

УДК 531.36

© 2002 г. Ю.Ф. Голубев

ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ МОДУЛЕМ СКОРОСТИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Исследуется задача о движении материальной точки с постоянным модулем скорости в ньютоновом центральном поле тяготения двумя способами: с использованием уравнений Лагранжа с множителем и применением уравнений динамики, предложенных ранее [1] для систем с нелинейными по скоростям неголономными связями. Построена фазовая диаграмма движения. Изучена структура траекторий в зависимости от начальных условий. Получены в виде квадратур формулы для расчета времени движения по траектории и угловой дальности полета. Качественно исследованы свойства несобственных интегралов, выражающих угловую дальность. Указанные свойства проиллюстрированы результатами численного исследования. Проанализирована возможность выполнения элементарных маневров в окрестности притягивающего центра.

Задача о движении материальной точки с постоянным модулем скорости в ньютоновом центральном поле тяготения полезна для изучения возможности построения различных маневров летательных аппаратов в космосе. Не останавливаясь на способах поддержания постоянной абсолютной скорости движения космического аппарата и полагая для простоты, что изменение его массы в ходе маневра не происходит, условие постоянства величины скорости можно представить как нелинейную по скоростям неголономную механическую связь, стесняющую движение материальной точки. Существует несколько вариантов процедуры получения уравнений динамики для задач этого класса. Например, в предположении об идеальности связи для рассматриваемой задачи были получены [2] уравнения движения с множителем Лагранжа в сферических координатах; однако их аналитическое решение не было построено.

Был предложен [1] вариант общих уравнений динамики в лагранжевых координатах для систем с идеальными неголономными нелинейными по скоростям связями. Этот вариант не содержит множителей Лагранжа, а применяемая в нем процедура составления уравнений динамики обобщает процедуру составления уравнений Воронца. В ряде случаев (например, нелинейные аналоги систем Чаплыгина и, в частности, рассматриваемая задача) указанный вариант общих уравнений динамики может оказаться предпочтительным, что и демонстрируется в дальнейшем изложении.

Задача о движении материальной точки с постоянной величиной скорости в центральном поле, в отличие от стандартной задачи о пассивном движении точки в центральном поле тяготения, не имеет векторного интеграла кинетического момента. Отсутствует в ней и интеграл энергии. Вместе с тем, как это будет показано ниже, в данной задаче сохраняется направление вектора кинетического момента, и эту задачу можно выбором подходящей системы координат привести к аналогу системы Чаплыгина. В результате удастся получить дополнительный первый интеграл и выполнить достаточно подробный качественный анализ движения точки.

В данной работе показано, что каждому значению скорости соответствует круговая орбита, отделяющая множество траекторий, имеющих бесконечно удаленную точку, от множества траекторий, содержащихся целиком внутри указанной орбиты. Семейство всех траекторий инвариантно относительно группы вращений вокруг притягивающего центра. Существуют траектории, навивающиеся с бесконечным числом оборотов на круговую орбиту как изнутри, так и снаружи орбиты относительно притягивающего центра. Кроме того, существуют траектории с любым конечным числом оборотов вокруг притягивающего центра. Если такая

орбита приходит из бесконечности, то, совершив указанное число оборотов, она снова удаляется в бесконечность, не достигнув круговой орбиты. Аналогично, траектория, приходящая со стороны притягивающего центра, снова возвращается к притягивающему центру, не достигнув круговой орбиты.

1. Общие уравнения динамики. Пусть в пространстве R^3 конфигурация системы N материальных точек с учетом всех геометрических связей (механических и серво-связей) однозначно определена координатами $q_1, \dots, q_n$, $n \leq 3N$, так что радиус-векторы всех материальных точек системы выражаются функциями $\mathbf{r}_\gamma = \mathbf{r}_\gamma(q_1, \dots, q_n, t)$ ($\gamma = 1, \dots, N$).

Предположим, что на систему наложены дифференциальные связи

$$\phi_j(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (1.1)$$

Пусть, как обычно

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^N m_\gamma v_\gamma^2, \quad Q_i = \sum_{\gamma=1}^N \mathbf{F}_\gamma \frac{\partial \mathbf{r}_\gamma}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

кинетическая энергия и обобщенные силы системы, m_γ – массы, v_γ – скорости точек системы, $\mathbf{F}_\gamma$ – активные силы. В предположении, что связи идеальны, можно воспользоваться принципом Даламбера – Лагранжа

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0$$

для любых виртуальных перемещений $\{\delta q_i, i = 1, \dots, n\}$, определенных системой уравнений [3]

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Уравнения динамики с множителями Лагранжа λ_j примут вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

Множители λ_j находятся с помощью уравнений связей (1.1).

Дадим вариант уравнений динамики с исключенными множителями Лагранжа [1, 4]. Будем считать, что ранг матрицы Якоби

$$\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)}$$

равен m . Это означает, что система связей выделяет в пространстве скоростей $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ поверхность размерности $n - m$. Представим ее в параметрической форме

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_1, \dots, q_n, \pi_1, \dots, \pi_{n-m}), \quad i = 1, \dots, n$$

со свободными квазискоростями $\pi_1, \dots, \pi_{n-m}$. Квазискоростям $\pi_k(t)$ поставим в соответствие квазикоординаты $\pi_k(t)$.

Возьмем стандартное правило частного дифференцирования по квазикоординате π_k

$$\frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} = \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \pi_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\pi}_k} \quad (1.3)$$

где $f(q_1, \dots, q_n, t)$ – произвольная функция.

Приведем дифференциальные связи к виду

$$\dot{q}_{p+v} = \Phi_{p+v}(t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p), \quad p = n - m, \quad v = 1, \dots, m \quad (1.4)$$

приняв $\dot{\pi}_i = \dot{q}_i$ ($i = 1, \dots, p$), и составим функции

$$T^* = T^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p, t), \quad \Phi_{p+v}^*(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_p, t)$$

Функция T^* получается из кинетической энергии системы T заменой скоростей $\dot{q}_{p+v}$ ($v = 1, \dots, m$) их выражениями через дифференциальные связи, а функции Φ_{p+v}^* совпадают по виду с соответствующими функциями Φ_{p+v} . Однако производные функций T^* и Φ_{p+v}^* берутся с учетом правила (1.3) дифференцирования по квазиординате

$$\frac{\partial q_{p+v}}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{q}_{p+v}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \Phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_k}, \quad v = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, p$$

Частные производные от функций T , Φ_{p+v} будем по-прежнему вычислять так, как будто все их аргументы независимы. Тогда координаты q_i , определяющие движение механической системы, стесненное дифференциальными связями, удовлетворяют [1] системе уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i^* + \tilde{Q}_i, \quad i = 1, \dots, p, \quad p = n - m \quad (1.5)$$

где

$$Q_i^* = Q_i + \sum_{v=1}^m Q_{p+v} \frac{\partial \Phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \tilde{Q}_i = \sum_{v=1}^m \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{p+v}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_{p+v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Phi_{p+v}^*}{\partial q_i} \right]$$

Система уравнений (1.5) справедлива при любых наложенных на систему связях. Но она не полна. Чтобы эту систему замкнуть, требуется добавить к ней кинематические уравнения (1.4).

2. Векторное уравнение движения в ньютоновом центральном поле. Возьмем неподвижный правоориентированный ортонормированный репер $Oe_1e_2e_3$ с началом O в притягивающем центре. Радиус-вектор материальной точки и ее вектор скорости обозначим соответственно

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{v} = \dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{r}_3 \mathbf{e}_3$$

Тогда условие постоянства модуля скорости можно представить в виде

$$v^2 = \dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2 = v_0^2 = \text{const} \quad (2.1)$$

Сила тяготения $\mathbf{F}$ и ее силовая функция U имеют соответственно вид

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu m}{r^3} \mathbf{r}, \quad U = \frac{\mu m}{r}; \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

где μ – постоянная тяготения, m – масса точки.

Приняв связь (2.1) идеальной, рассмотрим уравнение движения с множителем Лагранжа λ . В соответствии с уравнением (1.2) найдем

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \lambda \mathbf{v} \quad (2.2)$$

Следовательно, реакция идеальной связи направлена вдоль вектора скорости.

Множитель λ нетрудно определить. Продифференцировав уравнение связи (2.1) в силу уравнения движения, получим

$$0 = \mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \lambda v_0^2, \quad \lambda = \frac{\mu}{r^3 v_0^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Таким образом, уравнение (2.2) принимает вид

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu}{r^3 v_0^2} [\mathbf{v} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v})]$$

Умножив обе части этого уравнения слева векторно на $\mathbf{r}$, составим уравнение изменения удельного кинетического момента $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ материальной точки относительно притягивающего центра O

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \lambda \boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu \boldsymbol{\sigma}}{r^3 v_0^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \quad (2.3)$$

Отсюда следует, что вектор кинетического момента сохраняет свою ориентацию в абсолютном пространстве, а движение материальной точки происходит в неподвижной плоскости, перпендикулярной этому вектору. Умножим обе части уравнения (2.3) скалярно на $\boldsymbol{\sigma}$

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma^2}{dt} = \frac{\mu \sigma^2}{r^2 v_0^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{v} \right) = \sigma^2 \frac{\mu \dot{r}}{r^2 v_0^2}, \quad \dot{r} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}}{r}$$

Видим, что если в какой-нибудь момент времени $\sigma = 0$ (скорость направлена вдоль радиус-вектора), то это равенство будет справедливо и в любой другой момент времени. Если $\sigma \neq 0$, то имеет место первый интеграл

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{v_0^2} \left(\frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r} \right), \quad \sigma_0 = \sigma(t_0), \quad r_0 = r(t_0) \quad (2.4)$$

выражающий зависимость величины кинетического момента от расстояния до притягивающего центра.

3. Уравнение движения в полярных координатах. Направим базисный вектор $\mathbf{e}_3$ по вектору $\boldsymbol{\sigma}$. Тогда движение будет происходить в плоскости $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ материальной точки примет вид

$$\mathbf{r} = r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2$$

Полярные координаты (r, ϑ) выберем так, чтобы было

$$r_1 = r \cos \vartheta, \quad r_2 = r \sin \vartheta$$

Воспользуемся уравнениями (1.5), приняв $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$. Кинетическая энергия, силовая функция и уравнение связи имеют вид

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2), \quad U = \frac{\mu m}{r}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}}{r} = \varphi(r, \dot{r})$$

(знак плюс перед корнем выбран из-за того, что направление вектора $\mathbf{e}_3$ совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{\sigma}$). После исключения величины $\dot{\vartheta}$ из выражения для кинетической энергии получим $T^* \equiv m v_0^2 / 2$. Кроме того,

$$\tilde{Q}_r = m r^2 \dot{\vartheta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right], \quad Q_r^* = -\frac{\mu m}{r^2}$$

Составим динамическое уравнение (1.5)

$$\tilde{Q}_r + Q_r^* = 0 \rightarrow r^2 \dot{\vartheta} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] - \frac{\mu}{r^2} = 0 \quad (3.1)$$

Умножив это уравнение на $\dot{r}$ и выполнив преобразование выражения в квадратных скобках, найдем

$$r^2 \dot{\vartheta} \frac{d}{dt} \left(\dot{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} - \varphi \right) - \frac{\mu \dot{r}}{r^2} = 0$$

Учтем, что $\sigma = r^2 \dot{\vartheta} = r \sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}$. Тогда последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\mu \dot{r}}{r^2 v_0^2}$$

и дает уже полученный выше первый интеграл (2.4).

4. Приведение решения к квадратурам. Сначала рассмотрим стационарные движения. Первое из них – это движение точки вдоль луча, исходящего из притягивающего центра. Такому движению отвечает $\sigma \equiv 0$. Как уже отмечалось, указанное решение существует. Для его реализации достаточно направить скорость точки коллинеарно начальному радиус-вектору, и точка будет двигаться с постоянной скоростью вдоль соответствующего луча в направлении либо от притягивающего центра, либо к притягивающему центру.

Второе стационарное движение – это движение точки по окружности с постоянной величиной скорости v_0 . Чтобы получить такое решение, рассмотрим уравнение (3.1). В нем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{r}} = -\frac{\dot{r}}{r \sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\sqrt{v_0^2 - \dot{r}^2}}{r^2}$$

Приняв теперь в (3.1) $\dot{r} \equiv 0$ (направление скорости перпендикулярно радиус-вектору), найдем условие согласования начального значения радиуса

$$v_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$$

Другими словами, начальное значение радиуса должно быть таким, чтобы скорость v_0 оказалась для него первой космической скоростью. Отметим, что при таком движении по окружности $\lambda \equiv 0$, и реакция связи отсутствует.

Для исследования нестационарных движений воспользуемся первым интегралом (2.4), который представим в виде

$$\sqrt{1 - y^2} = \frac{f(x)}{a}, \quad f(x) = x e^{-x}, \quad y = \frac{\dot{r}}{v_0}, \quad x = \frac{\mu}{v_0^2 r}, \quad a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}} \quad (4.1)$$

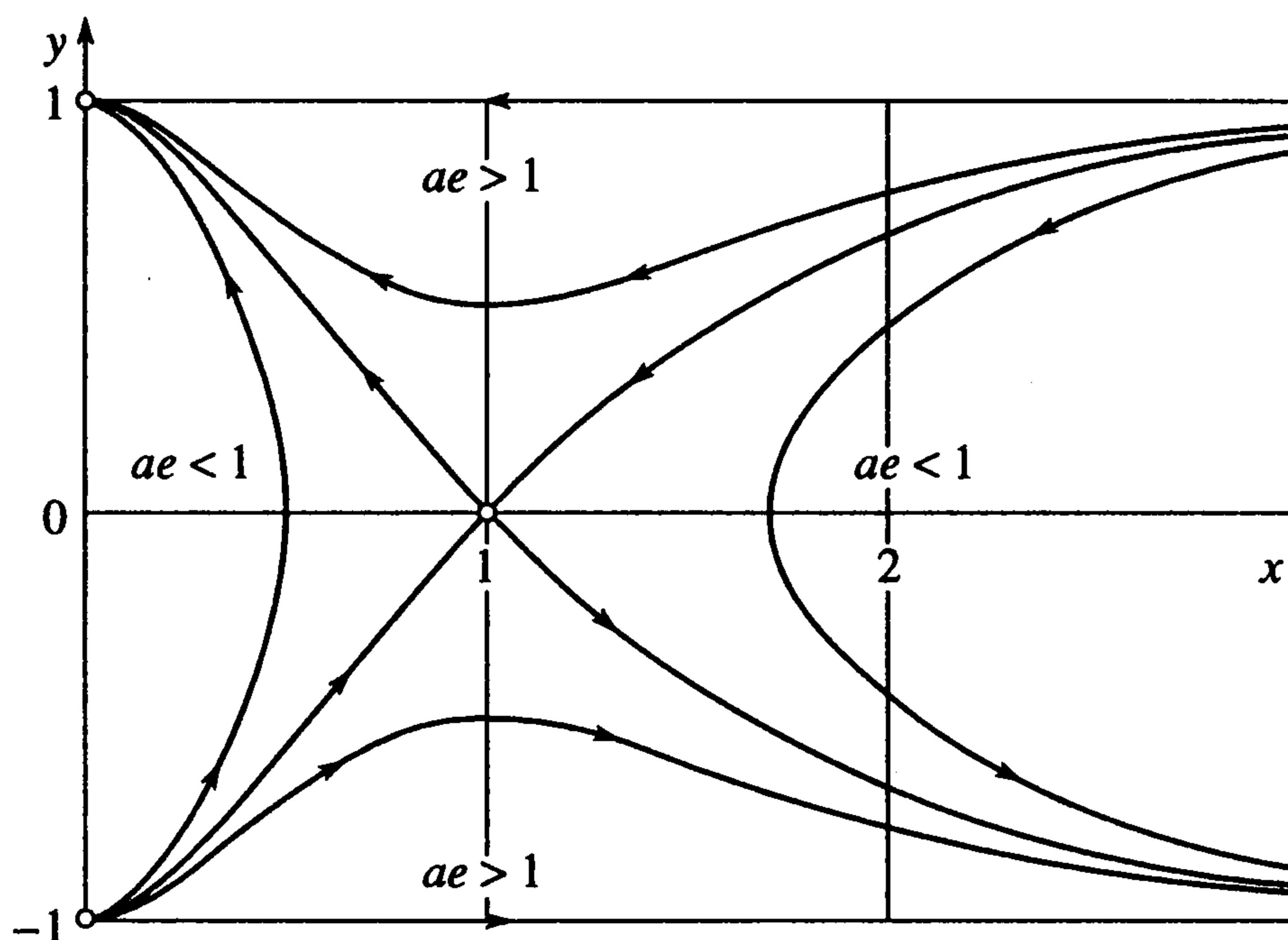
Область определения переменной x выражается неравенствами

$$f(x) = x e^{-x} \leq a, \quad \dot{x} > 0 \quad (4.2)$$

При $x > 0$ функция $f(x)$ положительна и имеет единственный максимум $f(1) = e^{-1}$. Кроме того, $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \infty$. При $x = 2$ она имеет точку перегиба.

При $\dot{r} \neq 0$ справедливы формулы

$$|\dot{r}| = v_0 g(x), \quad \dot{x} = -\frac{\mu(\text{sign } \dot{r})}{v_0 r^2} g(x), \quad \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{v_0}{a \dot{r}} e^{-x}; \quad g(x) = \sqrt{1 - \frac{f^2(x)}{a^2}} \quad (4.3)$$



Фиг. 1

Поэтому в области постоянства знака $\dot{r}$ имеют место квадратуры

$$t = t_0 - \frac{\mu a (\text{sign } \dot{r})}{v_0^3} \int_{x_0}^x \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}}, \quad \vartheta = \vartheta_0 - (\text{sign } \dot{r}) \int_{x_0}^x \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2 e^{-2x}}} \quad (4.4)$$

5. Качественное исследование движения. Разрешив уравнение (4.1) относительно y , получим на плоскости (x, y) семейство кривых по параметру a , образующих фазовую диаграмму (фиг. 1) радиальной составляющей движения

$$|y| = g(x) \quad (5.1)$$

В зависимости от величины a могут представиться следующие случаи.

5.1. Случай $ae > 1$: $ef(x_0) > \sqrt{1 - y_0^2}$. Это означает, что модуль радиальной составляющей начальной скорости достаточно велик. Переменная y ни при каком значении радиуса не обращается в нуль. Из-за того, что $f(x) > 0$, не обращается в нуль и трансверсальная составляющая скорости. Если $\dot{r}_0 < 0$, то точка устремляется к притягивающему центру и $x \rightarrow \infty$, а если $\dot{r}_0 > 0$, то она удаляется от притягивающего центра и $x \rightarrow 0$. При этом полярный радиус меняется монотонно, а угловая скорость радиус-вектора устремляется к нулю. Радиус-вектор точки может сделать несколько оборотов вокруг притягивающего центра. Однако число оборотов не будет бесконечным.

Покажем это. Заметим, что поскольку $f(x) \leq e^{-1}$, то

$$|y| \geq g(1), \quad |\dot{r}| \geq v_0 g(1); \quad g(1) = \sqrt{1 - (ae)^{-2}}$$

Рассмотрим варианты

5.1.1. В а р и а н т $\dot{r}_0 > 0$: радиус монотонно возрастает, а x монотонно убывает. Поэтому

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_x^{x_0} \frac{v_0}{ar} e^{-x} dx \leq \int_x^{x_0} \frac{e^{-x}}{ag(1)} dx < \frac{1 - e^{-x_0}}{ag(1)}$$

5.1.2. В а р и а н т $\dot{r}_0 < 0$: радиус монотонно убывает, а x монотонно возрастает.

Поэтому

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{x_0}^x \frac{v_0}{a|\dot{r}|} e^{-x} dx \leq \int_{x_0}^x \frac{e^{-x}}{ag(1)} dx < \frac{e^{-x_0}}{ag(1)}$$

5.2. *Случай* $ae = 1$: $ef(x_0) = \sqrt{1 - y_0^2}$. Для таких начальных условий величина y обращается в нуль при значении $x = 1$, которому отвечает радиус круговой орбиты движения со скоростью v_0 . На фиг. 1 этому случаю соответствует сепаратриса, проходящая через точку $(1, 0)$. Сепаратриса пересекает ось Ox под углом $\pi/4$. Чтобы доказать это, обозначим $z = x - 1$. Тогда из уравнения (5.1) при $a = e^{-1}$ и малом $|z|$ будем иметь

$$|y| = \sqrt{1 - (1+z)^2 e^{-2z}} \approx |z| \sqrt{1 - 2z - 2z^2 + o(z^2)}$$

Исследуем движение по сепаратрисе. Могут представиться следующие варианты.

5.2.1. В а р и а н т $0 < x_0 < 1$, $\dot{r}_0 > 0$. Начальная точка и притягивающий центр расположены по разные стороны от круговой орбиты. Радиальная составляющая скорости $\dot{r}$ и радиус r монотонно возрастают, $x \rightarrow 0$, и точка уходит в бесконечность, совершив, может быть, конечное число витков вокруг притягивающего центра. Действительно,

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_x^{x_0} \frac{v_0}{a\dot{r}} e^{-x} dx \leq \int_x^{x_0} \frac{v_0}{a\dot{r}_0} e^{-x} dx > \frac{v_0}{a\dot{r}_0} (1 - e^{-x_0}) \quad (5.2)$$

5.2.2. В а р и а н т $0 < x_0 < 1$, $\dot{r}_0 < 0$. Тогда $\dot{r} \rightarrow 0$ монотонно, $x \rightarrow (1 - 0)$, радиус убывает, причем $r \rightarrow \mu/v_0^2$. Таким образом, траектория приближается к круговой орбите вокруг притягивающего центра. Покажем, что $t \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow (1 - 0)$. Для рассматриваемого варианта справедлива формула¹

$$\dot{x} = \frac{v_0^3 x^2 g(x)}{\mu} \leq \frac{1-x}{h}, \quad h = \frac{\mu}{v_0^3 \sqrt{1 - e(x_0 - 1)}}$$

Поэтому

$$t - t_0 \geq h \int_{x_0}^x \frac{dx}{1-x} = h \ln \frac{1-x_0}{1-x}$$

Следовательно, при $x \rightarrow (1 - 0)$ время движения по траектории неограниченно увеличивается, и траектория навивается извне на круговую орбиту с бесконечным числом витков вокруг притягивающего центра.

5.2.3. В а р и а н т $1 < x_0 < +\infty$, $\dot{r}_0 < 0$. Начальная точка и притягивающий центр расположены по одну сторону от круговой орбиты. Радиальная составляющая скорости отрицательна. Поэтому полярный радиус точки будет монотонно убывать, радиальная составляющая скорости, оставаясь отрицательной, будет расти по абсолютной величине, а точка будет неограниченно приближаться к притягивающему центру, причем направление скорости будет асимптотически стремиться к направлению, противоположному направлению радиус-вектора. Радиус-вектор точки может сделать вокруг притягивающего центра лишь конечное число оборотов:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{x_0}^x \frac{v_0}{a|\dot{r}|} e^{-x} dx \leq \int_{x_0}^x \frac{v_0}{a|\dot{r}_0|} e^{-x} dx < \frac{v_0}{a|\dot{r}_0|} e^{-x_0} \quad (5.3)$$

¹ Голубев Ю.Ф. Движение точки с постоянным модулем скорости в ньютоновом поле тяготения. Препринт № 58. М.: Ин-т прикл. математики, 2001. 26 с.

5.2.4. В а р и а н т $1 < x_0 < +\infty$, $\dot{r}_0 > 0$. Начальная точка и притягивающий центр расположены по одну сторону от круговой орбиты. Радиальная составляющая скорости положительна. Поэтому полярный радиус точки будет монотонно возрастать, приближаясь к радиусу круговой орбиты. При этом $x \rightarrow 1 + 0$, а радиальная составляющая скорости будет стремиться к нулю. Для рассматриваемого случая

$$\dot{r} = v_0 g(x), \quad \dot{x} = -\frac{v_0^3 x^2 g(x)}{\mu}$$

Здесь по крайней мере для $x \leq 3$ справедливо неравенство (см. работу, цитированную в сноске на стр. 1058)

$$f(x) \geq e^{-1} [1 - (x-1)^2 / 2]$$

Поэтому

$$t - t_0 \geq \frac{\mu}{v_0^3 x_0^2} \int_x^{x_0} \frac{dx}{x-1} = \frac{\mu}{v_0^3 x_0^2} \ln \frac{x_0 - 1}{x - 1}$$

Таким образом, время достижения значения $x = 1$ оказывается бесконечным, и точка движется по орбите, имеющей бесконечное число витков и навивающейся на круговую орбиту со стороны притягивающего центра.

5.3. Случай $ae < 1$: $ef(x_0) < \sqrt{1 - y_0^2}$. Это означает, что модуль начальной радиальной составляющей скорости сравнительно мал. Теперь уравнение

$$f(x) = xe^{-x} = a \quad (5.4)$$

имеет два действительных корня: $x_\pi < 1, x_\alpha > 1$: $f(x_\pi) = f(x_\alpha) = a$, так что область определения (4.2) представляет собой объединение двух полуинтервалов $(0, x_\pi] \cup [x_\alpha, +\infty)$. Рассмотрим соответствующие варианты.

5.3.1. В а р и а н т $0 < x_0 < x_\pi < 1, \dot{r}_0 > 0$. Начальная точка и притягивающий центр расположены по разные стороны от круговой орбиты. В процессе движения точка удаляется в бесконечность, радиальная составляющая скорости увеличивается, а число витков ее траектории при этом конечно, так как справедлива оценка (5.2).

5.3.2. В а р и а н т $0 < x_0 < x_\pi < 1, \dot{r}_0 < 0$. Начальная точка и притягивающий центр находятся по разные стороны от круговой орбиты. В процессе движения полярный радиус убывает, величина $x \rightarrow x_\pi$, радиальная скорость, будучи отрицательной, монотонно возрастает до нуля. Время достижения значения $x = x_\pi$ конечно, так как

$$f(x_\pi) = a, \quad f'(x) = (1-x)e^{-x} > 0, \quad f''(x) = -(2-x)e^{-x} < 0$$

и справедливо неравенство (см. работу, цитированную в сноске на стр. 1058)

$$t - t_0 \leq \frac{2\mu}{v_0^3 x_0^2} \sqrt{\frac{a(x_\pi - x_0)}{f'(x_\pi)}}$$

Кроме того, по формулам (4.3) найдем

$$\ddot{r} = v_0 \frac{f(x)f'(x)\dot{x}}{a^2 g(x)} = \frac{v_0^4}{\mu a^2} x^2 f(x)f'(x) \quad (5.5)$$

В данном случае $f'(x_\pi) > 0$. Поэтому $\ddot{r}(x_\pi) > 0$, и скорость точки, достигнув нулевого значения при $x = x_\pi$, станет положительной, а полярный радиус начнет неограниченно возрастать.

При $x \rightarrow (x_\pi - 0)$ материальная точка может сделать вокруг притягивающего центра лишь конечное число витков. Действительно,

$$\vartheta - \vartheta_0 \leq \int_x^{x_\pi} \frac{v_0 dx}{ag(x)} \leq \frac{2v_0}{\sqrt{af'(x_\pi)}} \sqrt{x_\pi - x}$$

5.3.3. В а р и а н т $x_\alpha < x_0 < +\infty$, $\dot{r}_0 < 0$. В начальный момент времени точка и притягивающий центр расположены по одну сторону от круговой орбиты. В процессе движения $x \rightarrow \infty$, полярный радиус монотонно убывает, но модуль радиальной составляющей скорости монотонно возрастает, направление скорости асимптотически стремится к направлению, обратному направлению радиус-вектора, и точка стремится к притягивающему центру, сделав, быть может, конечное число витков вокруг него, так как справедлива оценка (5.3).

5.3.4. В а р и а н т $x_\alpha < x_0 < +\infty$, $x_\alpha < 2$, $\dot{r}_0 > 0$. В начальный момент времени точка и притягивающий центр расположены по одну сторону от круговой орбиты. Сначала полярный радиус возрастает, а $x \rightarrow x_\alpha$, где радиальная скорость обращается в нуль. Поскольку при $x < 2$ функция $f(x)$ выпукла вверх, то справедливы неравенства, аналогичные оценкам варианта 5.3.2. Следовательно, переменная x достигает значения x_α за конечное время. Согласно формуле (5.5) $\ddot{r}(x_\alpha) < 0$. Поэтому радиальная скорость точки, пройдя через нуль, станет отрицательной, полярный радиус начнет убывать, а точка будет неограниченно приближаться к притягивающему центру не более чем за конечное число оборотов вокруг него в соответствии с оценкой (5.3).

5.3.5. В а р и а н т $x_\alpha < x_0 < +\infty$, $x_\alpha \geq 2$, $\dot{r}_0 > 0$. В начальный момент времени точка и притягивающий центр расположены по одну сторону от круговой орбиты. Сначала радиус возрастает, а $x \rightarrow (x_\alpha + 0)$, где радиальная составляющая скорости обращается в нуль. Однако теперь функция $f(x)$ выпукла вниз. Рассмотрим окрестность $x_\alpha < x_0 < x_\alpha + 1$. Для нее (см. работу, цитированную в сноске на стр. 1058)

$$t - t_0 \leq \frac{2\mu}{v_0^3 x_\alpha^2} \sqrt{\frac{a}{f(x_\alpha) - f(x_\alpha + 1)}} (\sqrt{x_0 - x_\alpha} - \sqrt{x - x_\alpha})$$

и время достижения значения $x = x_\alpha$ оказывается конечным. При $x = x_\alpha$ имеем $\ddot{r}(x_\alpha) < 0$. Как и в предыдущем случае, радиальная скорость, пройдя через нуль, становится отрицательной, а радиус неограниченно устремляется к нулю. Материальная точка может совершить не более конечного числа витков вокруг притягивающего центра в соответствии с оценкой (5.3).

Фазовая диаграмма на фиг. 1 содержит еще две прямые: $y = 1$ и $y = -1$. Обе отвечают движению вдоль радиус-вектора с постоянной скоростью v_0 . На прямой $y = 1$ точка удаляется в бесконечность, а на прямой $y = -1$ точка неограниченно приближается к притягивающему центру.

6. Некоторые задачи маневрирования. Рассмотрим задачи, связанные с необходимостью обеспечения требуемых краевых условий.

6.1. *Вывод на орбиту, близкую к круговой.* Пусть дан радиус круговой орбиты r_c , а начальный полярный радиус точки есть $r_0 \neq r_c$. Как следует из анализа результатов разд. 5.2, не существует фазовой траектории, приводящей из позиции с радиусом r_0 на круговую орбиту за конечное время. Однако можно указать траекторию, бесконечно близко подходящую к заданной круговой орбите. Дополним начальные условия так, чтобы исходная точка движения на фазовой диаграмме (фиг. 1) принадлежала ветви сепаратрисы, приводящей в точку (1, 0). С этой целью назначим

$$v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_c}}, \quad x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}, \quad \dot{r}_0 = V_0 \operatorname{sign}(x_0 - 1), \quad V_0 = v_0 \sqrt{1 - e^2 f^2(x_0)}$$

Тогда, очевидно, $a = f(x_0) / \sqrt{1 - y_0^2} = e^{-1}$, и получаем решение задачи.

6.2. *Достижение заданного значения полярного радиуса.* Пусть даны два значения полярного радиуса r_0 и r_1 , а также скорость v_0 . Требуется найти все множество траекторий, двигаясь по которым, начиная от точки с полярным радиусом r_0 , можно достичь точку с полярным радиусом r_1 .

Полярным радиусам поставим в соответствие значения

$$x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}, \quad x_1 = \frac{\mu}{v_0^2 r_1}$$

и воспользуемся фазовой диаграммой (фиг. 1). В зависимости от значений x_1, x_0 рассмотрим следующие варианты.

6.2.1. В а р и а н т $0 < x_1 < x_0 < 1$. Очевидно, что тогда $r_1 > r_0 > r_c$, и при любом значении $\dot{r}_0$ из полуинтервала $(-V_0, v_0]$ полярный радиус r_1 достигается, а другие значения $\dot{r}_0$ не могут служить решением. Здесь нижний предел области решений $\dot{r}_0$ отвечает сепаратрисе, приводящей в точку $(1, 0)$ на фиг. 1.

6.2.2. В а р и а н т $0 < x_1 \leq 1 \leq x_0$. Имеем $r_1 \geq r_c \geq r_0$, и достичь значения радиуса r_1 из области отрицательных значений переменной y на фиг. 1 невозможно. Решение задачи записывается в виде неравенства

$$V_0 < \dot{r}_0 \leq v_0$$

Нижний предел выделяет точку на сепаратрисе, попадающей в точку $(1, 0)$ сверху.

6.2.3. В а р и а н т $1 < x_1 < x_0$. Другими словами, $r_c > r_1 > r_0$. Достичь значения радиуса r_1 можно только из области положительных значений переменной y . Решение задачи дается неравенством

$$V_1 \leq \dot{r}_0 \leq v_0$$

в котором нижний предел

$$V_1 = v_0 \sqrt{1 - \frac{f^2(x_0)}{f^2(x_1)}}$$

отвечает фазовой кривой, попадающей сверху в точку $(x_1, 0)$ на фиг. 1. Если выполнено неравенство

$$V_1 < \dot{r}_0 < V_0$$

то значение r_1 будет достигнуто дважды: первый раз – на восходящем участке траектории, а второй раз – на нисходящем.

6.2.4. В а р и а н т $0 < x_0 < x_1 < 1$. Имеем $r_0 > r_1 > r_c$. Полярный радиус r_1 может быть достигнут лишь при

$$-v_0 \leq \dot{r}_0 \leq -V_1$$

Верхний предел в данном неравенстве отвечает фазовой кривой, пересекающей "снизу" ось Ox в точке $(x_1, 0)$. Если выполнено неравенство

$$-V_0 < \dot{r}_0 < -V_1$$

то значение полярного радиуса r_1 будет достигнуто дважды: сначала на нисходящем и затем на восходящем участках траектории.

6.2.5. В а р и а н т $0 < x_0 \leq 1 \leq x_1$. Имеем $r_0 \geq r_c \geq r_1$. Полярный радиус r_1 достигается только при выполнении условия

$$-v_0 \leq \dot{r}_0 < -V_0$$

Верхний предел выделяет точку на сепаратрисе, попадающей в точку $(1, 0)$ "снизу".

6.2.6. В а р и а н т $1 < x_0 < x_1$. Тогда $r_c > r_0 > r_1$. Достичь радиуса r_1 можно лишь при выполнении неравенства

$$-v_0 \leq \dot{r}_0 < V_0$$

Верхний предел отвечает сепаратрисе, попадающей в точку $(1, 0)$ на фиг. 1 "сверху".

Рассмотренные варианты исчерпывают решение задачи 6.2.

6.3. *Достижение радиуса при требуемой радиальной скорости.* Заданы значения полярного радиуса r_0 и r_1 , а также скорость v_0 . Требуется найти траекторию, для которой, начиная от точки с полярным радиусом r_0 , достигается полярный радиус r_1 с заданной радиальной скоростью $\dot{r}_1$.

Решение этой задачи можно получить методом обращения времени. Пусть задача решена, и t_1 — момент достижения радиуса r_1 . Введем независимую переменную $\tau = t_1 - t$. В обращенном времени τ радиус r_1 соответствует моменту $\tau = 0$ с заданной начальной радиальной составляющей скорости $r'_0 = -\dot{r}_1$. Полярный радиус r_0 становится конечным. Теперь можно воспользоваться результатами решения задачи 6.2, сделав подстановку $x_0 = \mu / (v_0^2 r_1)$, $x_1 = \mu / (v_0^2 r_0)$. Решение задачи существует, если для соответствующего случая расположения чисел x_0 и x_1 на оси Ox фиг. 1 заданная величина r'_0 попадает в область решения задачи 6.2. Тогда r'_0 выделяет на фиг. 1 единственную кривую $\{y(\tau), x(\tau)\}$. Для нее получим

$$y_0 = \frac{r'_0}{v_0} = -\frac{\dot{r}_1}{v_0}, \quad a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$

Точки кривой, для которых будет $x = x_1$, доставляют решение задачи, которое дается формулами

$$|y_1| = g(x_1), \quad r'_1 = \pm v_0 |y_1|$$

Знак решения выбирается в соответствии с ветвью кривой фазовой диаграммы, доставляющей решение. После этого окончательно будем иметь $\dot{r}_0 = -r'_1$.

Отметим, что здесь величина t_1 носит вспомогательный характер и введена лишь для удобства рассуждений. Ее конкретное значение в процессе решения никак не участвует. Отметим также, что задача 6.3 может иметь не более двух решений.

6.4. *Расчет угловой дальности.* Предположим, что заданы начальное r_0 и конечное r_1 значения полярного радиуса, величина скорости v_0 и начальная радиальная составляющая скорости $\dot{r}_0$, причем $|\dot{r}_0| \leq v_0$. Обозначим ϑ_0 , ϑ_1 соответственно начальное и конечное значение угловой координаты ϑ . Требуется найти угловую дальность $\theta = \vartheta_1 - \vartheta_0$ при движении с заданной величиной скорости v_0 от начальной точки с радиусом r_0 к конечной точке с радиусом r_1 .

Сначала заметим, что если $|\dot{r}_0| = v_0$, то движение происходит вдоль луча, выходящего из притягивающего центра, и тогда $\theta = 0$. В дальнейшем будем считать, что $|\dot{r}_0| < v_0$. Возьмем величины

$$x_0 = \frac{\mu}{v_0^2 r_0}, \quad x_1 = \frac{\mu}{v_0^2 r_1}, \quad y_0 = \frac{\dot{r}_0}{v_0}, \quad a = \frac{f(x_0)}{\sqrt{1 - y_0^2}}$$

и введем функцию

$$\Theta(\xi_1, \xi_2, a) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{a^2 - x^2} e^{-2x}}$$

Рассмотрим следующие варианты.

6.4.1. В а р и а н т а $e < 1$, $x_0 \leq x_\pi$, $x_1 \leq x_\pi$. Движение реализуемо при выполнении условий

$$(x_1 \leq x_0 \leq x_\pi) \& (y_1 \geq 0) \cdot (x_0 \leq x_1 \leq x_\pi) \& (y_0 \leq 0)$$

а угловая дальность выражается формулой (см. работу, цитированную в сноске на стр. 1058)

$$\theta = \Theta_{\pi}(x_1, a) \operatorname{sign} y_1 - \Theta_{\pi}(x_0, a) \operatorname{sign} y_0, \quad \Theta_{\pi}(x, a) = \Theta(x, x_{\pi}, a) \quad (6.1)$$

6.4.2. В а р и а н т $ae < 1$, $x_0 \geq x_{\alpha}$, $x_1 \geq x_{\alpha}$. Движение реализуемо при выполнении условий

$$(x_{\alpha} \leq x_0 \leq x_1) \& (y_1 \leq 0) \quad (x_{\alpha} \leq x_1 \leq x_0) \& (y_0 \geq 0)$$

а угловая дальность выражается формулой (см. работу, цитированную в сноске на стр. 1058)

$$\theta = \Theta_{\alpha}(x_0, a) \operatorname{sign} y_0 - \Theta_{\alpha}(x_1, a) \operatorname{sign} y_1, \quad \Theta_{\alpha}(x, a) = \Theta(x_{\alpha}, x, a) \quad (6.2)$$

6.4.3. В а р и а н т $ae = 1$, $x_0 < 1$, $x_1 < 1$. Изображающая точка на фиг. 1 может перемещаться только по сепаратрисе. Область существования решения выражается неравенствами

$$(x_1 \leq x_0 < 1) \& (y_0 > 0) \quad (x_0 \leq x_1 < 1) \& (y_0 < 0)$$

а угловая дальность вычисляется по формуле

$$\theta = [\Theta_0(x_0, a) - \Theta_0(x_1, a)] \operatorname{sign} y_0, \quad a = e^{-1}, \quad \Theta_0(x, a) = \Theta(0, x, a) \quad (6.3)$$

(если $ae = 1$, то $\Theta(x, a) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1$).

6.4.4. В а р и а н т $ae = 1$, $x_0 > 1$, $x_1 > 1$. Как и в случае 6.4.3, изображающая точка перемещается только по сепаратрисе. Область существования решения выражается неравенствами

$$(1 < x_1 \leq x_0) \& (y_0 > 0) \quad (1 < x_0 \leq x_1) \& (y_0 < 0)$$

а угловая дальность вычисляется по формуле

$$\theta = [\Theta_{\infty}(x_1, a) - \Theta_{\infty}(x_0, a)] \operatorname{sign} y_0, \quad a = e^{-1}, \quad \Theta_{\infty}(x, a) = \Theta(x, \infty, a) \quad (6.4)$$

Несмотря на то, что функция $\Theta_{\infty}(x, a)$ представляет собой несобственный интеграл, она для любого $x \neq 1$ принимает конечное значение; при этом $\Theta_{\infty}(x, a) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1$.

6.4.5. В а р и а н т $ae > 1$. Движение изображающей точки вдоль фазовой кривой происходит без каких-либо особенностей, и можно применить любую из функций $\Theta_0(x, a)$, $\Theta_{\infty}(x, a)$, которые связаны очевидным соотношением

$$\Theta_0(x, a) + \Theta_{\infty}(x, a) = \Theta(\infty, a) = \Theta_{\infty}(0, a) = \Theta(0, \infty, a) \quad (6.5)$$

Область существования решения определена неравенствами

$$(x_1 \leq x_0) \& (y_0 > 0), \quad (x_0 \leq x_1) \& (y_0 < 0)$$

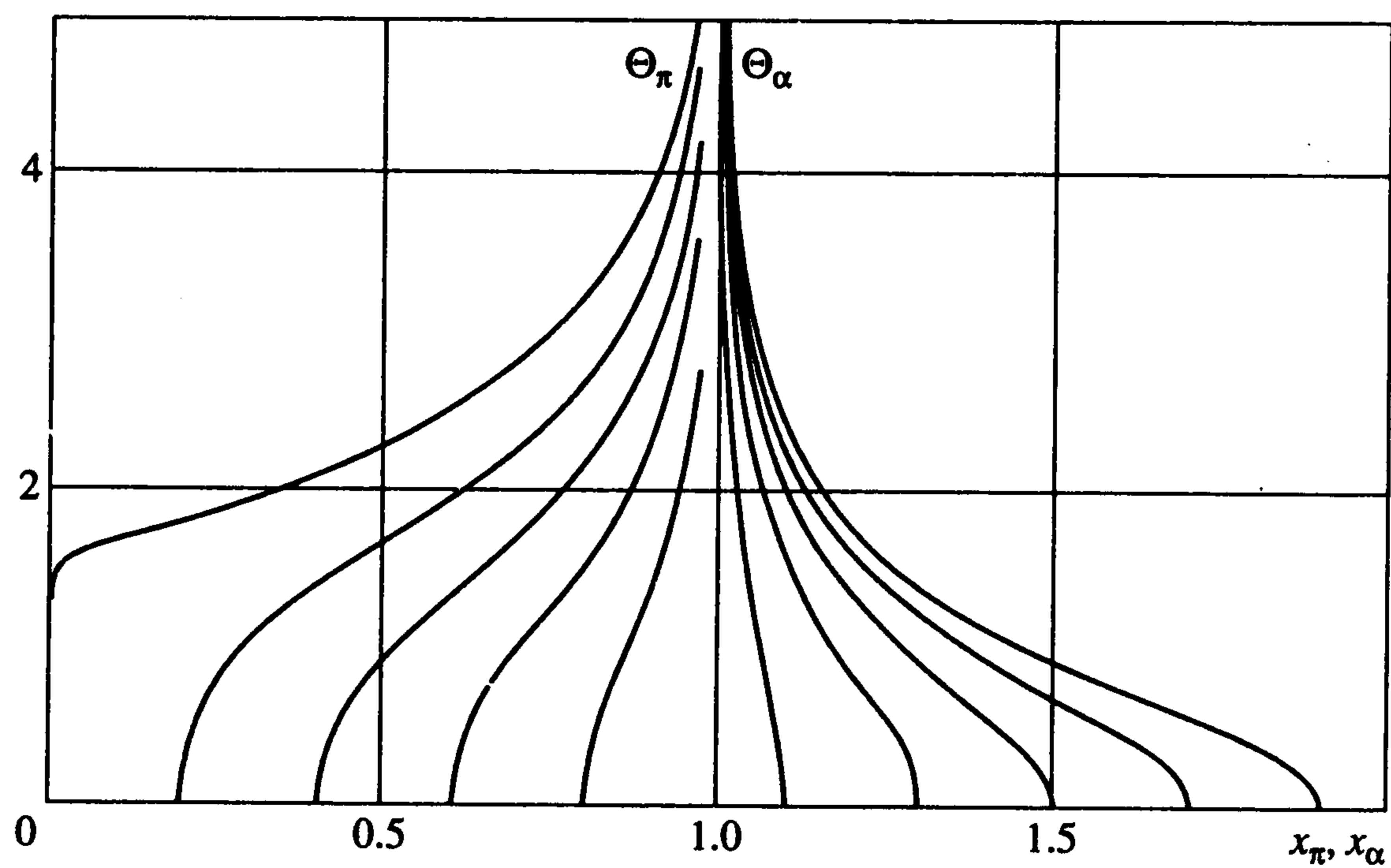
а угловая дальность рассчитывается по формуле

$$\theta = [\Theta_0(x_0, a) - \Theta_0(x_1, a)] \operatorname{sign} y_0 = [\Theta_{\infty}(x_1, a) - \Theta_{\infty}(x_0, a)] \operatorname{sign} y_0$$

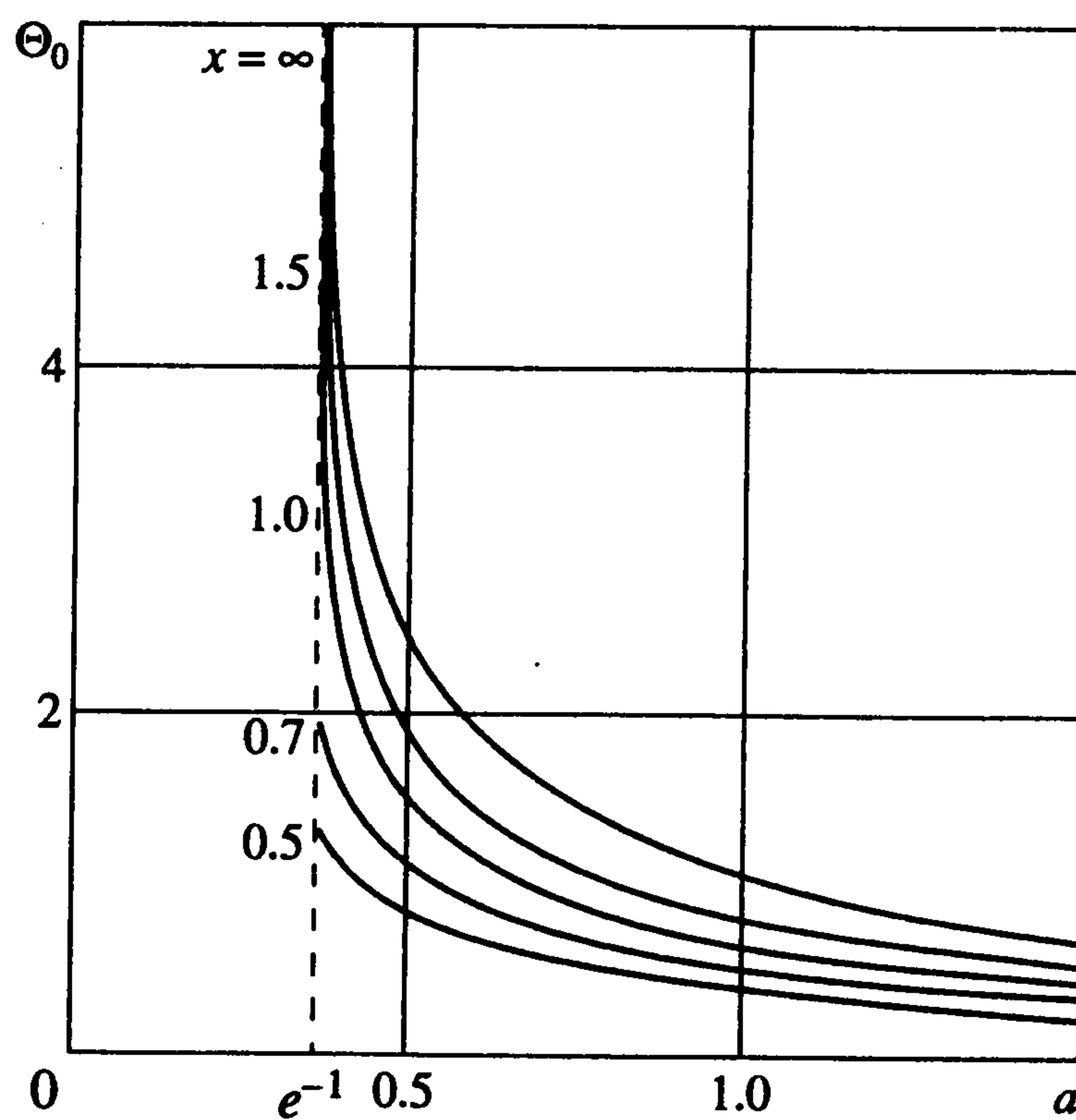
Данный случай исчерпывает решение задачи 6.4.

7. Свойства функций, выражающих угловую дальность. Сначала рассмотрим функцию Θ_{π} , определенную последней формулой (6.1). В ней x_{π} — наименьший корень уравнения (5.4), так что $a = x_{\pi} e^{-x_{\pi}}$. Изучим поведение функции Θ_{π} в малой окрестности точки x . Пусть $x = x_{\pi} - y$, $y \geq 0$. Тогда получим

$$\Theta_{\pi} = \frac{1}{x_{\pi}} \int_0^y \frac{e^y dy}{\sqrt{1 - (1 - y/x_{\pi})^2 e^{2y}}}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Примем, что $y \ll 1$, и удержим в числителе и подкоренном выражении знаменателя лишь члены, линейные по y . После интегрирования и перехода к исходной переменной x найдем

$$\Theta_{\pi} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_{\pi}(1-x_{\pi})}} \left[\sqrt{x_{\pi}-x} + \frac{1}{3}(x_{\pi}-x)^{3/2} \right] \quad (7.1)$$

Отсюда ясно, что при фиксированном значении x функция Θ_{π} в точке $x_{\pi} = x$ обращается в нуль и имеет вертикальную касательную.

Предел функции (7.1) при $x \rightarrow 0$ имеет вид $\Theta_{\pi}^* = \sqrt{2}(1 + x_{\pi}/3)\sqrt{1 - x_{\pi}}$. В точке $x_{\pi} = 0$ получим $\Theta_{\pi}^* = \sqrt{2}$ и $d\Theta_{\pi}^*/dx_{\pi} = \sqrt{2}/3$.

При $x_{\pi} \rightarrow 1$ фазовые кривые на фиг. 1 приближаются к сепаратрисам. Движение по сепаратрисе, приводящее к точке (1, 0), сопровождается бесконечным возрастанием угловой дальности. Поэтому при фиксированном x функция Θ_{π} имеет вертикальную асимптоту $x_{\pi} = 1$ и стремится к $+\infty$, когда $x_{\pi} \rightarrow 1 - 0$.

На фиг. 2 в области $0 < x_{\pi} < 1$ представлены графики функции Θ_{π} , полученные численно. Параметром здесь служит x , а аргументом x_{π} . Значение x для отдельного графика соответствует точке пересечения графика с осью абсцисс.

Поведение функции Θ_{α} , определенной последней формулой (6.2), во многом аналогично поведению функции Θ_{π} . Аналитическое исследование его можно провести сходным методом. На фиг. 2 в области $x_{\alpha} > 1$ показано семейство функций Θ_{π} , найденное численно. Параметром семейства служит x . Значение x соответствует пересечению графика с осью абсцисс.

Рассмотренные выше функции Θ_{α} и Θ_{π} удобны для расчета дальности в случае $a < e^{-1}$. При $a = e^{-1}$ следует воспользоваться в области $x < 1$ функцией $\Theta_0(x, a)$, определенной последней формулой (6.3), а в области $x > 1$ – функцией $\Theta_{\infty}(x, a)$, определенной последней формулой (6.4). Обе функции переменной x положительны и имеют вертикальную асимптоту при $x \rightarrow 1$.

При $a > e^{-1}$ любая из функций Θ_0 , Θ_{∞} определена во всей области изменения x и потому пригодна для вычисления угловой дальности. На фиг. 3 показано семейство функций Θ_0 , где аргументом служит переменная a , а параметром – x . По физическому смыслу эта функция выражает угловую дальность между бесконечно удаленной точкой траектории и точкой с радиусом, соответствующим данному значению x . Видим, что при увеличении a эта дальность монотонно убывает. При $x \geq 1$ и $a \rightarrow e^{-1}$ она неограниченно возрастает. Кривая, соответствующая $x = \infty$, ограничивает область изменения функции Θ_0 . Значения функции Θ_{∞} могут быть найдены по значениям функции Θ_0 согласно формуле (6.5).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00079, 96-15-96022) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (1.6-329, A0097).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ. 2000. 719 с.
2. Добронравов В.В. Основы механики неголономных систем. М.: Высш. шк., 1970. 270 с.
3. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 535 с.
4. Голубев Ю.Ф. Механические системы с сервосвязями // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 211–224.