

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. В.Ф. Журавлев

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ВОЗМУЩЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Дается определение нормальной формы возмущений нелинейной колебательной системы. Сама система, называемая порождающей, имеет произвольную форму. Формируется алгоритм, позволяющий, не трогая порождающей системы, приводить возмущение к нормальной форме. С использованием ряда Кемпбелла – Хаусдорфа, свойства кольца асимптотик и явного решения гомологического уравнения выводится одномерная рекуррентная формула произвольного приближения.

Метод нормальной формы Пуанкаре [1, 2] состоит в установлении того простейшего вида, к которому в окрестности положения равновесия может быть приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, и в указании алгоритма такого приведения. При этом предполагается, что линейная часть системы к простейшей, т.е. к жордановой, форме уже приведена, после чего преобразованиями, не меняющими линейной части, стремятся уничтожить все члены, не являющиеся резонансными. Поскольку резонансных членов существенно меньше, то достигается серьезное упрощение исходной системы, что и является основной целью метода Пуанкаре.

Между тем дифференциальная система в нормальной форме обладает принципиально важным геометрическим свойством, состоящим в том, что векторные поля линейной и нелинейной частей коммутируют. Следовательно, нелинейная часть системы порождает симметрию ее линейной части, а значит, и всей системы. Это свойство хорошо известно [3] и эффективно используется на практике. Его геометрический характер означает, в частности, что оно не зависит от того, в каких переменных векторные поля описываются. Отсюда следует, что предварительное приведение линейной части к нормальной форме Жордана не является обязательным, если целью преобразований ставить указанный геометрический факт. В методе Пуанкаре такое приведение связано лишь с конкретной процедурой построения нормальной формы.

Ниже развивается метод, позволяющий добиваться поставленной цели независимо от того, в какой форме представлена линейная часть колебательной системы. Более того, не предполагается, что одна из частей системы должна быть непременно линейной. Излагаемый алгоритм связан единственным условием равенства нулю коммутатора возмущения с порождающей частью системы.

Для дифференциальных систем, имеющих гамильтонову форму, идеи, аналогичные излагаемым ниже, использованы ранее [4, 5].

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши следующего вида:

$$dx/dt = X(x, \varepsilon) = X_0(x) + \varepsilon X_*(x, \varepsilon) \quad (1)$$

в которой x – вещественный вектор произвольной размерности, а правая часть достаточно гладкая в области определения. Вещественный скалярный параметр ε предполагается малым. Система (1) имеет вид возмущенной системы с порождающей частью $dx/dt = X_0(x)$, общее решение которой $x = \varphi(t, c)$, где $x(0) = c$, предполагается

известным. Векторное поле $\varepsilon X_*(x, \varepsilon)$ называется возмущением. Как обычно, представляет интерес поведение полной, возмущенной системы в малой окрестности порождающей.

Если $X_0(x)$ – линейная функция, то система (1) соответствует той, которая рассматривается в теории нормальной формы Пуанкаре после введения малого масштаба измерения зависимой переменной: $x \rightarrow \varepsilon x$. Система (1) – более общая, чем в методе Пуанкаре, поскольку порождающая часть в ней нелинейная, а малый параметр может присутствовать и без предварительного масштабирования. Однако в отличие от метода Пуанкаре будем рассматривать только колебательные порождающие системы, т.е. считать, что общее решение $x = \varphi(t, c)$ представляет собой условно-периодическую функцию времени [1].

Определение. Будем говорить, что возмущение $\varepsilon X_*(x, \varepsilon)$ имеет в системе (1) нормальную форму, если скобка Пуассона (коммутатор) векторных полей $X_0(x)$ и $X_*(x, \varepsilon)$ равна нулю:

$$[X_0(x), X_*(x, \varepsilon)] = 0 \quad (2)$$

Задача. Пусть возмущение в системе (1) не имеет нормальной формы. Требуется найти такую замену переменных $x \rightarrow y$, которая, не изменяя порождающей системы, приводило бы возмущение к нормальной форме.

Иными словами, ищется близкое к тождественному преобразование $x \rightarrow y$, которое систему (1) приводит к виду

$$dy/dt = Y_0(y, \varepsilon) = X_0(y) + \varepsilon Y_*(y, \varepsilon) \quad (3)$$

в котором $[X_0(y), Y_*(y, \varepsilon)] = 0$.

В этом виде порождающая часть системы (3) индуцирует группу симметрий полной системы, которая по этой причине допускает понижение порядка. Кроме того, в системе (3) реализуется принцип разделения движений. Это означает, что если известно некоторое частное решение присоединенной системы

$$dy/dt = \varepsilon Y_*(y, \varepsilon)$$

в виде $y = \xi(t)$, то ему соответствует частное решение полной системы (3), получаемое простой подстановкой решения $y = \xi(t)$ вместо произвольных постоянных c в общее решение порождающей системы: $y = \varphi(t, \xi(t))$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся аппаратом теории локальных групп Ли [6, 7]. С этой целью фазовый поток, индуцируемый системой (1), рассматриваем как однопараметрическую группу Ли с оператором

$$A = X(x, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \quad (4)$$

который в соответствии с видом системы (1) также будем представлять в виде суммы порождающей части и возмущения: $A = A_0 + A_*$. Условию (2) в терминах векторных полей эквивалентно аналогичное условие в терминах операторов $[A_0, A_*] = 0$.

Замену переменных $x \rightarrow y$ ищем также в виде однопараметрической группы Ли

$$y = \exp(\tau U)x, \quad U = Z(x, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x} \quad (5)$$

где τ – параметр группы, U – ее оператор. Иными словами, замена переменных (5) представляет собой общее решение дифференциальной системы

$$dy/d\tau = Z(y, \varepsilon), \quad y(0) = x$$

Группа с оператором U преобразует оператор A в оператор B . Связь этих трех операторов задается в виде ряда Кемпбелла – Хаусдорфа

$$B = A + \tau[A, U] + \frac{\tau^2}{2!}[[A, U], U] + \dots, \quad (6)$$

или в эквивалентной форме

$$Y(y, \epsilon) = X(y, \epsilon) + \tau[X, Z] + \frac{\tau^2}{2!}[[X, Z], Z] + \dots$$

Назовем асимптотикой порядка k оператора U по малому параметру ϵ любой оператор U_k , отличающийся от точного величинами порядка ϵ^{k+1} и выше: $U_k = U + O(\epsilon^{k+1})$. Аналогичные обозначения будем использовать и для других операторов: A_k и B_k .

Напомним основные свойства кольца асимптотик.

1. Сложение: $(A' + A'')_k = A'_k + A''_k$. Нуль кольца асимптотик k -го порядка есть любой оператор порядка большего, чем k : $0_k = O(\epsilon^{k+1})$.

2. Умножение: $(A' \cdot A'')_k = A'_k \cdot A''_k$. Единица: $1_k = 1 + O(\epsilon^{k+1})$ (кольцо асимптотик является унитарным).

3. Сдвиг по шкале порядков: $(\epsilon^s \cdot A)_k = \epsilon^s A_{k-s}$ ($k - s \geq 0$).

В дальнейшем поставим задачу последовательного нахождения асимптотик искомых операторов B и U , начиная с самых младших.

Бесконечный ряд Кемпбелла – Хаусдорфа (6), используя приведенные свойства, а также отождествляя τ с ϵ , можно переписать для асимптотик векторных полей, начиная с самой младшей, в виде последовательности конечных рядов

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \quad B_1 = A_1 + \epsilon[A_0, U_0], \quad B_2 = A_2 + \epsilon[A_1, U_1] + \frac{\epsilon^2}{2!}[[A_0, U_0], U_0], \dots \\ \dots, B_k &= A_k + \epsilon[A_{k-1}, U_{k-1}] + \sum_{i=2}^k \frac{\epsilon^i}{i!} \underbrace{[\dots[A_{k-i}, U_{k-i}], U_{k-i}], \dots]}_{i \text{ раз}} \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим в выражении для B_k слагаемое $\epsilon[A_{k-1}, U_{k-1}]$. Используя операцию сдвига по шкале порядков, это слагаемое можно представить так:

$$\epsilon[A_{k-1}, U_{k-1}] = \epsilon[A_{k-1} - A_0, U_{k-1}] + \epsilon[A_0, U_{k-1}] = \epsilon[A_{k-1} - A_0, U_{k-2}] + \epsilon[A_0, U_{k-1}]$$

(использован тот факт, что $A_{k-1} - A_0 = O(\epsilon)$). Используя полученное соотношение, выражение для B_k можно переписать в виде явной одномерной рекуррентной формулы

$$B_k = \epsilon[A_0, U_{k-1}] + R_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

позволяющей последовательно, начиная с $k = 1$, найти все асимптотики операторов B и U до любого необходимого порядка включительно. Здесь R_k – оператор, выражающийся только через младшие по сравнению с U_{k-1} асимптотики оператора U

$$R_k = A_k + (1 - \delta_{1k})\epsilon[A_{k-1} - A_0, U_{k-2}] + \sum_{i=2}^k \frac{\epsilon^i}{i!} \underbrace{[\dots[A_{k-i}, U_{k-i}], U_{k-i}], \dots]}_{i \text{ раз}} \quad (9)$$

$$(\delta_{11} = 1, \delta_{1k} = 0, k > 1)$$

Оператор R_k , играющий центральную роль в формируемой рекуррентной схеме, будем называть ее резольвентой.

Рассмотрим первое приближение нормальной формы

$$B_1 = \varepsilon[A_0, U_0] + A_1 \quad (10)$$

В этом уравнении, называемом гомологическим [8], неизвестными являются B_1 и U_0 . Для нахождения B_1 рассмотрим равенство (10) вдоль траекторий порождающей системы

$$dy/dt = X_0(y), \quad y(0) = c \Rightarrow y = \varphi(t, c) \quad (11)$$

Это означает, что, полагая все операторы в (10) выраженными в переменной y , необходимо перейти от этой переменной к постоянным интегрирования c по формуле (11).

Замена переменной в операторе A_1 осуществляется так:

$$A_1 = X_1(y, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \bar{A}_1 = \bar{X}_1(t, c, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial c} : \quad \bar{A}_1 = [A_1 \varphi(-t, y)]|_{y=\varphi(t, c)} \frac{\partial}{\partial c}$$

Аналогичным образом преобразуются и другие операторы в формуле (10), однако оператор B_1 коммутирует по условию с оператором A_0 и, следовательно, в результате такой замены своего вида не изменит: $\bar{B}_1 = B_1$, а оператор $[A_0, \bar{U}_0]$ вдоль траекторий порождающей системы равен производной по времени от оператора $\bar{U}_0$: $[A_0, \bar{U}_0] = d\bar{U}_0/dt$ ($\bar{A}_0 = A_0$). В результате в переменных c уравнение (10) приобретает вид

$$B_1 = \varepsilon d\bar{U}_0/dt + \bar{A}_1 \quad (12)$$

Вычисляя от этого уравнения среднее по времени, получим $B_1 = \langle \bar{A}_1 \rangle$, поскольку B_1 от времени не зависит, а среднее от производной равно нулю, поскольку решение порождающей системы является условно периодическим. Подставляя это выражение для B_1 в формулу (12), получаем уравнение для нахождения $\bar{U}_0$

$$\varepsilon \frac{d\bar{U}_0}{dt} = B_1 - \bar{A}_1 = -\bar{\bar{A}}_1, \quad \bar{\bar{A}}_1 = \bar{\bar{X}}_1(t, c, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial c}$$

где оператор $\bar{\bar{A}}_1$ не имеет среднего значения по времени вдоль траекторий порождающей системы. Интегрируя это уравнение, получим

$$\bar{U}_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \int \bar{\bar{A}}_1 dt$$

или, возвращаясь к исходной переменной y ,

$$U_0 = \bar{U}_0 \varphi(t, c)|_{c=\varphi(-t, y)} \frac{\partial}{\partial y}$$

Выполненные две операции: операция вычисления среднего, позволившая найти первое приближение нормальной формы B_1 , и операция решения гомологического уравнения могут быть совмещены в одной, если просто проинтегрировать по времени уравнение (12) вдоль траекторий порождающей системы

$$\int_0^t \bar{A}_1 dt = tB_1 + \varepsilon U_0 - \varepsilon \bar{U}_0 \quad (13)$$

Поскольку $\bar{B}_1 = B_1$ и $\bar{U}_0|_{t=0} = U_0$, то из формулы (13) следует, что, интегрируя вдоль общего решения порождающей системы известный оператор A_1 , получаем искомый оператор B_1 в виде коэффициента при t , а другой искомый оператор U_0 – в виде не зависящего от времени коэффициента при ε .

Для построения второго приближения нормальной формы следует выполнить аналогично предыдущему замену (11) в следующем уравнении системы (7):

$$B_2 = \varepsilon[A_0, U_1] + A_2 + \varepsilon[A_1 - A_0, U_0] + \frac{\varepsilon^2}{2}[[A_0, U_0], U_0]$$

после чего интегрирование по времени дает

$$\int_0^t \bar{R}_2 dt = tB_2 + \varepsilon U_1 - \varepsilon \bar{U}_1$$

Как и в первом приближении, коэффициентом при t является искомая асимптотика B_2 , а очередная асимптотика U_1 есть не зависящий от времени коэффициент при ε . При этом оператор R_2 выражается по формуле (9), в которой оператор U_0 уже найден на предыдущем шаге.

Сформулируем теперь весь алгоритм построения произвольного приближения нормальной формы, полагая, что все предшествующие уже построены, т.е. необходимо найти B_k и U_{k-1} , считая, что все младшие асимптотики известны. Этот алгоритм содержит три основных этапа.

1. Вычислить по формуле (9) резольвенту R_k .
2. Осуществить в R_k переход к постоянным интегрирования c по формуле

$$\bar{R}_k = [R_k \varphi(-t, y)]_{y=\varphi(t, c)} \frac{\partial}{\partial c} \quad (14)$$

3. Найти нормальную форму, усреднив (14) по явно входящему времени

$$B_k = \langle \bar{R}_k \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{R}_k dt$$

4. Вычислить в переменных c соответствующую асимптотику оператора нормализующего преобразования

$$\bar{U}_{k-1} = -\frac{1}{\varepsilon} \int [\bar{R}_k - \langle \bar{R}_k \rangle] dt$$

5. Перейти к переменным y

$$U_{k-1} = \bar{U}_{k-1} \varphi(t, c) |_{c=\varphi(-t, y)} \frac{\partial}{\partial y}$$

На этом алгоритм заканчивается, однако, как это уже было отмечено при построении первого приближения, этапы 3–5 можно заменить одним:

5. Вычислить интеграл по t от $\bar{R}_k$. Тогда искомые B_k и U_{k-1} связаны соотношением

$$\int_0^t \bar{R}_k dt = tB_k + \varepsilon U_{k-1} - \varepsilon \bar{U}_{k-1} \quad (15)$$

если выделение стоящих в правой части слагаемых очевидно и не представляет трудностей.

Найденный оператор U_{k-1} выражен в пространственных переменных y . Будучи записанным в пространственных переменных x этот же оператор в соответствии с формулой (5) задает связь переменных x и y :

$$y = \exp(\varepsilon U_{k-1})x \quad (16)$$

Записанный в переменных y этот же самый оператор определяет обратную замену

$$x = \exp(-\varepsilon U_{k-1})y \quad (17)$$

Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$$

которое в фазовых переменных перепишем в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2 \quad (18)$$

Поставим задачу: не изменяя линейной части этой системы, в частности не приводя ее к жордановой форме, найти нормальную форму нелинейных членов в определенном выше смысле, а также и необходимое для этого преобразование переменных.

Векторное поле, определяемое этой системой, таково:

$$X(x_1, x_2) = \{x_2, -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2\}$$

В соответствии с выражением (9) необходимая для построения первого приближения резольвента R_1 в рассматриваемом случае имеет вид

$$R_1 = A_1 = A = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2} + \varepsilon(1 - y_1^2)y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

Выпишем общее решение порождающей системы

$$y_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad y_2 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \quad (19)$$

В соответствии с (14) оператор R_1 следует привести к постоянным интегрирования (c_1, c_2)

$$\bar{R}_1 = R_1(y_1 \cos t - y_2 \sin t) \frac{\partial}{\partial c_1} + R_1(y_1 \sin t + y_2 \cos t) \frac{\partial}{\partial c_2} \quad (20)$$

где в полученных компонентах оператора следует заменить переменные y на постоянные c , пользуясь обращением формул (19). В результате получим

$$\bar{R}_1 = r_1(c_1, c_2, t) \frac{\partial}{\partial c_1} + r_2(c_1, c_2, t) \frac{\partial}{\partial c_2}$$

где

$$r_j = (-1)^{j+1} c_{3-j} + \frac{\varepsilon}{8} c_j [4 - c_1^2 - c_2^2 - 4(1 - c_{3-j}^2) \cos 2t + (c_j^2 - 3c_{3-j}^2) \cos 4t] - \\ - \frac{\varepsilon}{8} c_{3-j} [2(2 + (-1)^{j+1}(c_1^2 - c_2^2)) \sin 2t - (-1)^{j+1}(3c_j^2 - c_{3-j}^2) \sin 4t], \quad j = 1, 2$$

Вычислим интеграл по t от оператора $\bar{R}_1$, выполняя третий, последний этап сформулированного алгоритма (формула (15))

$$\int_0^t \bar{R}_1 dt = t \left[f_1(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + f_2(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \right] - \varepsilon \left[g_1(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + g_2(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \right]$$

$$f_j = (-1)^{j+1} y_{3-j} + \frac{\varepsilon}{8} y_j (4 - y_1^2 - y_2^2), \quad j = 1, 2$$

$$g_1(y_1, y_2) = \frac{1}{32} y_2 (8 + y_1^2 - 3y_2^2), \quad g_2(y_1, y_2) = \frac{1}{32} y_1 (8 - 5y_1^2 + 7y_2^2)$$

Поскольку оператор $\bar{U}_0$ интереса не представляет, выписывать его в явном виде не будем.

В полученном выражении содержится полная информация о нормальной форме системы Ван-дер-Поля (18) и о приводящем к ней преобразовании. Нормальную форму определяет коэффициент при t :

$$\dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2) \quad (21)$$

Не зависящий от времени коэффициент при ε определяет оператор преобразования

$$U_0 = - \left[g_1(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + g_2(y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_2} \right]$$

По формулам (16) и (17) этот оператор задает прямую и обратную замены переменных, связывающие системы (18) и (21). В частности, прямая замена имеет вид

$$y_1 = x_1 - \varepsilon g_1(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2 - \varepsilon g_2(x_1, x_2)$$

Замечания. 1. Если вычисления по формуле (9) приводят к недостоверным членам (нуль кольца асимптотик), то их следует для упрощения выкладок полагать равными нулю.

2. Если порождающая система линейна и имеет диагональный вид, то изложенный алгоритм приводит к обычной нормальной форме Пуанкаре, однако существенно более экономными выкладками, чем это делается при помощи известного алгоритма. Как уже отмечалось выше, инвариантный характер описанного алгоритма избавляет от необходимости приводить линейную часть к диагональному виду. Однако при построении высоких приближений выгодно исходить именно из диагональной линейной части, поскольку выкладки с экспонентами экономнее выкладок с тригонометрическими функциями.

Если порождающая система имеет вид, характерный для одночастотных или многочастотных систем метода Крылова–Боголюбова, то изложенный алгоритм приводит к построению соответствующих осредненных систем в произвольном приближении [9].

3. В случае, когда в линейной порождающей системе собственные частоты близки к какому-либо резонансному условию, в вычислениях появляются малые знаменатели; необходимо такой случай превращать в точно резонансный, удаляя малые линейные члены в возмущение.

4. Необходимость вычисления квадратур в случае общего положения может приводить к затруднениям при использовании формулы (15). Однако если, как это обычно принято, изучаемую дифференциальную систему представлять в полиномиальной форме, то интегрировать приходится экспоненты или тригонометрические гармоники, что легко выполняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Т. 1. Paris: Yauthier-Villars, 1892 = Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
2. Брюно А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 254 с.
3. Козлов В.В. О группах симметрий динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 531–541.
4. Журавлев В.Ф. Инвариантная нормализация неавтономных гамильтоновых систем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 356–365.
5. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
6. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
7. Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. N.Y. etc.: Springer, 1986. 497 с.
8. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
9. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.I.2002