

УДК 530.1 + 532.5

© 2002 г. Н.В. Денисова, В.В. Козлов

**СТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ,
РЕЗОНАНСЫ И ЛАГРАНЖЕВА ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

Развивается метод, который позволяет установить свойство нерегулярности движения частиц жидкости (называемое хаотической адвекцией или лагранжевой турбулентностью) для типичных стационарных течений. Метод основан на разложении решений уравнений движения сплошной среды в ряды по степеням малого параметра и использовании условия разрушения инвариантных резонансных торов при добавлении возмущения. Показано, что поле скоростей, определяемое как решение уравнений Бюргерса, в общем случае порождает нерегулярную динамическую систему. Для идеальной баротропной жидкости в потенциальном силовом поле предложенный метод дает известное необходимое условие хаотизации: поле скорости коллинеарно своему ротору. Особое внимание уделено исследованию хаотизации типичных стационарных течений теплопроводного совершенного газа.

1. Регулярные и хаотические стационарные течения. В области D трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$ рассмотрим стационарное течение жидкости. Ниже в основном рассматриваются течения, 2π -периодические по координатам x и y ; в этом случае областью D служит прямое произведение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, где $\mathbb{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ – двумерный тор. Стационарное поле скоростей v находится как не зависящее явно от времени t решение уравнений движения сплошной среды. Примеры конкретных моделей сплошных сред будут рассмотрены ниже.

Движение частиц жидкости описывается автономной динамической системой

$$dx/dt = v(x), \quad x \in D. \quad (1.1)$$

Пусть g' – ее фазовый поток. Действие группы g' на области D – это *адвекция* (перенос частиц жидкости). Хаотическую адвекцию принято называть *лагранжевой турбулентностью*.

Строгое исследование лагранжевой турбулентности предполагает наличие точного определения свойства хаотичности динамической системы (1.1). Однако в силу ряда причин невозможно сформулировать универсальное свойство хаотичности. Хаотичность естественно противопоставляется регулярному поведению системы (1.1). Имеются различные неэквивалентные подходы к определению регулярной динамической системы (см., например, [1]). Их объединяет наличие нетривиальных тензорных инвариантов. Простейшие среди них – интегралы, поля симметрий и интегральные инварианты.

Напомним, что локально непостоянная функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *интегралом* системы (1.1), если

$$df/dt = (\partial f / \partial x, v) = 0$$

Область течения расслоена на инвариантные интегральные поверхности $N_c = \{x \in D : f(x) = c\}$. Если поверхность N_c компактна (т.е. ограничена) и на ней скорость v нигде не обращается в нуль, то эта поверхность топологически эквивалентна двумерному тору.

Поле w называется *полем симметрий*, если $[v, w] = 0$, где $[\cdot, \cdot]$ – скобка Якоби. Интерес представляют нетривиальные поля симметрий, когда векторы v и w не коллинеарны. Фазовый поток поля w переводит решения системы (1.1) в решения той же системы. Более общим является *вмороженное поле направлений* w ; оно определяется условием $[v, w] = \lambda w$, где λ – некоторая функция, заданная в области D . Поток g' переводит семейство интегральных кривых поля w в себя (см. [2, 3]). Свойства симметрии течения жидкости играют существенную роль в теории турбулентности [4].

Дифференциальная 1-форма ω порождает *интегральный инвариант*, если

$$I(t) = \int_{g^t \gamma} \omega = \text{const}$$

для всех замкнутых циклов γ . Надо, конечно, еще предположить, что $d\omega \neq 0$ (ω не сводится к полному дифференциалу). Иначе $I(t) \equiv \text{const}$.

Выразительным примером регулярного течения служит стационарное течение баротропной невязкой жидкости в потенциальном силовом поле. Оно допускает интеграл (интеграл Бернулли), поле симметрий ($w = \rho^{-1}(\text{rot } v)$, где ρ – плотность жидкости) и интегральный инвариант (циркуляция жидкости по замкнутому жидкому контуру). Поле симметрий найдено в [5]; в случае однородной жидкости ($\rho \equiv \text{const}$) оно было отмечено ранее [6].

Чтобы интеграл Бернулли и указанное поле симметрий не были тривиальными, надо потребовать, чтобы поле v не было коллинеарно своему ротору. Это условие существенно. Например, для известного АВС-течения оно не выполнено, и это течение в общем случае не регулярно.

Было показано [7], что типичные стационарные течения вязкой жидкости не регулярны и обладают хаотическими свойствами. С другой стороны, как известно, турбулентность возникает при больших числах Рейнольдса. При фиксированных характеристических масштабах и скорости течения это эквивалентно уменьшению вязкости. Однако, как указано выше, при нулевой вязкости типичные стационарные течения жидкости становятся регулярными.

2. Условия существования тензорных инвариантов. В малой окрестности любой неособой точки система (1.1) имеет все тензорные инварианты: непостоянный интеграл, нетривиальное поле симметрий и интегральный инвариант. Ситуация резко меняется, когда рассматривается задача о существовании инвариантов в целом (заданных во всей области течения D). Оказывается, динамические системы общего вида не имеют нетривиальных глобальных инвариантов. Это обстоятельство имеет существенное значение в механике сплошной среды.

Пример. Пусть жидкость несжимаемая. Тогда из уравнения неразрывности вытекает, что плотность ρ – первый интеграл. Если уравнения (1.1) не допускают непостоянных интегралов, то $\rho \equiv \text{const}$ (т.е. жидкость будет однородной). В случае регулярных течений, вообще говоря, $\rho \neq \text{const}$.

Поиск конструктивных условий регулярности или хаотичности динамической системы (1.1) представляет весьма сложную задачу. Она обсуждалась [8] для динамических систем классической динамики.

Ограничимся рассмотрением в области $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ автономных систем следующего вида:

$$dx/dt = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots; \quad x = (x, y, z), \quad v_i = (u_i, v_i, w_i), \quad i = 0, 1, \dots, \quad w_0 \equiv 0 \quad (2.1)$$

Здесь u_i, v_i и w_i – аналитические функции, 2π -периодически зависящие от x и y ; u_0 и v_0 зависят лишь от "медленной" переменной z ; ε – малый параметр. Системы такого вида часто встречаются в теории линейных колебаний. При $\varepsilon = 0$ будем иметь вполне интегрируемую (следовательно, регулярную) динамическую систему: ее фазовое прост-

ранство расслоено на инвариантные торы $z = \text{const}$, заполненные условно-периодическими траекториями с частотами $u_0(z)$ и $v_0(z)$.

Тензорные инварианты системы (2.1) естественно искать в виде рядов по степеням ε , коэффициенты которых однозначны и аналитичны в области $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$. Например, интеграл имеет вид $f_0 + \varepsilon f_1 + \dots$, где f_k – аналитические функции, 2π -периодически зависящие от x и y .

Пусть $\sum W_{mn}(z)e^{i(mx+ny)}$ – ряд Фурье функции w_1 . Множеством Пуанкаре $\mathbb{P}$ назовем совокупность точек $z \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$mu_0(z) + nv_0(z) = 0, \quad W_{mn}(z) \neq 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0) \quad (2.2)$$

В общем случае множество $\mathbb{P}$ всюду плотно заполняет числовую прямую $\mathbb{R} = \{z\}$. Соотношения вида (2.2) с целыми m, n называются *резонансами*. Невозмущенную систему (когда $\varepsilon = 0$) назовем *невырожденной*, если $mu_0(z) + nv_0(z) \neq 0$ для всех целых m, n , не равных одновременно нулю.

Укажем простое достаточное условие невырожденности: $u'_0 v_0 - u_0 v'_0 \neq 0$. Штрих означает производную по z .

Теорема 1. Предположим, что невозмущенная система невырождена, а множество Пуанкаре имеет хотя бы одну конечную предельную точку. Тогда система (2.1) не допускает нетривиальных интегралов и замороженных полей направлений, аналитических по ε . Если, кроме того, $W_{00}(z) \neq 0$, то система (2.1) не допускает нетривиальных интегральных инвариантов.

Отсутствие интегралов вытекает из более общих результатов [8], являющихся обобщением теории Пуанкаре о препятствиях к интегрируемости гамильтоновых систем, мало отличающихся от вполне интегрируемых [9]. Были установлены [3, 7] случаи несуществования замороженных полей направлений и интегральных инвариантов. Отметим существенный момент: условия теоремы 1 гарантируют отсутствие нетривиальных инвариантов, которые можно представить в виде *формальных* (не обязательно сходящихся) рядов по ε .

Механизм хаотизации системы (2.1) состоит в том, что типичные резонансные торы разрушаются при добавлении возмущения: на месте таких торов возникают "островки" с хаотическим поведением траекторий, причем при малых значениях ε их размеры, как правило, увеличиваются с ростом ε ; кроме того, типичный размер "островков" неустойчивости уменьшается по мере увеличения порядка резонанса $|m| + |n|$. При некоторых дополнительных условиях на месте разрушающихся резонансных торов появляются пары *невырожденных* периодических траекторий; одно из них – эллиптическое, а другое – гиперболическое. Сепаратрисы гиперболических периодических траекторий в пересечении образуют запутанную сеть, в окрестности которой имеются квазислучайные траектории (см. примеры из гидродинамики [7]).

Укажем более простое достаточное условие отсутствия первых интегралов невырожденной системы (2.1), аналитически зависящих от параметра ε :

$$\langle w_1 \rangle = W_{00}(z) \neq 0 \quad (2.3)$$

Действительно, пусть $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots$ – непостоянный первый интеграл. Ввиду предположения о невырожденности системы (2.1) при $\varepsilon = 0$, функция f_0 не зависит от угловых координат x, y [8]. В первом приближении по ε условие $df/dt = 0$ принимает вид

$$f'_0 w_1 + u_0 \partial f_1 / \partial x + v_0 \partial f_1 / \partial y = 0$$

После усреднения по угловым координатам x, y получаем уравнение $f'_0 W_{00} = 0$. Поскольку в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то из условия (2.3)

получаем $f'_0 = 0$. Следовательно, $f_0 \equiv \text{const}$ и функция $(f - f_0)/\varepsilon = f_1 + \varepsilon f_2 + \dots$ будет первым интегралом системы (2.1). Снова получаем, что $f_1 \equiv \text{const}$. Продолжая этот процесс, приходим к равенствам $f_n \equiv \text{const}$, $n \geq 0$. Следовательно, $f \equiv \text{const}$.

Отметим, что условие (2.3) носит формальный характер и не связано с хаотизацией траекторий системы (2.1). Если система (2.1) получена из гамильтоновой после понижения порядка по Уиттекеру, то условие (2.3) заведомо не выполнено [8].

Приведем простой пример системы, удовлетворяющей условию (2.3), и которая имеет интегралы, неаналитически зависящие от параметра ε :

$$dx/dt = 1, \quad dy/dt = v_0(z) + \varepsilon v_1 + \dots, \quad dz/dt = \varepsilon \quad (2.4)$$

Здесь $\langle w_1 \rangle = 1$ и поэтому эта система не допускает однозначных первых интегралов, аналитических по ε . Однако при всех $\varepsilon \neq 0$ она имеет интеграл $\sin(x - z/\varepsilon)$, который 2π -периодически зависит от x и неаналитичен по ε при $\varepsilon = 0$.

Отметим, что система (2.4) допускает аналитическую инвариантную 1-форму $\omega = \varepsilon dx - dz$. Этот факт не противоречит теореме 1, поскольку здесь множество Пуанкаре пусто.

По-видимому, наличие конечных предельных точек множества Пуанкаре влечет несуществование непостоянных аналитических инвариантов при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$. Однако это пока не доказано.

3. Приложение к уравнениям Бюргерса. Был предложен [7] общий метод исследования свойства регулярности типичных стационарных течений несжимаемой вязкой жидкости. Ищутся решения уравнений Навье–Стокса в форме рядов по степеням параметра ε вида (2.1) и затем применяется теорема 1. Оказалось, что типичные стационарные течения хаотичны (в смысле, отмеченной в разд. 2), хотя некоторые течения (например, течение Гагена–Пуазейля в цилиндре) могут быть регулярными. Этот результат показывает, что классические результаты Бернулли, Гельмгольца и Томсона об инвариантах течений идеальной жидкости не могут быть распространены на случай вязкой жидкости.

Было показано [7], что этот вывод справедлив и для упрощенных уравнений Навье–Стокса, когда пренебрегается инерционными слагаемыми (приближение Стокса).

Продemonстрируем возможности применения указанного метода к уравнениям Бюргерса, которые также являются упрощением системы Навье–Стокса (жидкость без давления). Они имеют вид [10]

$$dv/dt = v\Delta v \quad (3.1)$$

где $v = \text{const} > 0$ – коэффициент кинематической вязкости. Эти уравнения имеют решение в виде ряда

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \quad v_0 = (u_0, v_0, 0), \quad v_1 = (u_1, v_1, w_1)$$

где

$$u_0 = \alpha z + \beta, \quad v_0 = \gamma z + \delta \quad (3.2)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные постоянные. Функция v_1 удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$Lv_1 + \alpha w_1 = v\Delta v_1; \quad L = u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha = (\alpha, \gamma, 0)$$

Оно легко решается методом Фурье. Пусть U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} – коэффициенты Фурье компонент скорости u_1, v_1, w_1 соответственно; они являются функциями z . Эти коэффициенты удовлетворяют линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую запишем в векторном виде

$$i(mu_0 + nv_0)V_{mn} + \alpha W_{mn} = v[-(m^2 + n^2)V_{mn} + V''_{mn}], \quad V_{mn} = (U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}). \quad (3.3)$$

Каждое из решений этой системы определено на всей числовой оси $\mathbb{R} = \{z\}$ и однозначно задается значениями U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} и их производных в некоторой точке z_{mn} . Положим

$$z_{mn} = -(m\beta + n\delta)/(m\alpha + n\gamma) \quad (3.4)$$

Эта точка – корень уравнения $mu_0 + nv_0 = 0$.

Пусть

$$\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0 \quad (3.5)$$

Это – условие невырожденности невозмущенной системы. Кроме того, учитывая условие (3.5), заключаем, что множество точек вида (3.4) всюду плотно заполняет ось $\mathbb{R} = \{z\}$. Если $W_{mn}(z_{mn}) \neq 0$ (типичный случай), то множество Пуанкаре всюду плотно и поэтому (по теореме 1) типичное стационарное течение жидкости в модели Бюргерса не имеет непостоянных интегралов и нетривиальных замороженных полей направлений. Далее, при $m = n = 0$ система уравнений (3.3) не вырождается и поэтому в общем случае можно считать, что $W_{00} \neq 0$. Следовательно, в общем случае отсутствуют и нетривиальные интегральные инварианты.

Положим теперь $v = 0$. Тогда уравнения Бюргерса (3.1) перейдут в уравнения Хопфа, описывающие движение бесстолкновительной сплошной среды по инерции

$$\partial v / \partial t + v \partial v / \partial x = 0$$

Согласно условию (3.5), одно из чисел α или γ отлично от нуля. Следовательно, из (3.3) вытекает, что $W_{mn}(z) = 0$ при $z = z_{mn}$. Поэтому в рассматриваемом случае множество Пуанкаре пусто и теорема 1 не применима.

Это, конечно, не случайно: для системы Хопфа уравнения (1.1) допускают интеграл $f = (v, v)$, поле симметрий $w = \text{rot } v$ и интегральный инвариант

$$\int (v, dx) = \text{const}$$

4. Необходимое условие хаотичности течений идеальной жидкости. Развиваемый метод поучительно применить к уравнениям Эйлера, описывающим движение идеальной жидкости. В этом случае теорема 1 приводит к условию хаотизации стационарных течений: поле скорости коллинеарно своему ротору.

Для простоты записи ограничимся случаем однородной жидкости ($\rho \equiv \text{const}$). Уравнения движения в потенциальном поле имеют вид

$$dv/dt = -\partial f / \partial x, \quad \text{div } v = 0 \quad (4.1)$$

Здесь $f = p/\rho + V$, где p – давление, а V – потенциал внешних массовых сил.

Ищем решение уравнений (4.1) в виде рядов

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \quad w_0 = 0, \quad f = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots, \quad f_0 = \text{const}$$

Здесь u_0, v_0 – произвольные аналитические функции z .

В первом приближении по ε имеем следующую систему уравнений в частных производных (штрих означает производную по z):

$$Lv_1 + v'_0 w_1 = -\partial f_1 / \partial x, \quad \text{div } v_1 = 0$$

Решая ее методом Фурье, получаем уравнения

$$\begin{aligned} i(mu_0 + nv_0)U_{mn} + u'_0 W_{mn} + imF_{mn} &= 0 \\ i(mu_0 + nv_0)V_{mn} + v'_0 W_{mn} + inF_{mn} &= 0 \\ i(mu_0 + nv_0)W_{mn} + F'_{mn} &= 0 \\ i(mU_{mn} + nV_{mn}) + W'_{mn} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Предположим, что выполнены условия теоремы 1 и стационарное течение заведомо не допускает инвариантов в виде рядов по степеням параметра ε . Тогда множество Пуанкаре $\mathbb{P}$ содержит бесконечно много различных точек z_{mn} , накапливающихся в некотором конечном интервале числовой оси $\mathbb{R} = \{z\}$. Поскольку в этих точках $mu_0 + nv_0 = 0$, а $W_{mn} \neq 0$, то из первых двух уравнений системы (4.2) имеем равенство $nu'_0 - mv'_0 = 0$. Следовательно, на множестве $\mathbb{P}$ справедливо соотношение

$$u_0 u'_0 + v_0 v'_0 = 0 \quad (4.3)$$

Так как множество $\mathbb{P}$ имеет конечные предельные точки, а функции u_0, v_0 предполагаются аналитическими, то равенство (4.3) справедливо всюду. Остается заметить, что соотношение (4.3) эквивалентно условию коллинеарности векторных полей $\text{rot } v$ и v при $\varepsilon = 0$.

На самом деле из системы (4.2) можно получить коллинеарность этих полей в первом приближении по ε . Например, условие коллинеарности в проекции на ось z имеет вид

$$\partial v_1 / \partial x - \partial u_1 / \partial y = \lambda_0 w_1, \quad \lambda_0 = \lambda_0(z)$$

Оно эквивалентно бесконечной цепочке алгебраических соотношений для коэффициентов Фурье

$$i(mV_{mn} - nU_{mn}) = \lambda_0 W_{mn} \quad (4.4)$$

С другой стороны, из соотношения (4.3) вытекает, что $u'_0 = \mu v_0, v'_0 = -\mu u_0$, где μ – некоторая функция z . Подставляя эти соотношения в уравнения (4.2) и используя невырожденность невозмущенной системы, а также отсутствие делителей нуля в кольце аналитических функций, получаем соотношение (4.4), в котором $\lambda_0 = \mu$.

5. Стационарные течения совершенного газа. Применим предлагаемый метод в случае совершенного газа, динамика которого описывается следующей замкнутой системой уравнений:

$$\begin{aligned} \rho dv/dt &= -\partial p / \partial x + \rho F, \quad dp/dt + \rho \text{div } v = 0, \quad p = b\rho\tau \\ \rho a d\tau/dt &= b\tau dp/dt + \kappa \Delta \tau \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь первое уравнение – уравнение Эйлера (F – внешняя сила), второе – уравнение неразрывности, третье – уравнение состояния (τ – абсолютная температура, b – газовая постоянная), четвертое – уравнение притока тепла ($a, \kappa = \text{const}$ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности соответственно).

Рассмотрим сначала простой случай, когда $\kappa = 0$. Тогда из четвертого уравнения (5.1) сразу следует интеграл

$$g = \tau / \rho^\lambda, \quad \lambda = b/a \quad (5.2)$$

Если внешние силы потенциальны ($F = -\partial V / \partial x$), то имеет место обобщенный интеграл Бернулли

$$f = (v, v)/2 + (a+b)\tau + V$$

Это показывает, что при $\kappa = 0$ типичные стационарные течения совершенного газа регулярны. Более того, если область течения D компактна и функции f и g почти всюду независимы, то траектории почти всех частиц жидкости замкнуты: частицы движутся по замкнутым орбитам, вообще говоря, с разными периодами.

Ситуация резко меняется, когда $\kappa \neq 0$: типичное стационарное течение газа в произвольном непотенциальном силовом поле вообще не допускает непостоянных интегралов.

Пусть X, Y, Z – компоненты векторного поля F : это – функции x, y, z , 2π -периодически зависящие от x, y . Рассмотрим случай, когда они представляются в виде ряда по степеням параметра ε

$$X = \varepsilon X_1 + \dots, \quad Y = \varepsilon Y_1 + \dots, \quad Z = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \dots$$

где Z_0 – аналитическая функция z . При $\varepsilon = 0$ это силовое поле потенциально.

Ищем решения системы (5.1) в форме степенных рядов

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \dots, \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots, \quad \tau = \tau_0 + \varepsilon \tau_1 + \dots \\ \mathbf{v}_0 &= (u_0, v_0, 0), \quad \mathbf{v}_1 = (u_1, v_1, w_1) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Функция τ_0 линейно зависит от z , u_0 и v_0 – произвольные функции z , а ρ_0 как функция высоты z находится из равенства

$$Z_0 = b(\rho_0 \tau_0)' / \rho_0$$

Ограничимся рассмотрением частного случая, когда u_0 и v_0 – линейные функции z вида (3.2), причем $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$. Снова определим числа z_{mn} по формуле (3.4).

Пусть X_{mn} и Y_{mn} – коэффициенты Фурье функций X_1 и Y_1 соответственно.

Теорема 2. Если $nX_{mn} - mY_{mn} \neq 0$ ($m^2 + n^2 \neq 0$) при $z = z_{mn}$, то указанные стационарные течения совершенного газа не допускают нетривиальных инвариантов, аналитических по ε .

Ясно, что непотенциальные силовые поля общего вида удовлетворяют условию теоремы 2. Доказательство теоремы 2 опирается на теорему 1.

Подставляя разложения (5.3) в систему (5.1), получаем цепочку уравнений в частных производных для последовательного отыскания коэффициентов. В первом приближении по ε получим линейную систему относительно $u_1, \dots, \rho_1, \tau_1$, которая легко решается методом Фурье. Коэффициенты Фурье $U_{mn}, \dots, P_{mn}, T_{mn}$ удовлетворяют следующей системе алгебро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i(mu_0 + nv_0)U_{mn} + u_0'W_{mn} &= -ibm\Delta_{mn} + X_{mn} \\ i(mu_0 + nv_0)V_{mn} + v_0'W_{mn} &= -ibn\Delta_{mn} + Y_{mn} \\ i(mu_0 + nv_0)W_{mn} &= -b\Delta_{mn}' - b\rho_0'\rho_0^{-1}T_{mn} + b\tau_0'\rho_0^{-1}P_{mn} + Z_{mn} \\ i(mu_0 + nv_0)P_{mn} + \rho_0'W_{mn} + \rho_0(imU_{mn} + inV_{mn} + W_{mn}') &= 0 \\ a[i(mu_0 + nv_0)T_{mn} + \tau_0'W_{mn}] &= b\tau_0\rho_0^{-1}[i(mu_0 + nv_0)P_{mn} + \rho_0'W_{mn}] + \\ &+ \kappa\rho_0^{-1}[T_{mn}'' - (m^2 + n^2)T_{mn}] \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\Delta_{mn} = T_{mn} + \rho_0^{-1}(\tau_0 P_{mn})$.

Из первых двух уравнений однозначно находятся коэффициенты U_{mn} и V_{mn} . Для того чтобы эти функции были аналитическими на прямой $\mathbb{R} = \{z\}$, необходимо и достаточно, чтобы при $z = z_{mn}$ были выполнены соотношения

$$\alpha W_{mn} + m(ib\Delta_{mn}) = X_{mn}, \quad \gamma W_{mn} + n(ib\Delta_{mn}) = Y_{mn}$$

В силу условия невырожденности определитель этой системы отличен от нуля при $m^2 + n^2 \neq 0$. Следовательно, значения W_{mn} и Δ_{mn} в точке z_{mn} находятся однозначно, причем (согласно предположению теоремы 2) $W_{mn}(z_{mn}) \neq 0$.

Подставляя найденные выражения для U_{mn} и V_{mn} в остальные уравнения (5.4), получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно W_{mn}, P_{mn} и T_{mn} , которые имеют порядки 1, 1 и 2 соответственно. Ее решения, аналитические на всей оси $\mathbb{R} = \{z\}$, однозначно выделяются, например, заданием значений T_{mn} и T_{mn}' в точках $z = z_{mn}$.

Поскольку множество Пуанкаре $\mathbb{P} = \{z_{mn}\}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то остается применить теорему 1.

Интересно рассмотреть с этой точки зрения случай, когда $\kappa = 0$. Из последнего уравнения (5.4) получаем, что при $z = z_{mn}$ выполнено равенство

$$[a\tau'_0 - b\tau_0\rho_0^{-1}\rho'_0]W_{mn} = 0$$

Нули выражения, заключенного в квадратные скобки, совпадают с критическими точками функции (5.2). В общем случае эта функция не постоянна. Поскольку критические точки аналитической функции не могут накапливаться в конечной области, то в этом случае теорема 1, очевидно, не применима.

6. Добавление. Некоторые интегральные соотношения. Будем считать, что область течения D компактна, а ее граница ∂D – гладкая регулярная поверхность. Пусть $\mathbf{n}$ – орт внутренней нормали к граничной поверхности.

Если теплопроводящая среда неподвижна ($\mathbf{v} = 0$) и $\partial\tau/\partial\mathbf{n} = 0$ на границе ∂D , то $\tau = \text{const}$ во всей области D . Действительно, согласно уравнению притока тепла, в этом случае температура будет гармонической функцией в области D . Остается воспользоваться известным свойством решений внутренней задачи Неймана (см., например, [11]).

Оказывается, этот результат справедлив и для стационарных течений совершенного газа. Доказательство использует прием, который может оказаться полезным и в других задачах подобного рода. Ввиду свойства непроницаемости поле скоростей $\mathbf{v}$ касается границы ∂D .

Лемма. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция. Тогда

$$\int_D \rho \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{v} \right) d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (6.1)$$

Действительно,

$$(\partial f / \partial \mathbf{x}, \rho \mathbf{v}) = \text{div}(f \rho \mathbf{v}) - f \text{div}(\rho \mathbf{v})$$

Ввиду уравнения неразрывности $\text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. После этого формула (6.1) вытекает из теоремы Гаусса.

Приведем другое доказательство леммы, основанное на применении эргодической теории. Ввиду компактности D функция f ограничена. Следовательно, временное среднее функции $df/dt = (f'_{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$ равно нулю. Динамическая система (1.1) имеет инвариантную меру $\rho d^3 \mathbf{x}$. Остается применить к функции df/dt индивидуальную эргодическую теорему Биркгофа – Хинчина (см., например, [12]).

Уравнение притока тепла (четвертое уравнение системы (5.1)) можно представить в следующем виде:

$$d(a \ln \tau - b \ln \rho) / dt = \kappa \Delta \tau (\rho \tau)^{-1}$$

Согласно лемме,

$$\int_D \frac{\Delta \tau}{\tau} d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (6.2)$$

Теорема 3. Если

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \ln \tau}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0 \quad (6.3)$$

то $\tau = \text{const}$ в области D .

Следствие. Если $\partial\tau/\partial n = 0$, то $\tau = \text{const}$.

Доказательство. Применяя к интегралу в левой части (6.2) подготовительную формулу Грина, получаем соотношение

$$\int_{\partial D} \frac{1}{\tau} \frac{\partial \tau}{\partial n} d\sigma = \int_D \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} \right)^2 d^3 x \quad (6.4)$$

Ввиду предположения (6.3) левая часть этого равенства обращается в нуль. Так как подынтегральная функция в правой части (6.4) неотрицательна, а сам интеграл равен нулю, то $\partial\tau/\partial x = 0$. Откуда получаем, что $\tau = \text{const}$.

Рассмотрим частный случай, когда течение газа периодически по всем координатам x , y , z . Такое течение можно рассматривать как течение по трехмерному "плоскому" тору $\mathbb{T}^3$. Так как $\partial\mathbb{T}^3$ – пустое множество, то условие (6.3), очевидно, выполнено. Следовательно, по теореме 3, $\tau = \text{const}$. Из трех последних уравнений системы (5.1) вытекает, что такой газ будет баротропной несжимаемой жидкостью. Было показано в [5], что если поле скоростей не коллинеарно своему ротору, то такое стационарное течение в потенциальном силовом поле будет регулярным. Отметим, что течения газа из теоремы 2 считаются периодическими только по двум координатам x и y .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01059) и Государственной программы "Ведущие научные школы" (00-15-96146).

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozlov V.V. Symmetries and regular behavior of Hamiltonian systems // Chaos. 1996. V. 6. № 1. P. 1–5.
2. Фридман А.А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. М.; Л.: Гостехиздат, 1934. 368 с.
3. Козлов В.В. Условие замороженности поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 237–244.
4. Frisch U. Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov. Cambridge: Univ. Press., 1996. = Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: ФАЗИС, 1998. 343 с.
5. Козлов В.В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 2. С. 341–342.
6. Арнольд В.И. О топологии трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 1. С. 183–185.
7. Kozlov V.V. Dynamical systems determined by the Navier-Stokes equations // Rus. J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 1. P. 57–69.
8. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 429 с.
9. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1892 = Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
10. Burgers J.M. The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht: D. Reidel, 1974. 173 p.
11. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. N. Y., L.: Intersci. Publ., 1953 = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 544 с.
12. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.