

УДК 531.01

© 2002 г. В.В. Румянцев

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ В ПЕРЕМЕННЫХ ПУАНКАРЕ И ЧЕТАЕВА

Рассматривается голономная механическая система с k степенями свободы, состояние которой характеризуется $n \geq k$ определяющими координатами, $p < k$ параметрами Пуанкаре [1] и $k - p$ параметрами Четаева [2]. В этих переменных выводятся обобщенные уравнения Рауса и даются выражения интегральных вариационных принципов Гамильтона – Остроградского и Гамильтона (третья форма), а также принципа Гёльдера и принципа наименьшего действия в формах Лагранжа и Якоби.

1. Функция Рауса. Пусть механическая система стеснена гладкими голономными связями и ее положение в пространстве в момент времени t определяется вещественными, вообще говоря, зависимыми, переменными x_i ($i = 1, \dots, n$). Определим виртуальное перемещение системы некоторой интранзитивной k -членной группой инфинитезимальных операторов [1, 2]

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i \partial / \partial x_i, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

По повторяющимся индексам здесь и всюду далее подразумевается суммирование. Группа виртуальных перемещений определена своими структурными коэффициентами $c_{\alpha\beta}^i$

$$[X_\alpha, X_\beta] \equiv X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha = c_{\alpha\beta}^i X_i, \quad \alpha, \beta, i = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

Изменения некоторой непрерывной дифференцируемой функции $f(t, x_1, \dots, x_n)$ на виртуальном и действительном перемещениях определяются соотношениями

$$\delta f = \omega_\alpha X_\alpha f, \quad df = (\partial f / \partial t + \eta_\alpha X_\alpha f) dt \quad (1.2)$$

соответственно, причем предполагается, что оператор $\partial / \partial t$ перестановочен с группой виртуальных перемещений X_α :

$$[\partial / \partial t, X_\alpha] = 0, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

В соотношениях (1.2) ω_α – независимые параметры виртуальных перемещений, η_α – независимые параметры действительных перемещений, введенные Пуанкаре [1] и связанные соотношениями

$$\delta \eta_i = d\omega_i / dt - c_{\alpha\beta}^i \omega_\alpha \eta_\beta, \quad \alpha, \beta, i = 1, \dots, k \quad (1.3)$$

в случае, когда операторы d и δ перестановочны, $d\delta = \delta d$.

Допустим, что кинетическая энергия системы является определенно-положительной квадратичной формой

$$T(x, \eta) = \frac{1}{2} a_{ij}(x) \eta_i \eta_j, \quad i, j = 1, \dots, k \quad (1.4)$$

Введем вместо части параметров Пуанкаре η_s новые переменные – параметры Четаева [2]

$$y_s = \partial T / \partial \eta_s = a_{si} \eta_i, \quad s = p+1, \dots, k, \quad 0 < p < k \quad (1.5)$$

и выразим с помощью этих равенств параметры η_s в виде [3]

$$\eta_s = b_{sr} y_r - \gamma_{sj} \eta_j, \quad r, s = p+1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, p \quad (1.6)$$

где $b_{rs} = A_{rs} / D$, $D = \det(\partial^2 T / \partial \eta_r \partial \eta_s)_{s,r=p+1}^k \neq 0$, $\gamma_{sj} = b_{sr} a_{rj}$, A_{rs} – алгебраическое дополнение элемента a_{rs} определителя D . Подстановка равенств (1.6) в (1.4) приводит к выражению кинетической энергии системы в переменных Пуанкаре и Четаева

$$T^*(x, \eta, y) = \frac{1}{2} a_{ij}^* \eta_i \eta_j + \frac{1}{2} b_{rs} y_r y_s \quad (1.7)$$

где

$$a_{ij}^* = a_{ij} - b_{rs} a_{rj} a_{si}, \quad i, j = 1, \dots, p; \quad r, s = p+1, \dots, k$$

Предположим, что к системе приложены как потенциальные силы с силовой функцией $U(t, x_1, \dots, x_n)$, так и непотенциальные обобщенные силы $Q_\alpha = F_v \cdot X_\alpha r_v$, где F_v – непотенциальная сила, приложенная к материальной точке с радиусом-вектором r_v ($v = 1, \dots, N$). Функцию Лагранжа обозначим через

$$L(t, x, \eta) = T(x, \eta) + U(t, x)$$

Определим функцию Рауса соотношением

$$R(t, x, \eta, y) = L(t, x, \eta) - \eta_s y_s, \quad s = p+1, \dots, k \quad (1.8)$$

в правой части которого все η_s выражены через y_s формулами (1.6), так что

$$R(t, x, \eta, y) = \frac{1}{2} a_{ij}^* \eta_i \eta_j + \gamma_{sj} \eta_j y_s - \frac{1}{2} b_{rs} y_r y_s + U(t, x_i) \quad (1.9)$$

Сравнивая вариации обеих частей равенства (1.8), получаем соотношения

$$X_\alpha R = X_\alpha L, \quad \frac{\partial R}{\partial \eta_r} = \frac{\partial L}{\partial \eta_r}, \quad \frac{\partial R}{\partial y_s} = -\eta_s, \quad \alpha = 1, \dots, k, \quad r = 1, \dots, p, \quad s = p+1, \dots, k \quad (1.10)$$

справедливые в силу независимости начальных значений координат и скоростей для начального момента времени, за который мы вольны выбирать рассматриваемый [4].

2. Вывод интегральных вариационных принципов механики. Синхронное варьирование. Принимая во внимание равенство (1.8) и учитывая, что работа непотенциальных сил на виртуальных перемещениях $A = \omega_\alpha Q_\alpha$, заключаем, что принцип Гамильтона–Остроградского [3] в переменных Пуанкаре и Четаева принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta(R + \eta_s y_s) + \omega_\alpha Q_\alpha] dt = 0; \quad \omega_\alpha = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad \alpha = 1, \dots, k \quad (2.1)$$

Принцип представляет собою условие, необходимое и достаточное для действительности движения механической системы под действием приложенных к ней сил. При этом действительное движение ("прямой путь") сравнивается с варьированными движениями ("окольными путями") при одинаковых для всех движений конфигурациях системы как в начальный t_0 , так и в конечный t_1 моменты времени, выбираемые произвольно. Условие (2.1) приводит к равенству

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\omega_i (X_i R + Q_i) + \frac{\partial R}{\partial \eta_r} \delta \eta_r + \left(\frac{\partial R}{\partial y_s} + \eta_s \right) \delta y_s + y_s \delta \eta_s \right] dt = 0$$

которое при учете соотношений (1.3) и интегрирования по частям приводится к виду

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \eta_r} \omega_r + y_s \omega_s \right) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(-\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \eta_r} - c_{r\alpha}^\beta \eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + X_r R + Q_r \right) \omega_r + \right. \\ \left. + \left(-\frac{dy_s}{dt} - c_{s\alpha}^\beta \eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + X_s R + Q_s \right) \omega_s + \left(\frac{\partial R}{\partial y_s} + \eta_s \right) \delta y_s \right] dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1$$

Выражение вне интеграла равно нулю в силу условий на концах. Предполагая величины ω_r , ω_s и δy_s произвольными и независимыми внутри интервала (t_0, t_1) и учитывая выражения (1.5), получаем обобщенные уравнения движения Рауса в переменных Пуанкаре и Четаева

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \eta_r} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} \left(c_{\alpha r}^\beta \eta_\alpha - c_{sr}^\beta \frac{\partial R}{\partial y_s} \right) + y_\delta \left(c_{\alpha r}^\delta \eta_\alpha - c_{sr}^\delta \frac{\partial R}{\partial y_s} \right) + X_r R + Q_r \quad (2.2)$$

$$\frac{dy_s}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} \left(c_{\alpha s}^\beta \eta_\alpha - c_{\gamma s}^\beta \frac{\partial R}{\partial y_\gamma} \right) + y_\delta \left(c_{\alpha s}^\delta \eta_\alpha - c_{\gamma s}^\delta \frac{\partial R}{\partial y_\gamma} \right) + X_s R + Q_s, \quad \eta_s = -\frac{\partial R}{\partial y_s}$$

$r, \alpha, \beta = 1, \dots, p, \quad s, \gamma, \delta = p+1, \dots, k$

Если $p = k$ ($p = 0$), эти уравнения принимают вид уравнений Пуанкаре (Четаева).

В случае, когда функция Рауса не зависит явно от времени t и все непотенциальные силы $Q_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$), уравнения (2.2) имеют интеграл энергии [3]

$$\eta_r \frac{\partial R}{\partial \eta_r} - R = T^* - U = h = \text{const}, \quad r = 1, \dots, p \quad (2.3)$$

Четаев [2] ввел важное понятие циклических перемещений в случае отсутствия непотенциальных сил. Перемещения X_α ($\alpha = p+1, \dots, k$) названы циклическими перемещениями, если они удовлетворяют условиям

$$1) X_\alpha L = 0, \quad 2) [X_\alpha X_\beta] = 0, \quad \beta = 1, \dots, k$$

Согласно условиям 2), все структурные коэффициенты $c_{\alpha\beta}^i = 0$, если индексы α или β равны одному из чисел $p+1, \dots, k$. В этом случае при учете соотношений (1.10) вторая группа уравнений (2.2) дает первые интегралы

$$y_s = c_s = \text{const}, \quad s = p+1, \dots, k \quad (2.4)$$

а первая группа уравнений (2.2) принимает вид [2]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \eta_r} = c_{\alpha r}^\beta \eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\beta} + c_{\alpha r}^\delta \eta_\alpha c_\delta + X_r R + Q_r, \quad \alpha, \beta, r = 1, \dots, p, \quad \delta = p+1, \dots, k \quad (2.5)$$

После интегрирования этих уравнений для нециклических перемещений параметры Пуанкаре η_s ($s = p+1, \dots, k$) определяются соотношениями

$$\eta_s = -\frac{\partial R}{\partial c_s}, \quad R = R(t, x_i, \eta_r, c_s)$$

В отсутствие непотенциальных сил, т.е. при $Q_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$), из соотношения (2.1) следует третья форма принципа Гамильтона в переменных Пуанкаре и Четаева

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (R + \eta_s y_s) dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad s = p+1, \dots, k, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.6)$$

в отличие от первой формы в переменных Пуанкаре и второй формы в переменных Четаева

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \eta) dt = 0 \quad \text{и} \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} [y_s \eta_s - H(t, x, y)] dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \quad (2.7)$$

где функция Гамильтона

$$H(t, x, y) = y_s \eta_s - L(t, x, \eta), \quad s = 1, \dots, k$$

Третья форма (2.6) принципа Гамильтона занимает промежуточное положение между первой и второй формами (2.7) этого принципа. Эта форма принципа имеет самостоятельное значение из-за предположения о произвольности и независимости вариаций δy_s от ω_i и $\delta \eta_r$ внутри интервала (t_0, t_1) . Следует также иметь в виду, что в общем случае кривые сравнения могут не удовлетворять соотношениям $y_s = \partial L / \partial \eta_s$.

3. Вывод интегральных вариационных принципов механики. Асинхронное варьирование. В изложенных выше вариационных принципах (2.1), (2.6) и (2.7) рассматривались синхронные вариации: точке P на прямом пути в момент t ставилась в соответствие точка P' на окольном пути в тот же самый момент времени. Будем теперь рассматривать асинхронное варьирование, когда точке P с координатами x_i на действительной траектории в момент t ставится в соответствие точка P' с координатами $x_i + \delta x_i$ на варьированной траектории в момент времени $t + \delta t$. Вариации $\delta x_i, \delta t$ предполагаются функциями класса C_2 , а соотношения между декартовыми и определяющими координатами системы – не зависящими от времени. При асинхронном варьировании операторы d и δ неперестановочны, и вместо равенств $d\delta = \delta d$ и (1.3) будем иметь формулы

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta x_i - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \delta t, \quad \delta \eta_i = \frac{d\omega_i}{dt} - c_{\alpha\beta}^i \omega_\alpha \eta_\beta - \eta_i \frac{d}{dt} \delta t, \quad \alpha, \beta, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.1)$$

Используя эти соотношения и интегрирование по частям, из общего уравнения динамики [4] получим вместо (2.1) принцип Гёльдера [5]

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(R + \eta_s y_s) + \left(\eta_r \frac{\partial R}{\partial \eta_r} + \eta_s y_s \right) \frac{d}{dt} \delta t - \frac{\partial R}{\partial t} \delta t + \omega_i Q_i \right] dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \quad (3.2)$$

если параметры ω_i ($i = 1, \dots, k$) представляют собой виртуальные перемещения в каждый момент времени, уничтожающиеся в моменты t_0 и t_1 , тогда как функция δt не обязательно обращается в нуль при $t = t_0, t_1$.

Легко видеть, что справедлива формула

$$\eta_r \frac{\partial R}{\partial \eta_r} + \eta_s y_s = 2T^*, \quad r = 1, \dots, p, \quad s = p+1, \dots, k \quad (3.3)$$

с помощью которой равенство (3.2) представляется соотношением

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(R + \eta_s y_s) + 2T^* \frac{d}{dt} \delta t - \frac{\partial R}{\partial t} \delta t + \omega_i Q_i \right] dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0, t_1 \quad (3.4)$$

которое, как и (3.2), выражает принцип Гёльдера в переменных Пуанкаре и Четаева: если сравнить действительное движение материальной системы с движением, немного отличающимся от него, причем начальное и конечное положения системы остаются неварьированными, а перемещения из каждого положения действительного движения в соответствующее положение варьированного движения являются виртуальными, то справедливы соотношения (3.2) и (3.4).

При этом варьирование можно еще специализировать, пользуясь первым или вторым способами варьирования, выделенными Гёльдером [5]

1°. В случае синхронных вариаций, когда соответствующие положения действительного и варьированного движений проходятся одновременно, т.е. $\delta t \equiv 0$, равенства (3.2), (3.4) принимают вид принципа Гамильтона–Остроградского (2.1), а также, если и $Q_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$), – принципа Гамильтона (2.6).

2°. В случае асинхронных вариаций и отсутствия силовой функции, т.е. при $U(t, x) = 0$, согласно равенствам (1.7) и (1.8) имеем

$$R(x, \eta, y) + \eta_s y_s = T^*(x, \eta, y), \quad \frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad (3.5)$$

Положим

$$\delta T^* = \omega_i Q_i, \quad i = 1, \dots, k \quad (3.6)$$

т.е. потребуем, чтобы разность между кинетическими энергиями для взаимно соответствующих состояний обоих движений равнялась работе, которую совершили бы действующие силы на перемещениях, соединяющих соответствующие положения. Этим определяется, каким образом должна пробегаться непрерывная последовательность варьированных положений. Для такого специального вида вариаций равенства (3.4)–(3.6) приводят к соотношению

$$\int_{t_0}^{t_1} 2(\delta T^* dt + T^* d\delta t) = \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T^* dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1 \quad (3.7)$$

Равенство (3.7) представляет выведенный Гёльдером принцип наименьшего действия в его расширенной форме. Более узкая форма принципа наименьшего действия будет изложена в следующих двух разделах.

4. Принцип наименьшего действия в форме Лагранжа. Предположим, что функция Рауса не зависит явно от времени, а непотенциальные силы $Q_i = 0$, так что существует интеграл энергии (2.3). Предоставленная самой себе механическая система может выбирать свои движения из движений с заданным запасом полной энергии h , что позволяет ограничить множество сравниваемых траекторий условием (2.3) [4].

При условиях $\partial R / \partial t = 0$, $Q_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$) принцип Гёльдера (3.4) принимает вид

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(R + \eta_s y_s) + 2T^* \frac{d}{dt} \delta t \right] dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad s = p+1, \dots, k \quad (4.1)$$

Используя соотношение

$$R = \eta_r \partial R / \partial \eta_r - h \quad (4.2)$$

следующее из интеграла энергии (2.3), представим равенство (4.1) в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(2\delta T^* + 2T^* \frac{d}{dt} \delta t \right) dt - (t_1 - t_0) \delta h = 0$$

из которого следует принцип наименьшего действия в форме Лагранжа в переменных Пуанкаре и Четаева

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T^* dt = 0, \quad \delta h = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1; \quad i = 1, \dots, k \quad (4.3)$$

Действительное движение консервативной голономной системы между двумя данными конфигурациями отличается от кинематически возможных движений, которые происходят между теми же конфигурациями и с той же полной энергией h , что и

действительное движение, тем, что для действительного движения полная вариация действия по Лагранжу $\int_{t_0}^{t_1} 2T^* dt$ имеет стационарное значение.

Отметим, что вследствие существования интеграла энергии время перехода системы из одного положения в другое зависит от пути и им определяется, так что верхний предел t_1 интеграла в (4.3) будет переменным, а вариация интеграла (4.3) должна быть полной.

Очевидно, принцип (4.3) аналогичен его виду в переменных Пуанкаре ($T^* = T$).

Принцип наименьшего действия выражает, подобно принципу Гамильтона, условие, необходимое и достаточное для действительного движения, и из него можно вывести уравнения движения. В самом деле, рассмотрим функцию Лагранжа с множителем λ для условной вариационной задачи (4.3)

$$F = 2T^* + \lambda(T^* - U - h)$$

Условие трансверсальности для скользящего конца на верхнем пределе t_1 интеграла

$$F - \eta_r \frac{\partial F}{\partial \eta_r} - \eta_s \frac{\partial F}{\partial \eta_s} = 0, \quad r = 1, \dots, p; \quad s = p+1, \dots, k$$

приводит к равенству $-2(1+\lambda)T^* = 0$, $\lambda = -1$, и, с учетом соотношения (1.8), получаем

$$F = R + \eta_s y_s + h$$

Следовательно, уравнения Эйлера для вариационной задачи с подынтегральной функцией F имеют в переменных Пуанкаре и Четаева вид уравнений движения (2.2) при $Q_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$).

Отметим, что если в принципе Гёльдера (3.2) заменить с помощью (4.2) слагаемое $\eta_r \partial R / \partial \eta_r$ на $R + h$, то при условиях $\partial R / \partial t = 0$, $Q_i = 0$ получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta(R + \eta_s y_s) + (R + \eta_s y_s + h) \frac{d}{dt} \delta t \right] dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1$$

т.е.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (R + \eta_s y_s) dt = -h \delta t \Big|_{t_0}^{t_1}; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1$$

Отсюда следует обобщение принципа Гамильтона [6] в переменных Пуанкаре и Четаева

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (R + \eta_s y_s + h) dt = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } t = t_0, t_1 \quad (4.4)$$

5. Принцип наименьшего действия в форме Якоби. Якоби [7] исключил время t из принципа Лагранжа при помощи интеграла энергии и свел все к пространственным элементам, придав тем самым принципу наименьшего действия геометрический характер [4]. Кроме того, он показал, что минимум интеграла имеет место не между двумя любыми положениями системы, но только тогда, когда начальное и конечное положение достаточно близки одно к другому.

Выберем некоторую новую независимую переменную τ так, чтобы ее значения располагались между пределами τ_0 и τ_1 , не зависящими от времени. В качестве τ можно взять, например, одну из координат x_i , которая в рассматриваемом интервале изме-

няется монотонно вместе с t [6, 7]. При движении системы координаты x_i ($i = 1, \dots, n$) будут некоторыми функциями переменной τ , производные по которой обозначим через $x'_i = dx_i / d\tau$. Соответствующие скоростям x'_i параметры Пуанкаре обозначим через $\tilde{\eta}_s$ и, аналогично (1.4), введем в рассмотрение квадратичную форму

$$\tilde{T}(x, \tilde{\eta}) = \frac{1}{2} a_{ij} \tilde{\eta}_i \tilde{\eta}_j$$

Тогда будем иметь соотношения

$$T = \tilde{T} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = U + h, \quad \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\frac{U + h}{\tilde{T}}} \quad (5.1)$$

Принимая во внимание равенство $T = T^*$, запишем принцип (4.3) в переменных Пуанкаре $x_i, \tilde{\eta}_s$ в виде

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} 2\sqrt{\tilde{T}(U + h)} d\tau = 0; \quad \delta h = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } \tau = \tau_0, \tau_1; \quad i = 1, \dots, k \quad (5.2)$$

Это равенство представляет принцип наименьшего действия в форме Якоби.

В действительном движении действие по Якоби принимает стационарное значение по сравнению с его значениями для бесконечно близких соседних движений, переводящих систему из того же начального положения в то же конечное положение при соблюдении первого из равенств (5.1) с тем же значением постоянной h , что и в действительном движении.

Таким образом, принцип Якоби сводит задачу определения траектории изображающей точки в x -пространстве к задаче вариационного исчисления (5.2) с фиксированными концами. Скорость движения изображающей точки вдоль траектории находится из интеграла энергии.

В заключение выразим принцип Якоби в переменных Пуанкаре и Четаева. Сравнивая принцип (5.2) с первой формой принципа Гамильтона (2.7), видим, что подынтегральное выражение в (5.2) можно принять за новую функцию Лагранжа $\tilde{L}(x_i, \tilde{\eta}_j)$ с независимой переменной τ и скоростями x'_i [7]. Аналогично функции (1.8) вводим в рассмотрение функцию Рауса

$$\tilde{R}(x_i, \tilde{\eta}_r, \tilde{y}_s) = \tilde{L}(x_i, \tilde{\eta}_j) - \tilde{\eta}_s \tilde{y}_s, \quad \tilde{L}(x_i, \tilde{\eta}_j) = 2\sqrt{\tilde{T}(U + h)} \quad (5.3)$$

где

$$\tilde{y}_s = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{\eta}_s} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{\eta}_s} \sqrt{\frac{U + h}{\tilde{T}}} = y_s, \quad s = p + 1, \dots, k$$

Сравнивая вариации обеих частей равенства (5.3), находим соотношения, аналогичные соотношениям (1.10). В результате получаем выражение принципа Якоби в переменных Пуанкаре и Четаева

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} [\tilde{R}(x_i, \tilde{\eta}_r, y_s) + \tilde{\eta}_s y_s] d\tau = 0; \quad \delta h = 0; \quad \omega_i = 0 \quad \text{при } \tau = \tau_0, \tau_1 \quad (5.4)$$

Нетрудно видеть, что уравнения экстремалей вариационной задачи (5.4) при возвращении к независимой переменной t посредством соотношения (5.1) принимают вид уравнений движения (2.2) с $Q_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196) и Федеральной целевой программы "Интеграция".

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique // C.R. Acad. Sci. Paris, 1901. V 132. P. 369–371.
2. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
3. *Румянцев В.В.* Об уравнениях Рауса и вариационных принципах // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 557–566.
4. *Четаев Н.Г.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 367 с.
5. *Гельдер О.* О принципах Гамильтона и Мопертюи // Вариацион. принципы механики. М.: Физматгиз, 1959. С. 538–563.
6. *Pars L.A.* A Treatise on Analytical Dynamics. L.: Heinemann, 1965 = *Парс Л.А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
7. *Jacobi C.G.* Vorlesungen über Dynamik. Berlin: G. Reimer, 1884 = *Якоби К.* Лекции по динамике. Л.; М.: Глав. ред. общетех. лит., 1936. 270 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.V.2002