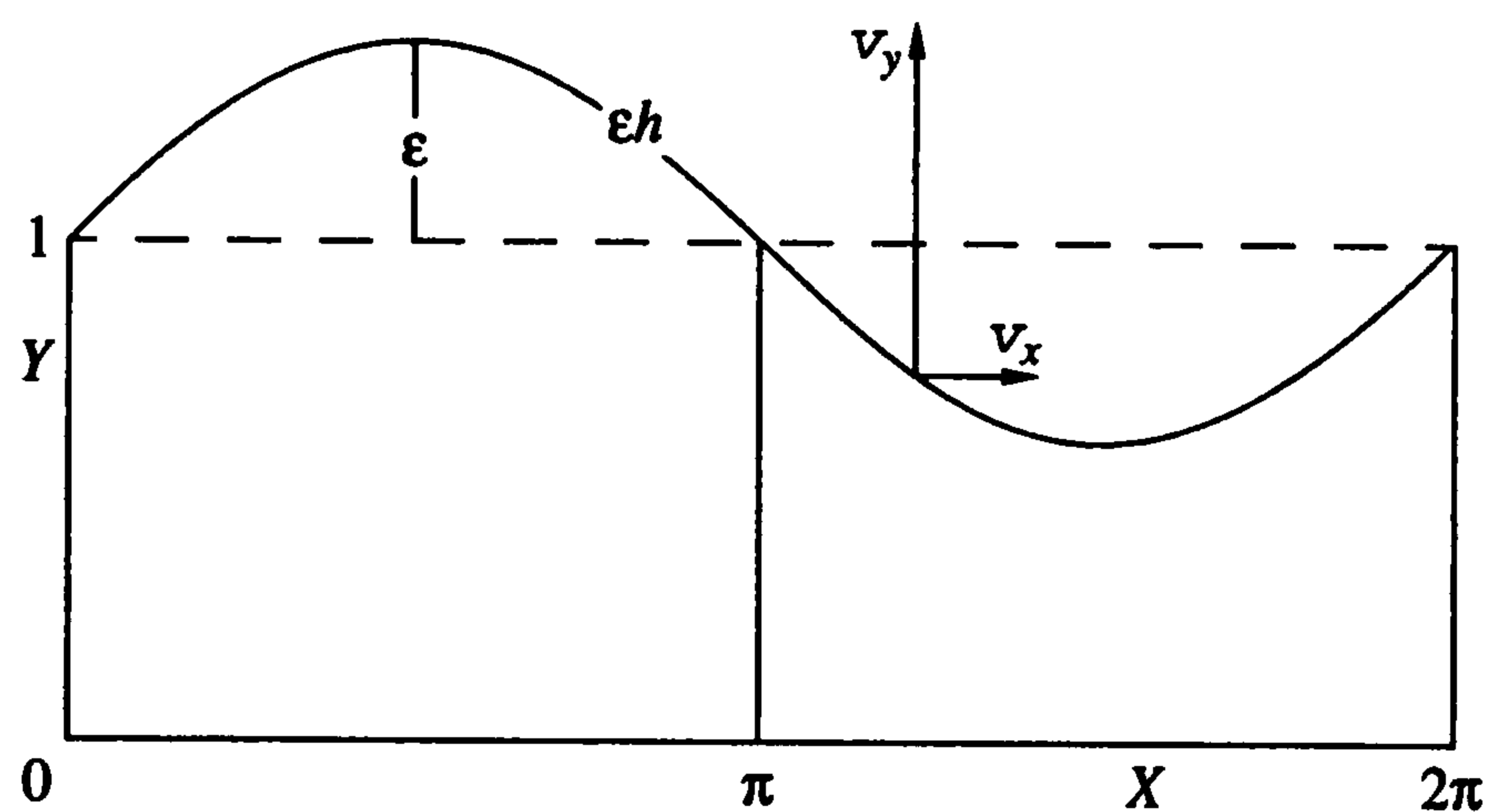
с производящей функцией

$$S(t, X, \tilde{Y}) = X\tilde{Y} + \epsilon \tilde{Y} \int_0^X h(t, X) dX$$

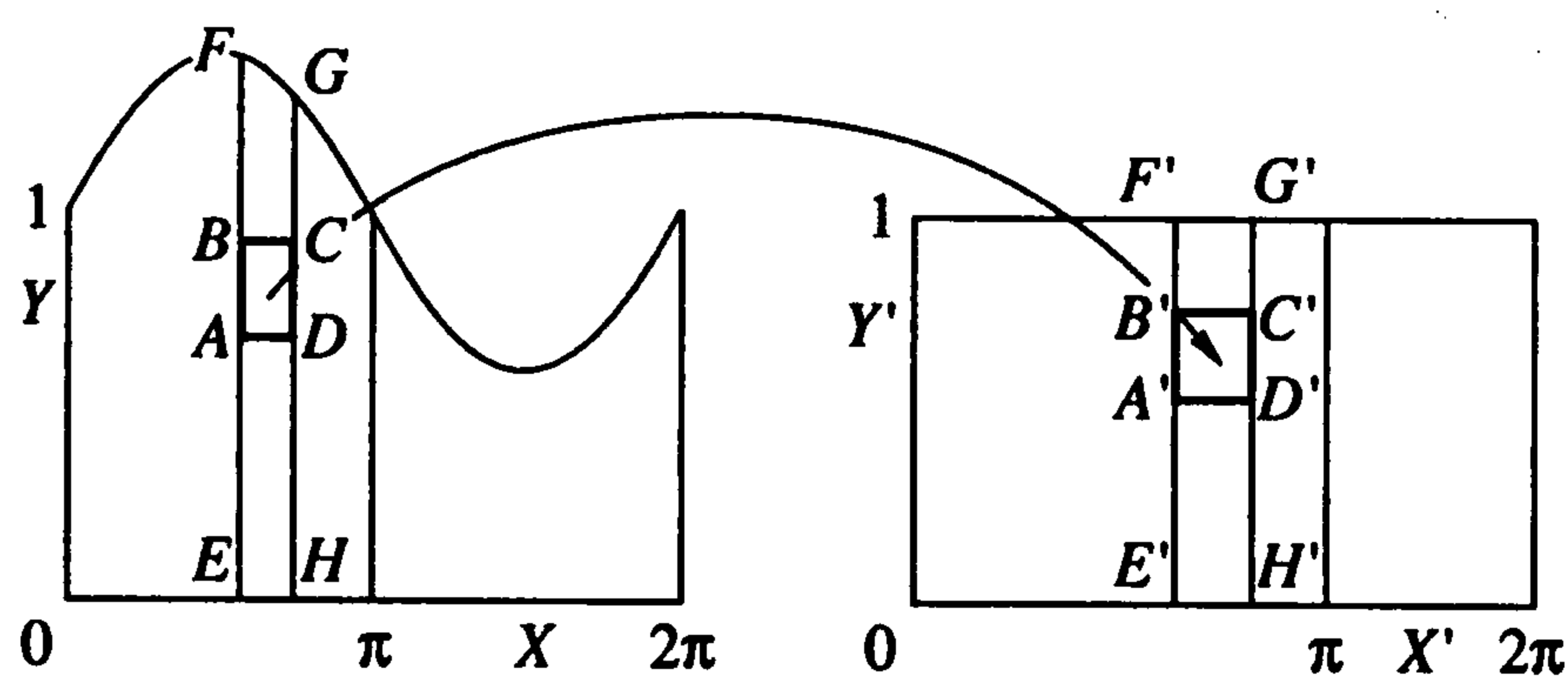
Переменные и гамильтониан преобразуются так:

$$\tilde{X} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{Y}} = X + \epsilon \int_0^X h(t, X) dX, \quad Y = \frac{\partial S}{\partial X} = Y(1 + \epsilon h(t, X))$$

$$\tilde{H}(t, \tilde{X}, \tilde{Y}) = H + \partial S / \partial t = H - \epsilon q \tilde{Y}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Удобство замены состоит в том, что в переменных $\tilde{X}, \tilde{Y}$ система имеет гамильтонову форму, а область переменных – фиксированный прямоугольник $\tilde{X} \in (0, 2\pi), \tilde{Y} \in (0, 1)$ (фиг. 3).

Исследование системы можно провести аналитически, при общем законе деформирования. Отображающую функцию с точностью до ϵ^3 можно вычислить по формуле (4.3)

$$\Psi(x, y) = 6\pi\epsilon^2 [2\langle qh \rangle (2y - 1)(1 - y)^2 y^2 - \alpha(1 - y)y^2(1 - \cos x)] \quad (9.2)$$

где q находится из уравнения сохранения массы

$$\partial h / \partial t + \partial q / \partial X = 0, \quad q(0) = q(2\pi) = 0$$

При выводе формулы (9.2) используются равенства

$$\int_0^T \left(h_t \int_0^{\tilde{X}} h dX \right) dt = - \int_0^T \left(h \int_0^{\tilde{X}} h_t dX \right) dt = \int_0^T h q dt$$

Ограничимся исследованием частного случая деформирования по закону бегущей волны $h = \sin(X - t)$. Из уравнения сохранения массы вычисляем

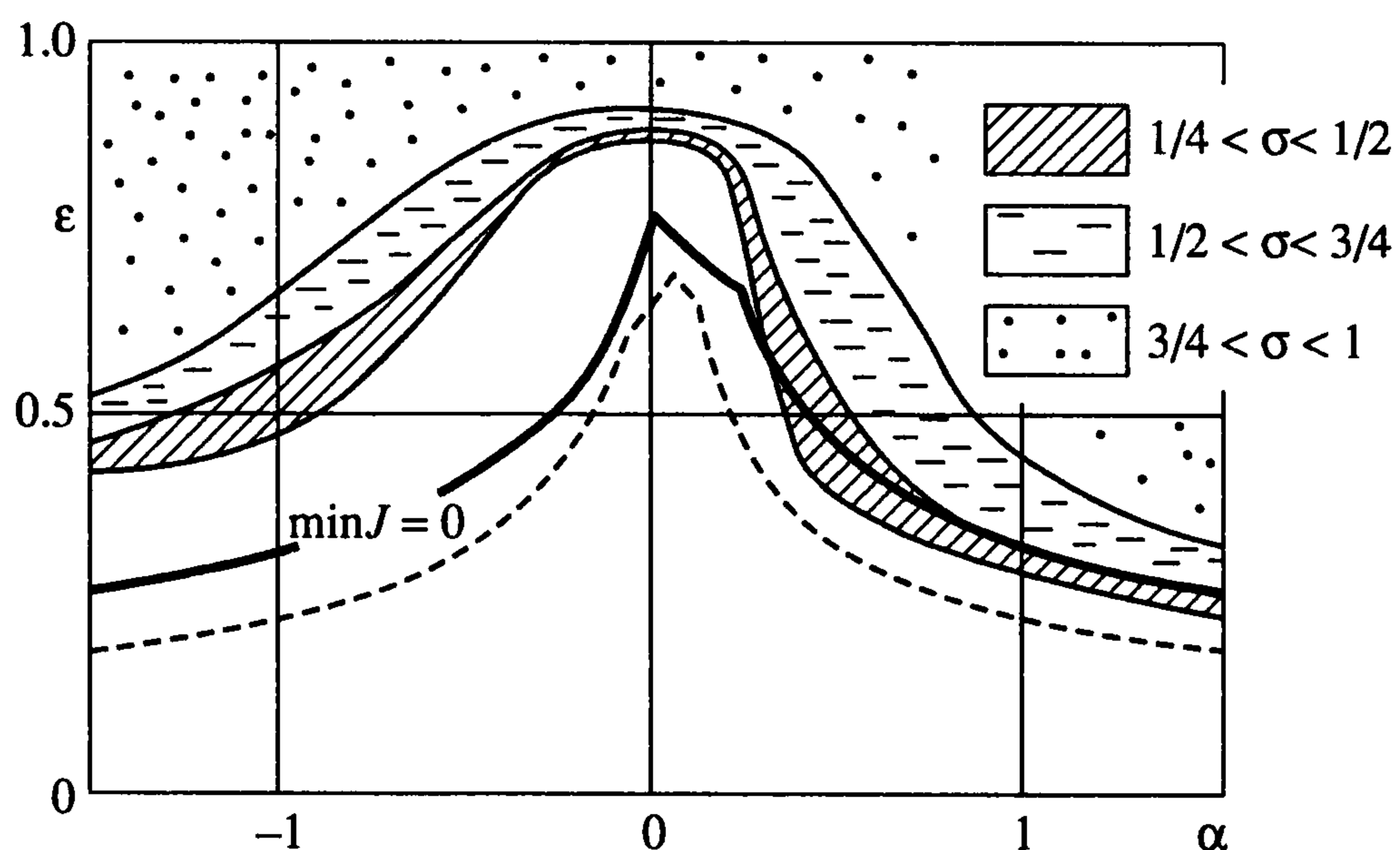
$$q = \sin(X - t) + \sin t, \quad \langle qh \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q h dt = \frac{1}{2} (1 - \cos X)$$

и, подставляя в выражение (9.2), получаем

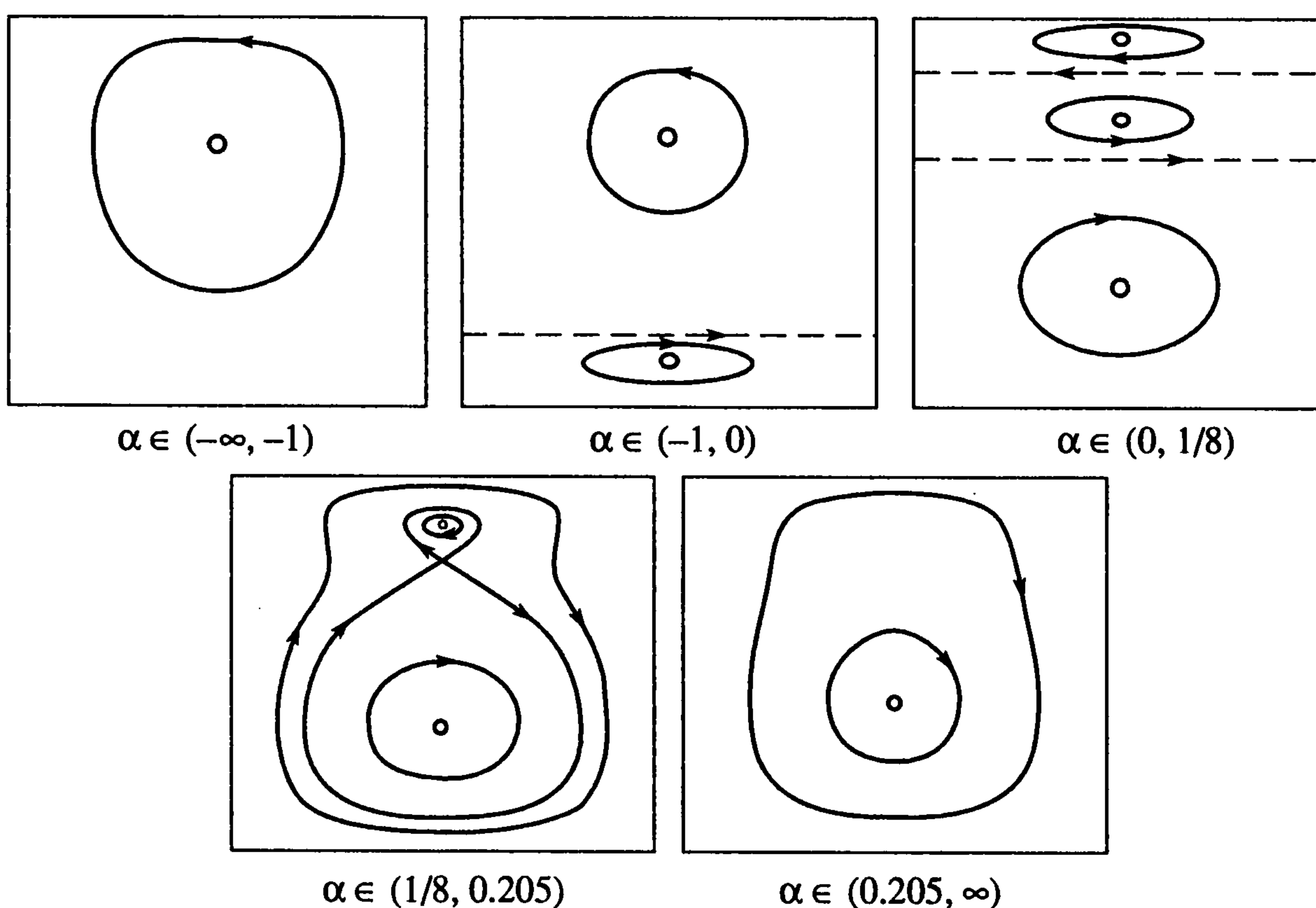
$$\Psi(x, y) = 6\pi\epsilon^2 F(y, \alpha)(1 - \cos X) \quad (9.3)$$

$$F(y, \alpha) = (2y - 1)(1 - y)^2 y^2 - \alpha(1 - y)y^2$$

$$J = 1 + 9\pi^2 \epsilon^4 [F(y, \alpha)F''(y, \alpha) \cos x(1 - \cos x) - (F'(y, \alpha) \sin x)^2] > 0$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Переменные x, y занимают область такого же прямоугольника $x \in (0, 2\pi), y \in (0, 1)$. Таким образом, для исходной системы получено двухпараметрическое семейство отображений.

Если $\alpha < 0.236$, то якобиан J достигает наименьшего значения при $\cos X = -1$, а если $\alpha > 0.236$, то при $\cos X = 0$. Таким образом, область применимости отображения (9.3) такова:

$$\min J = 1 - 9\pi^2 \epsilon^4 \max(2F(y, \alpha)F''(y, \alpha)) > 0 \text{ при } \alpha < 0.236$$

$$\min J = 1 - 9\pi^2 \epsilon^4 \max(F'(y, \alpha))^2 = 1 - 9\pi^2 \epsilon^4 \alpha^2 > 0 \text{ при } \alpha > 0.236$$

Исследование функции $F'(y, \alpha)$ на максимум показывает, что при $\alpha \in (-\infty, -1/2) \cup (1/8, \infty)$ функция $|F'(y, \alpha)|$ достигает наибольшего значения, равного α , на

границе $y = 1$. При остальных α функция $|F'(y, \alpha)|$ достигает наибольшего значения в промежутке $y \in (0, 1)$.

Область $\min J > 0$ на плоскости параметров (α, ϵ) изображена на фиг. 4. Граница определяется уравнением $\min J = \Phi(\epsilon, \alpha) = 0$ и представляет собой кусочно-гладкую линию.

Для сравнения приведем асимптотические формулы отображения, полученные по методу производящих функций, в том же приближении, что и (9.3). Отображение будет определяться по формулам (2.1) с функцией $S(X_0, Y) = \Psi(X_0, Y)$, где функция Ψ та же, что и в (9.3). Условие применимости отображения таково:

$$\min(1 + \Psi_{X_0 Y}) = 1 + 6\pi\epsilon^2 \min(F'(Y, \alpha)) \sin X_0 > 0 = 1 - 6\pi\epsilon^2 \max |F'(Y, \alpha)| > 0$$

При $\alpha \in (-\infty, -1/2) \cup (1/8, \infty)$ получаем $6\pi\epsilon^2 |\alpha| < 1$. Граница области, определяемая по методу производящих функций, приведена на фиг. 4 штриховой линией. Она также вычисляется аналитически, представляет собой кусочно-гладкую линию и расположена значительно ниже границы области существования параметрического отображения $\min J = 0$.

До хаотического режима ($\epsilon < \epsilon_0(\alpha)$, $\epsilon_0(\alpha)$ – критическое значение параметра ϵ) фазовые портреты ТПП легко исследуются с помощью усредненного гамильтониана

$$\bar{H} = 3\epsilon^2 F(Y, \alpha)(1 - \cos X) + O(\epsilon^3)$$

вычисленному по формулам (6.6) и (9.3).

ТПП лежат на инвариантных кривых $F(Y, \alpha)(1 - \cos X) = \text{const}$. Фазовые портреты ТПП имеют пять топологически различных структур, изображенных на фиг. 5.

Структура 1 при $\alpha \in (-\infty, -1)$ – движение против часовой стрелки по замкнутым траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 2 при $\alpha \in (-1, 0)$ – две области движений, разделенных сепаратрисой $y = 3/4 - \sqrt{1 - 8\alpha}/4$, обозначенной на фиг. 5 штриховой линией. В верхней области – движение против часовой стрелки по траекториям с одной неподвижной точкой. В нижней области – движение по часовой стрелке по траекториям с одной неподвижной точкой.

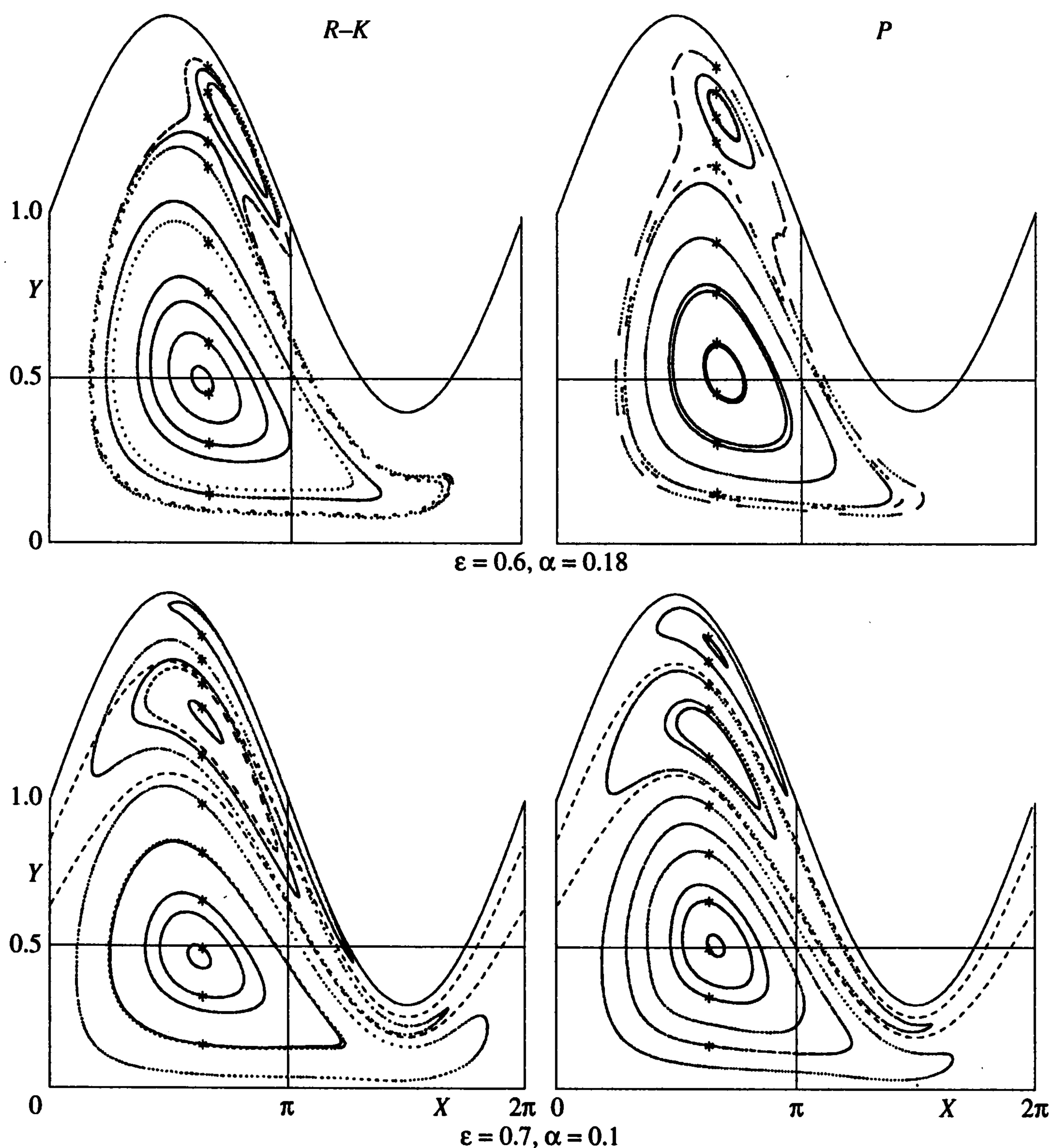
Структура 3 при $\alpha \in (0, 1/8)$ – три области движений, разделенных двумя сепаратрисами $y = 3/4 \pm \sqrt{1 - 8\alpha}/4$, обозначенных на фиг. 5 штриховыми линиями. В верхней и нижней областях – движение по часовой стрелке по траекториям с одной неподвижной точкой в каждой области. В средней области – движение против часовой стрелки по траекториям с одной неподвижной точкой.

Структура 4 при $\alpha \in (1/8, 0.205)$ – движение в трех областях, разделенных сепаратрисами. Это единственный случай, в котором есть неподвижная точка гиперболического типа, соответствующая неустойчивой периодической траектории. Все остальные неподвижные точки в этом и других случаях соответствуют устойчивым периодическим траекториям.

Структура 5 при $\alpha \in (0.205, \infty)$ – движение по часовой стрелке по замкнутым траекториям с одной неподвижной точкой.

При $\epsilon < \epsilon_0(\alpha)$ ТПП, найденные путем непосредственного решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом (9.1), движутся по траекториям, топология которых соответствует одной из пяти перечисленных выше структур. Тип структуры определяется интервалом, в котором находится параметр α .

При превышении критического значения параметра ϵ ТПП с одним и тем же начальным положением может заполнить некоторую область площади S_i . Совокупность этих областей будем называть областью хаотического движения. Она имеет площадь $S = \sum S_i$. Мерой хаоса условимся считать отношение $\sigma = S/S_0$, где S_0 – площадь всей



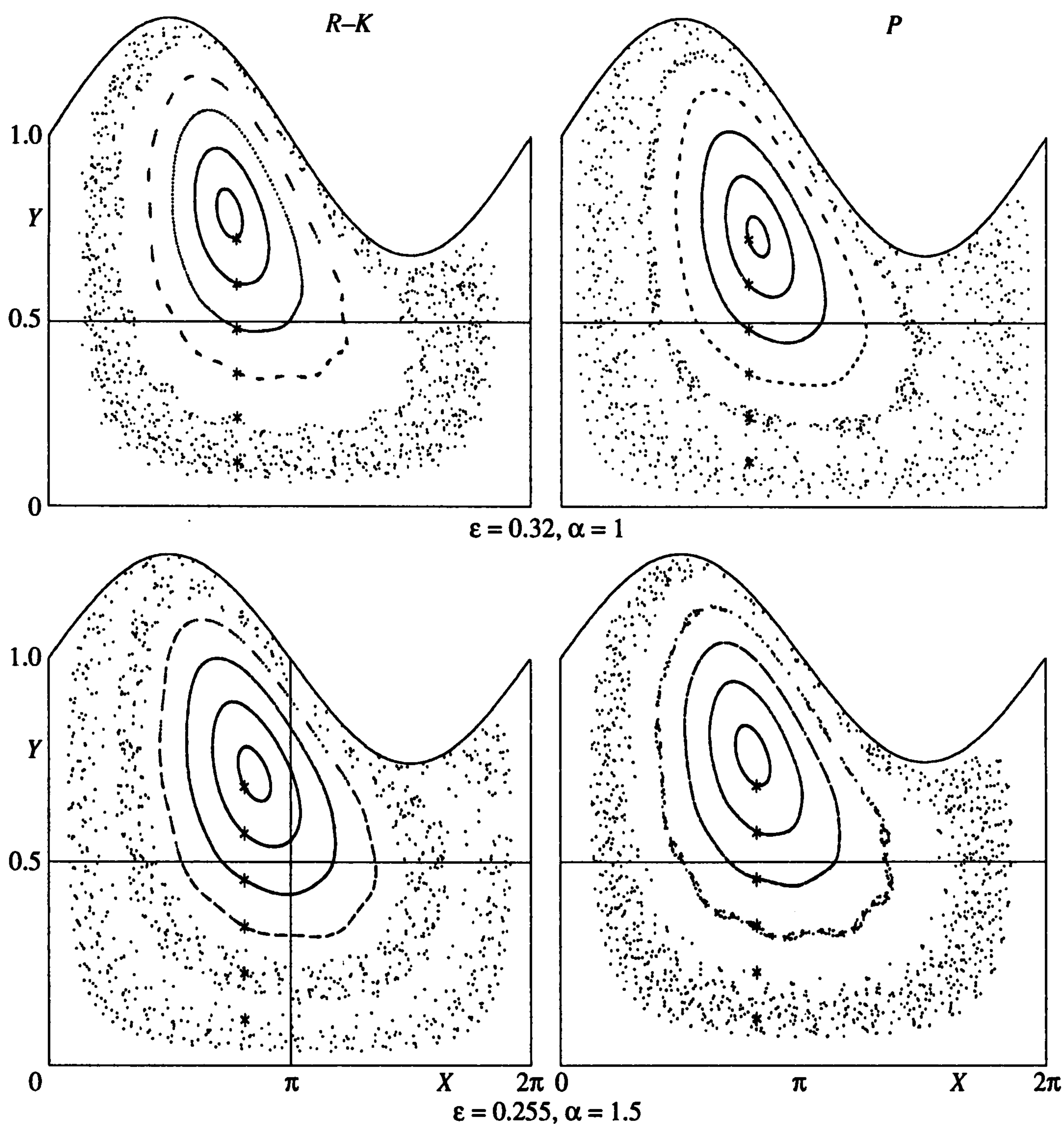
Фиг. 6

области движения. На фиг. 4 в области двух параметров ϵ , α изображены области хаотического движения с различной мерой хаоса. Косыми штрихами помечена область с мерой хаоса в интервале $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, горизонтальными штрихами – область с мерой хаоса в интервале $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, точками – с мерой хаоса более $\frac{3}{4}$, и, наконец, чистый фон соответствует области с мерой хаоса менее $\frac{1}{4}$.

Расчеты ТПП методом отображений (Р) с функцией (9.3) в области существования отображения $J > 0$ неотличимы от расчета уравнений Гамильтона методом Рунге–Кутты (R–K).

Примеры расчетов показаны на фиг. 6–8 при разных значениях ϵ , α . Начальные положения точек обозначены крестиками. Точками показаны их положения в течение 500 периодов.

На фиг. 6 представлены расчеты положения ТПП до перехода к хаосу. Топологическая структура ТПП на фиг. 6 соответствует топологической структуре 4 ($\alpha \in (\frac{1}{8},$

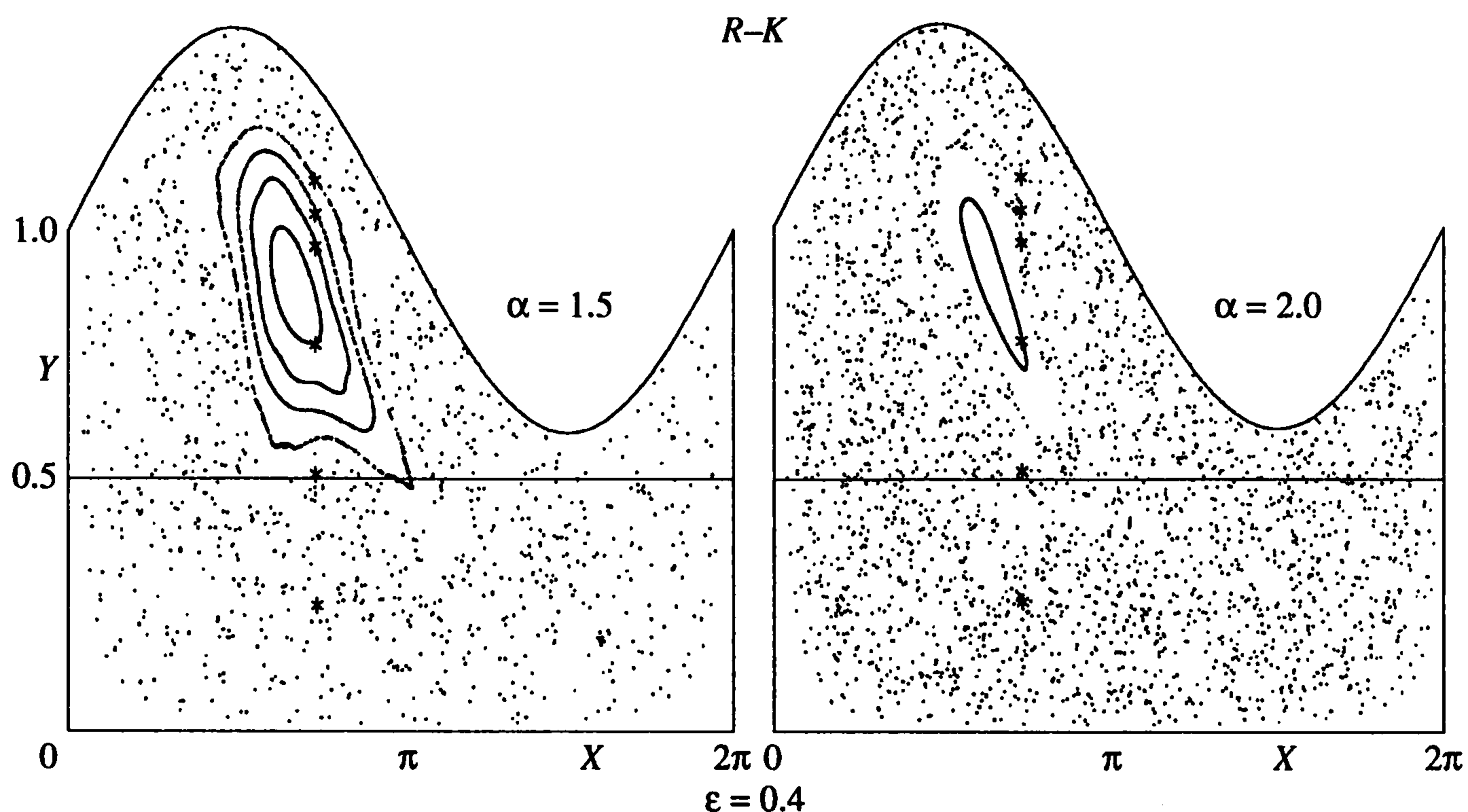


Фиг. 7

0.205)) (верхняя часть фиг. 6) и структуре 3 ($\alpha \in (0, 1/8)$) (нижняя часть). В нижней части фиг. 6 штриховыми линиями обозначены сепаратрисы $\tilde{Y} = 3/4 \pm \sqrt{1 - 8\alpha} / 4$.

Пример расчетов при переходе к хаосу показан на фиг. 7. Все обозначения такие же, как на фиг. 6. Топологическая структура точек Пуанкаре соответствует случаю $\alpha > 0.205$. Обе фигуры демонстрируют хорошее согласие расчета по параметрическому методу и непосредственного численного расчета исходных дифференциальных уравнений, тогда как асимптотические формулы по методу производящих функций при этих значениях параметров α и ϵ выходят за пределы области применимости.

На фиг. 8 представлены численные расчеты ТПП, когда мера хаоса превышает $3/4$. Эта область параметров лежит вне области применимости отображения с функцией (9.3). При этих значениях параметров следует пользоваться параметрическим отображением в следующем приближении. Методом производящих функций получить отображение в этой области параметров невозможно ни в каком приближении, так как в окрестности неподвижной точки в этом случае ТПП совершают полный оборот менее чем за четыре периода.



Фиг. 8

Рассмотренный пример показывает возможность аналитического описания перехода к хаосу в достаточно сложных гидродинамических системах. Параметрический метод построения отображения Пуанкаре оказывается особенно полезным в задачах со многими параметрами. Вычисленные таким способом отображения имеют допустимую точность даже в том диапазоне параметров, когда классическим методом отображение Пуанкаре получить принципиально невозможно.

Автор благодарит Д.М. Климова за внимание к работе и В.Ф. Журавлева за обсуждение результатов работы и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00567).

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 408 с.
3. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
4. Lichtenberg A.J., Leiberman M.A. Regular and Stochastic Motion. Berlin, etc.: Springer, 1983 = Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
5. Хаотические системы // Труды ин-та инженеров по электронике и радиоэлектронике. 1987. Т. 75. № 8. 169 с.
6. Shuster H. Deterministic Chaos. Weinheim: Physik-Verlag, 1984 = Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 237 с.
7. Ottino J.M. The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport. Cambridge: Univ. Press, 1989. 364 p.
8. Crownover R.M. Introduction to Fractals and Chaos. Boston; London: Jones and Bartlett, 1994 = Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 350 с.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

10. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988, 326 с.
11. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
12. Петров А.Г. О движении частиц несжимаемой среды в области с периодически изменяющейся границей // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 12–19.
13. Courant R., Hilbert D. Methoden der Mathematischen Physik. Bd. 2. Berlin: Springer, 1937 = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. 544 с.
14. Giacaglia G.E.O. Perturbation Methods in Non-Linear Systems. Berlin, etc. Springer, 1972 = Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
15. Петров А.Г. Об усреднении гамильтоновых систем с периодическим по времени гамильтонианом // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 4. С. 483–488.
16. Петров А.Г. Об усреднении гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С. 19–33.
17. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.

Москва
e-mail: petrov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
23.IV.2002