

УДК 531.36

© 2002 г. А.П. Маркеев

АЛГОРИТМ НОРМАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ В ЗАДАЧЕ ОБ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Предлагается конструктивная процедура построения уравнений возмущенного движения, удобных для исследования орбитальной устойчивости периодического движения автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Указывается алгоритм нормализации этих уравнений, приводятся формулы для вычисления коэффициентов нормальной формы. Результаты применяются для исследования устойчивости движения в некоторых частных случаях регулярной прецессии Гироли тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы, движение которой описывается уравнениями

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

где функция Гамильтона H не зависит от времени t .

Предположим, что в системе существует периодическое движение (ПД)

$$q_i = f_i(t), \quad p_i = g_i(t), \quad i = 1, 2 \quad (1.2)$$

Без ограничения общности период считаем равным 2π . Предполагаем также, что в окрестности траектории, отвечающей ПД, функция Гамильтона аналитична.

Для исследования движений системы, близких к ПД, целесообразно ввести такие канонически сопряженные переменные ξ_i, η_i ($i = 1, 2$), чтобы невозмущенное ПД (1.2) записывалось в виде

$$\xi_1(t) = t + \xi_1(0), \quad \eta_1 = \xi_2 = \eta_2 = 0 \quad (1.3)$$

а функция Гамильтона была 2π -периодической по координате ξ_1 .

Существование таких переменных известно давно [1, 2]. Фактическое же их построение в конкретных задачах динамики может оказаться весьма сложной задачей.

Сравнительно просто эта задача решается (см., например, [3–5]), если гамильтониан системы (1.1) может быть записан в виде

$$H = H^{(1)}(q_1, p_1) + H^{(2)}(q_1, q_2, p_1, p_2) \quad (1.4)$$

где функция $H^{(2)}$ представима в виде ряда по степеням q_2, p_2 , начинающегося с членов, степень которых не ниже второй. У системы (1.1) с гамильтонианом (1.4) существует семейство решений, для которого $q_2 = p_2 = 0$, а переменные q_1, p_1 описываются уравнениями, отвечающими системе с одной степенью свободы, имеющей гамильтониан $H^{(1)}$.

В областях фазовой плоскости q_1, p_1 , где движения этой системы обладают свойством периодичности, введем переменные действие – угол I, w . ПД в переменных I, w записываются в виде

$$w = \omega(I_0)t + w_0, \quad I = I_0$$

где $\omega(I) = dh^{(1)} / dI$, $h^{(1)}$ – гамильтониан $H^{(1)}$, выраженный через I, w . Для 2π -периодического движения $\omega(I_0) = 1$. Если положить

$$\xi_1 = w, \quad \eta_1 = I - I_0, \quad \xi_2 = q_2, \quad \eta_2 = p_2$$

то ПД исходной системы с функцией Гамильтона (1.4) запишется в виде (1.3), а гамильтониан (1.4), выраженный через переменные ξ_i, η_i , будет 2π -периодичен по ξ_1 и аналитичен относительно ξ_2, η_1, η_2 .

Цель данной работы – получение способа построения переменных ξ_i, η_i для общего случая, когда функция Гамильтона изучаемой системы не обладает структурой (1.4), а также разработка конструктивного алгоритма нормализации гамильтониана возмущенного движения. Результаты иллюстрируются примером исследования некоторых случаев задачи об устойчивости регулярной прецессии Гироли твердого тела с одной неподвижной точкой в однородном поле тяжести.

2. Получение гамильтониана возмущенного движения. Переменные ξ_i, η_i введем при помощи канонического унивалентного преобразования $q_i, p_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$. При этом ограничимся классом преобразований, линейных относительно переменных ξ_2, η_1, η_2 , характеризующих отклонение возмущенных траекторий системы (1.1) от траектории невозмущенного ПД (1.2). Положим

$$q_i = f_i(\xi_1) + a_{i1}(\xi_1)\xi_2 + a_{i2}(\xi_1)\eta_1 + a_{i3}(\xi_1)\eta_2 \quad (2.1)$$

$$p_i = g_i(\xi_1) + b_{i1}(\xi_1)\xi_2 + b_{i2}(\xi_1)\eta_1 + b_{i3}(\xi_1)\eta_2; \quad i = 1, 2$$

Здесь f_i, g_i – функции из (1.2), a_{ij}, b_{ij} ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3$) – искомые 2π -периодические функции от ξ_1 . Их надо подобрать такими, чтобы преобразование (2.1) было каноническим унивалентным.

Пусть $S = S(\xi_1, \xi_2, p_1, p_2)$ – производящая функция преобразования (2.1). Связь между старыми и новыми переменными задается равенствами

$$q_i = \frac{\partial S}{\partial p_i}, \quad \eta_i = \frac{\partial S}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.2)$$

Ввиду линейности замены (2.1) по переменным ξ_2, η_1, η_2 производящая функция должна быть функцией второй степени относительно ξ_2, p_1, p_2 , у которой коэффициенты при членах второй степени – постоянные величины. Запишем функцию S в виде

$$S = c_1 \xi_2^2 + c_2 \xi_2 p_1 + c_3 \xi_2 p_2 + c_4 p_1^2 + c_5 p_1 p_2 + c_6 p_2^2 + s_1 \xi_2 + s_2 p_1 + s_3 p_2 + \int s_0 d\xi_1$$

где $c_1, c_2, \dots, c_6$ – постоянные коэффициенты, а s_0, s_1, s_2, s_3 – 2π -периодические функции от ξ_1 .

Разрешив равенства (2.2) относительно переменных q_1, q_2, p_1, p_2 и подставив полученные выражения в левые части соотношений (2.1), найдем, что

$$s_0 = (c_4 g_1^2 + c_5 g_1 g_2 + c_6 g_2^2)' - f_1' g_1 - f_2' g_2, \quad s_1 = -c_2 g_1 - c_3 g_2 \quad (2.3)$$

$$s_2 = f_1 - 2c_4 g_1 - c_5 g_2, \quad s_3 = f_2 - c_5 g_1 - 2c_6 g_2$$

а для коэффициентов $a_{ij}(\xi_1)$, $b_{ij}(\xi_1)$ преобразования (2.1) получим выражения

$$\begin{aligned} a_{i1} &= (-1)^{i+1} \Delta^{-1} [e_1 f'_i - e_{3+i} f'_{3-i} - 2(e_1 c_5 - e_4 c_6 + c_1 c_5^2 - c_3^2 c_4) g'_{3-i}] \\ a_{i2} &= -(-1)^{i+1} \Delta^{-1} e_{4-i}, \quad a_{i3} = (-1)^{i+1} \Delta^{-1} (c_5 f'_i - 2c_{2+2i} f'_{3-i} - e_6 g'_{3-i}) \\ b_{i1} &= (-1)^{i+1} \Delta^{-1} (2c_1 f'_{3-i} + e_1 g'_i + e_{6-i} g'_{3-i}) \\ b_{i2} &= (-1)^{i+1} \Delta^{-1} c_{4-i}, \quad b_{i3} = (-1)^{i+1} \Delta^{-1} (-f'_{3-i} + c_5 g'_i + 2c_{8-2i} g'_{3-i}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} e_1 &= c_2 c_3 - 2c_1 c_5, \quad e_2 = c_3 c_5 - 2c_2 c_6, \quad e_3 = c_2 c_5 - 2c_3 c_4 \\ e_4 &= c_2^2 - 4c_1 c_4, \quad e_5 = c_3^2 - 4c_1 c_6, \quad e_6 = c_5^2 - 4c_4 c_6 \\ \Delta &= c_3 f'_1 - c_2 f'_2 + e_3 g'_1 - e_2 g'_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Штрих обозначает дифференцирование по переменной ξ_1 .

Полученная замена переменных (2.1) содержит шесть произвольных постоянных параметров $c_1, c_2, \dots, c_6$. При решении конкретных задач их выбор ограничен требованием, чтобы величина Δ , определенная последним выражением (2.5), не обращалась в нуль при $0 \leq \xi_1 \leq 2\pi$.

Пример 1. Пусть в ПД (1.2) одна из фазовых координат, например q_1 , — монотонная функция времени ($\dot{f}_1(t) \neq 0$). В этом случае замену $q_i, p_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$ можно получить, положив в формулах (2.4) $c_3 = 1$, а остальные пять параметров c_i принять равными нулю. Тогда замена переменных (2.1) будет такой:

$$q_1 = f_1(\xi_1), \quad q_2 = f_2(\xi_1) + \xi_2 \quad (2.6)$$

$$p_1 = g_1(\xi_1) + (f'_1)^{-1}(\eta_1 + g'_2 \xi_2 - f'_2 \eta_2), \quad p_2 = g_2(\xi_1) + \eta_2$$

Замечание. Нетрудно проверить, что преобразование (2.1) может быть представлено как композиция двух канонических унивалентных замен переменных. При первой замене $q_i, p_i \rightarrow Q_i, P_i$ вводится новая координата

$$Q_1 = c_3 q_1 - c_2 q_2 + e_3 p_1 - e_2 p_2$$

Вторая замена $Q_i, P_i \rightarrow \xi_i, \eta_i$ делается аналогично замене (2.6).

Пример 2. Пусть для ПД (1.2) величина $\dot{f}_1(t) + \dot{g}_2(t) \neq 0$. Сделав замену

$$Q_1 = q_1 + p_2, \quad Q_2 = q_2 + p_1, \quad P_1 = p_1, \quad P_2 = p_2$$

а затем замену, аналогичную (2.6), получим преобразование (2.1) вида

$$q_1 = f_1(\xi_1) - \eta_2, \quad q_2 = f_2(\xi_1) - (f'_1 + g'_2)^{-1}[\eta_1 - f'_1 \xi_2 - (f'_2 + g'_1) \eta_2] \quad (2.7)$$

$$p_1 = g_1(\xi_1) + (f'_1 + g'_2)^{-1}[\eta_1 + g'_2 \xi_2 - (f'_2 + g'_1) \eta_2], \quad p_2 = g_2(\xi_1) + \eta_2$$

В переменных ξ_i, η_i невозмущенное ПД (1.2) записывается в виде равенств (1.3).

Гамильтониан возмущенного движения $\Gamma = \Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ получается из гамильтониана $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ исходной системы (1.1) заменой переменных q_i, p_i их выражениями через ξ_i, η_i по формулам (2.1).

Функцию Γ можно разложить в сходящийся ряд по степеням η_1, ξ_2, η_2

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \dots + \Gamma_k + \dots \quad (2.8)$$

где отброшена несущественная аддитивная постоянная, равная значению гамильтониана на невозмущенном ПД (1.2), Γ_k – форма степени k относительно $|\eta_1|^{1/2}, \xi_2, \eta_2$, причем

$$\Gamma_2 = \eta_1 + \varphi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1), \quad \Gamma_3 = \psi_1(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \varphi_3(\xi_2, \eta_2, \xi_1) \quad (2.9)$$

$$\Gamma_4 = \chi(\xi_1)\eta_1^2 + \psi_2(\xi_2, \eta_2, \xi_1)\eta_1 + \varphi_4(\xi_2, \eta_2, \xi_1)$$

где $\chi(\xi_1)$ – 2π -периодическая функция от ξ_1 , а φ_m, ψ_m – формы степени m относительно ξ_2, η_2 с 2π -периодическими по ξ_1 коэффициентами.

Гамильтониан (2.8) удобен для исследования траекторий системы (1.1), близких к траекториям невозмущенного ПД (1.2) [6]. В частности, задача об орбитальной устойчивости ПД (1.2) эквивалентна задаче об устойчивости системы с функцией Гамильтона (2.8) по отношению к возмущениям величин η_1, ξ_2, η_2 .

3. Нормализация функции Гамильтона. Формулировка условий орбитальной устойчивости и неустойчивости. Линеаризованным уравнениям возмущенного движения соответствует гамильтониан Γ_2 , определяемый первым выражением (2.9). Два мультипликатора этих уравнений равны единице, а два другие – корни уравнения

$$\rho^2 - 2a\rho + 1 = 0 \quad (3.1)$$

где $2a = x_{11}(2\pi) + x_{22}(2\pi)$, а $x_{ii}(2\pi)$ – вычисленные при $\xi_1 = 2\pi$ элементы матрицы $X(\xi_1)$ фундаментальных решений ($X(0) = E$, E – единичная матрица второго порядка) линейной системы с 2π -периодическими по независимой переменной ξ_1 коэффициентами

$$\frac{d\xi_2}{d\xi_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_2}, \quad \frac{d\eta_2}{d\xi_1} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} \quad (3.2)$$

Здесь φ_2 – квадратичная относительно ξ_2, η_2 часть функции Γ_2 .

Нормализация функции Гамильтона (2.8) осуществляется по-разному в зависимости от значения величины a .

Если $|a| > 1$, то уравнение (3.1) имеет один мультипликатор, модуль которого больше единицы. Тогда невозмущенное ПД орбитально неустойчиво на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению [7].

Когда $|a| = 1$, уравнение (3.1) имеет кратные вещественные корни $\rho_1 = \rho_2 = 1$ (при $a = 1$) или корни $\rho_1 = \rho_2 = -1$ (при $a = -1$). В случае общего положения матрица $X(2\pi)$ не приводится к диагональной форме и, следовательно, невозмущенное ПД орбитально неустойчиво в линейном приближении. Строгое решение вопроса об устойчивости требует в этом случае рассмотрения нелинейных уравнений возмущенного движения. Ранее [8] для случая $|a| = 1$ построен конструктивный алгоритм нормализации гамильтониана возмущенного движения (2.8) и получены условия орбитальной устойчивости и неустойчивости. Нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H = r_1 + \frac{1}{2}\delta y_2^2 + k_{30}x_2^3 + k_{10}x_2r_1 + k_{40}x_2^4 + k_{20}x_2^2r_1 + k_{00}r_1^2 + O_5 \quad (3.3)$$

где k_{ij} – постоянные величины, O_5 – ряд, начинающийся с членов не ниже пятой степени относительно $|r_1|^{1/2}, x_2, y_2$, коэффициенты ряда имеют период 2π (если $a = 1$) или 4π (если $a = -1$) относительно координаты w_1 , соответствующей импульсу r_1 . Величина δ в (3.3) равна 1 или -1 , ее конкретное значение определяется в процессе

нормализации линейной системы (3.2). Формулы для вычисления коэффициентов нормальной формы (3.3) приведены ранее [8].

Теорема 1. Если коэффициент k_{30} нормальной формы (3.3) отличен от нуля или $k_{30} = 0$, но $\delta k_{40} < 0$, то ПД орбитально неустойчиво.

Теорема 2. Если в нормальной форме (3.3) коэффициент k_{30} равен нулю, но при этом $\delta k_{40} > 0$, то ПД орбитально устойчиво.

Пусть теперь $|a| < 1$. В этом случае корни уравнения (3.1) различны и имеют модули, равные единице: $\rho_1 = e^{i2\pi\lambda}$, $\rho_2 = e^{-i2\pi\lambda}$, где λ – корень уравнения

$$\cos 2\pi\lambda = a \quad (3.4)$$

В конкретных задачах неоднозначность в определении λ из этого уравнения часто может быть устранена рассмотрением предельных случаев, для которых квадратичная форма Φ_2 из соотношений (2.9) имеет постоянные коэффициенты. В таких предельных случаях величина $|\lambda|$ будет частотой малых колебаний и легко вычисляется. Учитывая затем свойство непрерывности характеристических показателей по параметрам задачи, можно из уравнения (3.4) однозначно определить величину λ .

Нормализация квадратичной части гамильтониана (2.8). Пусть характеристические показатели $\pm i\lambda_*$, системы (3.2) найдены. Положим $\kappa = x_{12}(2\pi)\sin(2\pi\lambda_*)$, $\sigma = \text{sign } \kappa$, $\lambda = \sigma\lambda_*$ и сделаем замену переменных $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \rightarrow u_1, u_2, v_1, v_2$ по формулам

$$\xi_1 = u_1, \quad \eta_1 = v_1 + 1/2\lambda(u_2^2 + v_2^2) - \Phi_2(n_{11}u_2 + n_{12}v_2, n_{21}u_2 + n_{22}v_2, \xi_1) \quad (3.5)$$

$$\xi_2 = n_{11}u_2 + n_{12}v_2, \quad \eta_2 = n_{21}u_2 + n_{22}v_2$$

Матрица $N(u_1)$ коэффициентов n_{ij} в этой замене задается следующими равенствами:

$$N = \sigma_1 X(u_1) P Q(u_1)$$

$$P = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c^{-1} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \cos \lambda u_1 & -\sin \lambda u_1 \\ \sin \lambda u_1 & \cos \lambda u_1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \text{sign}(\sin 2\pi\lambda_*), \quad c = x_{12}(2\pi) |\kappa|^{-1/2}, \quad d = (\cos 2\pi\lambda - x_{11}(2\pi)) |\kappa|^{-1/2}$$

Преобразование (3.5) является каноническим, унивалентным и 2π -периодическим относительно u_1 . После замены (3.5) функция Гамильтона (2.8) запишется в виде

$$F = F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_k + \dots \quad (3.6)$$

$$F_2 = v_1 + 1/2\lambda(u_2^2 + v_2^2), \quad F_3 = f_1(u_2, v_2, u_1)v_1 + f_3(u_2, v_2, u_1)$$

$$F_4 = \chi(u_1)v_1^2 + f_2(u_2, v_2, u_1)v_1 + f_4(u_2, v_2, u_1)$$

Здесь f_k – форма степени k относительно u_2, v_2 с 2π -периодическими по u_1 коэффициентами

$$f_k = \sum_{\nu+\mu=k} f_{\nu\mu}(u_1) u_2^\nu v_2^\mu$$

Получение нормальной формы до членов четвертой степени включительно. Для нормализации членов третьей и четвертой степеней в функции Гамильтона (3.6) воспользуемся методом Депри – Хори [9, 10]. Нормализующее каноническое преобразование $u_1, v_1, u_2, v_2 \rightarrow w_1, r_1, q_2, p_2$ можно получить близким к тождественному

$$u_1 = w_1 + \dots, \quad v_1 = r_1 + \dots, \quad u_2 = q_2 + \dots, \quad v_2 = p_2 + \dots$$

где многоточия обозначают сходящиеся ряды по степеням r_1, q_2, p_2 с 2π -периодическими по w_1 коэффициентами.

Нормальная форма гамильтониана будет различной для случаев, когда есть резонансы третьего или четвертого порядков (т.е. когда величина 3λ или 4λ равна целому числу k) и когда этих резонансов нет.

Не останавливаясь на довольно громоздких выкладках, выпишем окончательные формулы, необходимые для вычисления нормальной формы. Введем обозначения

$$\delta_{10}(u_1) = 2f_{10}, \quad \gamma_{10}(u_1) = 2f_{01}, \quad \delta_{30}(u_1) = f_{03} - f_{21}$$

$$\gamma_{30}(u_1) = f_{30} - f_{12}, \quad \delta_{21}(u_1) = -(3f_{03} + f_{21}), \quad \gamma_{21}(u_1) = 3f_{30} + f_{12}$$

$$l_{\nu\mu} = \frac{1}{4} \int_0^{u_1} [\delta_{\nu\mu}(t) \cos(\nu - \mu)\lambda t - \gamma_{\nu\mu}(t) \sin(\nu - \mu)\lambda t] dt$$

$$m_{\nu\mu} = \frac{1}{4} \int_0^{u_1} [\delta_{\nu\mu}(t) \sin(\nu - \mu)\lambda t + \gamma_{\nu\mu}(t) \cos(\nu - \mu)\lambda t] dt$$

$$r_{\nu\mu} = 2l_{\nu\mu}(u_1) + m_{\nu\mu}(2\pi) \operatorname{ctg}[(\nu - \mu)\pi\lambda] - l_{\nu\mu}(2\pi)$$

$$s_{\nu\mu} = 2m_{\nu\mu}(u_1) - l_{\nu\mu}(2\pi) \operatorname{ctg}[(\nu - \mu)\pi\lambda] - m_{\nu\mu}(2\pi)$$

$$u_{\nu\mu} = \frac{1}{2} [r_{\nu\mu} \cos(\nu - \mu)\lambda u_1 + s_{\nu\mu} \sin(\nu - \mu)\lambda u_1]$$

$$v_{\nu\mu} = -\frac{1}{2} [r_{\nu\mu} \sin(\nu - \mu)\lambda u_1 - s_{\nu\mu} \cos(\nu - \mu)\lambda u_1]$$

$$d_{20} = f_{10}v_{10} - f_{01}u_{10}, \quad d_{11} = -2(f_{10}u_{21} + f_{01}v_{21})$$

$$d_{40} = f_{10} - 3\lambda v_{10} - 3u_{21}, \quad d_{04} = f_{01} + 3\lambda u_{10} - 3v_{21}$$

При отсутствии резонансов третьего и четвертого порядков нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H = r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + O_5 \quad (3.7)$$

В (3.7) и ниже $q_2 = \sqrt{2r_2} \sin w_2$, $p_2 = \sqrt{2r_2} \cos w_2$, а O_5 – совокупность членов не ниже пятой степени относительно $|r_1|^{1/2}$, q_2 , p_2 . Постоянные коэффициенты c_{ij} вычисляются по формулам

$$c_{20} = \langle \chi + d_{20} \rangle, \quad c_{11} = \langle f_{20} + f_{02} - f_{10}^2 - f_{01}^2 + \delta_{21}u_{10} + \gamma_{21}v_{10} + d_{11} - 2\lambda d_{20} \rangle$$

$$c_{02} = \frac{1}{2} \langle 3f_{40} + f_{22} + 3f_{04} - \lambda d_{11} - 9\gamma_{30}u_{30} + 9\delta_{30}v_{30} + \\ + \delta_{21}(f_{01} - \lambda u_{10} + 3v_{21}) - \gamma_{21}(f_{10} + \lambda v_{10} + 3u_{21}) \rangle$$

Символом $\langle g \rangle$ обозначается среднее значение 2π -периодической функции $g(u_1)$ на периоде.

Пусть

$$D = c_{20}\lambda^2 - c_{11}\lambda + c_{02} \quad (3.8)$$

Теорема 3 (Арнольда – Мозера) [11]. При выполнении неравенства $D \neq 0$ ПД орбитально устойчиво.

При резонансе третьего порядка $3\lambda = k$ имеем такую нормальную форму гамильтониана возмущенного движения:

$$H = r_1 + \lambda r_2 + r_2 \sqrt{r_2} [\alpha_{30} \sin(3w_2 - kw_1) + \beta_{30} \cos(3w_2 - kw_1)] + O_4 \quad (3.9)$$

$$\alpha_{30} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \langle \delta_{30} \sin ku_1 + \gamma_{30} \cos ku_1 \rangle, \quad \beta_{30} = \frac{\sqrt{2}}{2} \langle \delta_{30} \cos ku_1 - \gamma_{30} \sin ku_1 \rangle$$

Теорема 4 [10]. Если в гамильтониане (3.9) хотя бы один из коэффициентов α_{30} или β_{30} отличен от нуля, то ПД орбитально неустойчиво.

При резонансе четвертого порядка $4\lambda = k$ нормальная форма будет такой:

$$H = r_1 + \lambda r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ + r_2^2[\alpha_{40} \sin(4w_2 - kw_1) + \beta_{40} \cos(4w_2 - kw_1)] + O_5 \quad (3.10)$$

В выражении (3.10) величины c_{ij} вычисляются так же, как в нормальной форме (3.7), а

$$\alpha_{40} = -\frac{1}{2}\langle \sigma_{40} \sin ku_1 - \chi_{40} \cos ku_1 \rangle, \quad \beta_{40} = \frac{1}{2}\langle \sigma_{40} \cos ku_1 + \chi_{40} \sin ku_1 \rangle \\ \sigma_{40} = f_{40} - f_{22} + f_{04} - \gamma_{30}d_{40} - \delta_{30}d_{04} + 6\lambda(f_{10}u_{30} - f_{01}v_{30}) - 3(\delta_{21}v_{30} + \gamma_{21}u_{30}) \\ \chi_{40} = f_{13} - f_{31} - \delta_{30}\delta_{40} + \gamma_{30}d_{04} - 6\lambda(f_{10}v_{30} + f_{01}u_{30}) - 3(\delta_{21}u_{30} - \gamma_{21}v_{30})$$

Теорема 5 [10]. Если $|D| > \sqrt{\alpha_{40}^2 + \beta_{40}^2}$, то ПД орбитально устойчиво. Если же последнее неравенство выполняется с противоположным знаком, то ПД орбитально неустойчиво.

4. Исследование устойчивости прецессии Гриоли в двух частных случаях. Рассмотрим движение твердого тела с одной закрепленной точкой O в однородном поле тяжести. Вес тела mg , расстояние от центра тяжести до неподвижной точки равно l . Пусть точка закрепления выбрана так, что выполняются условия

$$\tilde{x}_0\sqrt{B-C} = \tilde{z}_0\sqrt{A-B}, \quad \tilde{y}_0 = 0, \quad A > B > C \quad (4.1)$$

Здесь $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0$ – координаты центра тяжести тела в системе координат $O\tilde{x}_0\tilde{y}_0\tilde{z}_0$, образованной главными осями инерции тела для неподвижной точки, A, B, C – соответствующие моменты инерции. Условия (4.1) означают, что тело не обладает динамической симметрией, а центр тяжести лежит на перпендикуляре к одному из круговых сечений эллипсоида инерции, восстановленном из неподвижной точки.

Как установил Гриоли [12] (см. также [13–16]), при выполнении условий (4.1) тело может совершать регулярно прецессию вокруг оси, не являющейся вертикальной. Угол χ между осью прецессии и восходящей вертикалью полностью определяется величинами главных моментов инерции

$$\chi = \arctg b, \quad b = \frac{\sqrt{(1-\theta_b)(\theta_b-\theta_c)}}{1-\theta_b+\theta_c}$$

Здесь $\theta_b = B/A$, $\theta_c = C/A$ – безразмерные параметры. В плоскости θ_b, θ_c область их допустимых значений ($0 < \theta_c < \theta_b < 1$; $\theta_b + \theta_c > 1$) представляет собой прямоугольный треугольник с вершинами $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(1, 1)$ и $(1, 0)$.

В прецессии Гриоли центр тяжести тела лежит на оси собственного вращения, а угол между осями подвижного и неподвижного аксоидов является прямым. Угловые скорости прецессии и собственного вращения одинаковы и равны величине n , которая зависит только от геометрии масс тела:

$$n^2 = \frac{mgl}{\sqrt{(A-B)(B-C) + (A-B+C)^2}}$$

Движение тела, отвечающее регулярной прецессии Гриоли, является периодическим: за время, равное $2\pi/n$, тело возвращается к своей первоначальной ориентации в абсолютном пространстве, при этом вектор угловой скорости принимает свое начальное значение.

Для решения задачи об устойчивости прецессии Гриоли были применены алгоритмы разд. 1–3. Ниже излагаются результаты, относящиеся к двум частным случаям. Отметим, что ряд вопросов об устойчивости прецессии Гриоли рассмотрен ранее [17–19].

Введем жестко связанный с телом трехгранник $Oxyz$, получающийся из трехгранника $O\tilde{x}_0\tilde{y}_0\tilde{z}_0$ поворотом последнего вокруг оси $O\tilde{y}_0$ против часовой стрелки на угол $\alpha = \arctg(\tilde{x}_0 / \tilde{z}_0)$. Ось Oz проходит через центр тяжести тела. Ориентацию трехгранника $Oxyz$ зададим углами Эйлера ψ, θ, ϕ . При получении функции Гамильтона положим

$$\phi = q_1, \quad \theta = q_2, \quad \psi = q_3, \quad p_\phi = Anp_1, \quad p_\theta = Anp_2, \quad p_\psi = Anp_3$$

а в качестве независимой переменной примем безразмерную величину $\tau = n(t + t_0)$, где t_0 – производная постоянная. Не выписывая выражения для функции Гамильтона, отметим только, что q_3 будет циклической координатой, а прецессии Гриоли соответствует следующее решение приведенной автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы:

$$\begin{aligned} q_1 = f_1(\tau) &= -\frac{\pi}{2} + \tau - \arctg(b \sin \tau), \quad q_2 = f_2(\tau) = \arccos \frac{b \cos \tau}{\sqrt{b^2 + 1}} \\ p_1 = g_1(\tau) &= (1 - \theta_b + \theta_c)(1 - b \cos \tau) \\ p_2 = g_2(\tau) &= \frac{b \sin \tau}{\sqrt{1 + b^2 \sin^2 \tau}} [1 + \theta_c - (1 - \theta_b + \theta_c)b \cos \tau] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Об устойчивости в случае, когда ось прецессии наклонена к вертикали под углом $\pi/4$. Этот случай характерен тем, что в плоскости θ_b, θ_c кривая $\chi = \pi/4$ разбивает область допустимых значений параметров на две подобласти, в одной из которых ($\chi < \pi/4$) на невозмущенном движении (4.2) угол собственного вращения ϕ монотонно возрастает ($\dot{f}_1 > 0$), а в другой ($\chi > \pi/4$) величина $\dot{f}_1$ может обращаться в нуль, и угол ϕ меняется немонотонно.

На кривой $\chi = \pi/4$ величина $\dot{f}_1$ обращается в нуль при $\tau = 0$ и $\tau = 2\pi$. Но функция $\dot{f}_1 + \dot{g}_2$ на кривой $\chi = \pi/4$ – монотонно возрастающая (вычисления показывают, что на этой кривой $\dot{f}_1 + \dot{g}_2 > 0.5$ при любом значении τ). Поэтому, согласно примеру 2 из разд. 1, переменные ξ_i, η_i можно ввести при помощи канонического преобразования (2.7).

Участок кривой $\chi = \pi/4$, лежащий в области допустимых значений параметров, можно задать при помощи однозначной функции $\theta_c = \theta_c(\theta_b)$, причем $5/6 < \theta_b < 1$. Исследование устойчивости проводилось для значений θ_b , лежащих в интервале $(5/6, 0.999)$. Для описания результатов вычислений отметим в этом интервале девять точек $Q^{(i)}$, занумеровав их в порядке возрастания соответствующих значений $\theta_b^{(i)}$ параметра θ_b , причем

$$\begin{aligned} \theta_b^{(1)} &= 0.86442, \quad \theta_b^{(2)} = 0.87402, \quad \theta_b^{(3)} = 0.89662, \quad \theta_b^{(4)} = 0.90810, \quad \theta_b^{(5)} = 0.93519 \\ \theta_b^{(6)} &= 0.94849, \quad \theta_b^{(7)} = 0.97896, \quad \theta_b^{(8)} = 0.97936, \quad \theta_b^{(9)} = 0.99091 \end{aligned}$$

Все точки интервала $(5/6, 0.999)$, кроме шести точек $Q^{(j)}$ ($j = 2, 3, 5, 6, 7, 9$), – нерезонансные: в них величина $k\lambda$ не является целым числом при $k = 1, 2, 3, 4$.

На интервале $(\theta_b^{(5)}, \theta_b^{(6)})$ коэффициент a в уравнении (3.1) удовлетворяет неравенству $a < -1$. В граничных точках этого интервала $2\lambda = 3$, а коэффициенты нормальной формы (3.3) таковы: $\delta = 1, k_{30} = 0, k_{40} = -0.00042$ в точке $Q^{(5)}$, $\delta = -1, k_{30} = 0, k_{40} = -0.00037$ в точке $Q^{(6)}$.

В точках $Q^{(3)}$ и $Q^{(7)}$ реализуются резонансы третьего порядка $3\lambda = 5$ и $3\lambda = 4$ соответственно. Коэффициент β_{30} в нормальной форме (3.9) равен нулю, а $\alpha_{30} = -0.12572$ в точке $Q^{(3)}$ и $\alpha_{30} = -0.04245$ в точке $Q^{(7)}$.

В точках $Q^{(2)}$ и $Q^{(9)}$ имеют место резонансы четвертого порядка $4\lambda = 7$ и $4\lambda = 5$ соответственно. Коэффициент α_{40} нормальной формы (3.10) в этих точках равен нулю, а β_{40} и величина D , определяемая выражением (3.8), равны соответственно -0.47388 и -0.14157 в точке $Q^{(2)}$, -0.07496 и -0.77175 в точке $Q^{(9)}$.

На интервале $(5/6, 0.999)$ величина D обращается в нуль в трех точках: $Q^{(1)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(8)}$.

На основании изложенного в разд. 3 и приведенных результатов вычислений получаем такие выводы об орбитальной устойчивости прецессии Гриоли для значений параметров θ_b , θ_c , лежащих на кривой $\chi = \pi/4$. В точках $Q^{(2)}$, $Q^{(3)}$, $Q^{(5)}$, $Q^{(7)}$ и на интервале $(\theta_b^{(5)}, \theta_b^{(6)})$ имеет место орбитальная неустойчивость; в точках $Q^{(1)}$, $Q^{(4)}$ и $Q^{(8)}$ вопрос об устойчивости остался открытым; в остальных точках из интервала $(5/6, 0.999)$ прецессия Гриоли орбитально устойчива.

О предельном случае $\theta_b + \theta_c = 1$. Отрезок прямой $\theta_b + \theta_c = 1$ при $0.5 \leq \theta_b \leq 1$ является частью границы области допустимых значений параметров θ_b , θ_c . Исследование предельного случая $\theta_b + \theta_c = 1$ может быть полезным для анализа движения тел, мало отличающихся от пластинки, лежащей в главной плоскости инерции $O\tilde{y}_0\tilde{z}_0$ тела.

Исследование проводилось для значений θ_b из отрезка $[0.5, 0.99]$. На этом отрезке функция $\dot{f}_1 + \dot{g}_2$ положительна при всех значениях τ (вычисления показали, что $\dot{f}_1 + \dot{g}_2 > 0.147$). Переменные ξ_b , η_i , как и в случае $\chi = \pi/4$, можно ввести при помощи замены переменных (2.7).

Приведем результаты численного анализа. На отрезке $[0.5, 0.99]$ отметим три точки $R^{(i)}$, которым соответствуют такие значения параметра θ_b : $\theta_b^{(1)} = 0.74957$, $\theta_b^{(2)} = 0.75652$, $\theta_b^{(3)} = 0.83902$. Все точки рассматриваемого отрезка, кроме точек $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, являются нерезонансными.

На интервале $(\theta_b^{(1)}, \theta_b^{(2)})$ величина a в уравнении (3.1) больше единицы. В граничных точках $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ этого интервала $\lambda = 2$, а в нормальной форме (3.3) имеем такие коэффициенты: $\delta = 1$, $k_{30} = 0$, $k_{40} = -0.00018$ в точке $R^{(1)}$, $k_{30} = 0.00008$ в точке $R^{(2)}$. Величина D , определенная выражением (3.8), обращается в нуль в точке $R^{(3)}$, а в остальных точках отрезка $[0.5, 0.99]$ она отлична от нуля.

На основании изложенного в разд. 3 получаем, что в предельном случае $\theta_b + \theta_c = 1$ для значений θ_b , принадлежащих отрезку $[0.5, 0.99]$, прецессия Гриоли орбитально неустойчива при $\theta_b^{(1)} \leq \theta_b \leq \theta_b^{(2)}$; при $\theta_b = \theta_b^{(3)}$ вопрос об устойчивости остался открытым; при остальных значениях θ_b регулярная прецессия Гриоли орбитально устойчива.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00831).

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré H. Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. 3 vols. Paris: Gauthier – Villars, 1892, 1893, 1899 = Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.; Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
2. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927 = Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
3. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодического движения твердого тела при наличии соударений с горизонтальной плоскостью // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 71–81.

4. Маркеев А.П., Чеховская Т.Н. О колебаниях упругого маятника // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 2. С. 18–26.
5. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 1. С. 51–58.
6. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 295 с.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
8. Маркеев А.П. Исследование устойчивости периодических движений автономной гамильтоновой системы в одном критическом случае // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 833–847.
9. Giacaglia G.E.O. Perturbation Methods in Non-Linear Systems. Berlin etc.: Springer, 1972 = Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. Moser J.K. Lectures on Hamiltonian Systems. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1968 = Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
12. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. 1947. Ser. 4. T. 26. Fasc. 3–4. P. 271–281.
13. Grioli G. Una proprietà caratteristica delle precessioni regolari del solido pesante asimmetrico // Rend. Sem. mat. Univ. Padova. 1950. V. 19. P. 237–248.
14. Гуляев М.П. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. 1955. № 3. С. 15–21.
15. Гуляев М.П. О динамически возможных регулярных прецессиях твердого тела, имеющего одну закрепленную точку // Тр. сектора мат. и мех. АН КазССР. 1958. Т. 1. С. 202–208.
16. Гуляев М.П. О регулярной прецессии несимметричного гироскопа // Теоретическая механика. Сб. науч.-метод. статей. М.: Высш. шк., 1975. Вып. 5. С. 130–137.
17. Grioli G. Questioni di stabilità riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser. 3. 1949. T. 1. P. 43–74.
18. Брюм А.З. Исследование регулярной прецессии тяжелого твердого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 1987. Вып. 19. С. 68–72.
19. Тхай В.Н. Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.

Москва

Поступила в редакцию
21.V.2002