

УДК 531.36

© 2002 г. Н.Б. Григорьева

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЛИПСОИДОВ РИМАНА В ПОСТАНОВКЕ ЛЯПУНОВА

В рамках определения устойчивости формы равновесия по Ляпунову [1] рассматривается задача об устойчивости эллипсоидов Римана вращающейся однородной самогравитирующей идеальной жидкости. В параметрических пространствах первого и второго семейств эллипсоидов Римана определены задаваемые в явном аналитическом виде области такие, что почти все принадлежащие им эллипсоиды являются неустойчивыми формами равновесия. Доказательство основано на общем факте (который формулируется и обосновывается отдельно), что в случае, когда неустойчивое положение равновесия автономной системы устойчиво по отношению к некоторой функции, найдется траектория этой системы, принадлежащая некоторому многообразию, и на следствии этого факта, носящем конструктивный характер. Устойчивость формы эллипсоидальных фигур равновесия, за исключением частных случаев эллипсоидов Маклорена и Якоби, устойчивость формы которых изучал сам Ляпунов, ранее в литературе не исследовалась.

1. Введение. Постановка задачи. В теории эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся жидкости центральное место занимают задача существования и задача устойчивости эллипсоидов равновесия [2–4].

Задача существования была решена Дирихле и Риманом [3, 4]. Дирихле показал [2, 3], что в классе начальных условий, удовлетворяющих требованиям эллипсоидальности поверхности жидкости и однородно вихревом характере поля ее скоростей ("предположения Дирихле"), исходная бесконечномерная система, описывающая динамику однородной идеальной несжимаемой самогравитирующей вращающейся жидкости, переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент завихренности ($2\omega_1(t)$, $2\omega_2(t)$, $2\omega_3(t)$), полуосей эллипсоида (a , b , c) и компонент угловой скорости (p , q , r) в подвижной системе отсчета.

Приведем указанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в наиболее удобном для дальнейшего вида (получающемся из первоначального [2] с учетом условия постоянства объема жидкости, являющегося следствием уравнения несжимаемости: $abc = \text{const}$, где можем считать $\text{const} = 1$ без ограничения общности).

Имеем

$$\frac{d}{dt}(A_1 p + A_2 \omega_1) + q(C_1 r + C_2 \omega_3) - r(B_1 q + B_2 \omega_2) = 0 \quad (pqr, \omega_1 \omega_2 \omega_3, ABC) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_1}{a} \right) - \frac{2a}{a^2 + b^2} r \omega_2 + \frac{2a}{a^2 + c^2} q \omega_3 + \\ + \frac{2a(c^2 - b^2)}{(a^2 + c^2)(a^2 + b^2)} \omega_2 \omega_3 = 0 \quad (123, abc, pqr) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\ddot{a} \left(a + \frac{1}{b^2 a^3} \right) + \frac{\ddot{b}}{a^2 b^3} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{a^3 b^3} - \frac{2\dot{a}^2}{a^4 b^2} - \frac{2\dot{b}^2}{b^4 a^2} = (R - \tilde{\omega}_z) \frac{1}{a^2 b^2} - (P - \tilde{\omega}_x) a^2 \quad (1.3)$$

$$\ddot{b}\left(b + \frac{1}{a^2 b^3}\right) + \frac{\ddot{a}}{b^2 a^3} - \frac{2\dot{a}\dot{b}}{a^3 b^3} - \frac{2\dot{a}^2}{a^4 b^2} - \frac{2\dot{b}^2}{b^4 a^2} = (R - \tilde{\omega}_z) \frac{1}{a^2 b^2} - (Q - \tilde{\omega}_y) b^2 \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_x = \frac{\ddot{a}}{a} - \omega_x = & \frac{a^2 - c^2}{(a^2 + c^2)^2} (a^2 + 3c^2) q^2 + \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2} (a^2 + 3b^2) r^2 - \\ & - \frac{4(a^2 - c^2)c^2}{(a^2 + c^2)^2} q\omega_2 - \frac{4(a^2 - b^2)b^2}{(a^2 + b^2)^2} r\omega_3 + \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \omega_3^2 + \frac{4a^2 c^2}{(a^2 + c^2)^2} \omega_2^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

(xyz, abc, pqr)

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{M}{5} \frac{(b^2 - c^2)^2}{b^2 + c^2}, \quad A_2 = \frac{4M}{5} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \quad (ABC, abc) \\ P = \frac{2}{a} \left[\frac{\partial}{\partial a} \hat{H}(a, b, c) \right] \quad (PQR, abc) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\hat{H} = \frac{3M}{4} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad \varphi(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)$$

M – масса жидкости.

Здесь и везде далее во всех формулах полагаем $c = 1/(ab)$.

Уравнения (1.2) системы (1.1)–(1.4) вытекают, если учесть условия Дирихле и известный вид решения уравнения Лапласа, из уравнений Гельмгольца для вихря в подвижных осях, уравнения (1.1) – из теоремы о моменте количеств движения; уравнения (1.3), (1.4) – из гидродинамических уравнений Эйлера в подвижных осях [2].

Система (1.1)–(1.4) имеет три интеграла: энергии, момента количеств движения, постоянства интенсивности вихря [2]

$$\frac{1}{2} (A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 + A_2 \omega_1^2 + B_2 \omega_2^2 + C_2 \omega_3^2) + W + \frac{M}{10} (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) = \text{const} \quad (1.7)$$

$$(A_1 p + A_2 \omega_1)^2 + (B_1 q + B_2 \omega_2)^2 + (C_1 r + C_2 \omega_3)^2 = \text{const} \quad (1.8)$$

$$(\omega_1 / a)^2 + (\omega_2 / b)^2 + (\omega_3 / c)^2 = \text{const} \quad (1.9)$$

где

$$W = -\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4} M^2 \int \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} \quad (1.10)$$

Риман, опираясь на исследования Дирихле, определил [3, 4] множество всех положений равновесия системы (1.1)–(1.4), каждому из которых соответствует некоторое стационарное движение рассматриваемой механической системы – эллипсоид равновесия Римана.

Риман показал [3], что это множество является объединением двух "подмножеств": у эллипсоидов первого подмножества векторы угловой скорости и завихренности внутренних движений лежат в одной из главных плоскостей эллипсоида, а у эллипсоидов второго эти векторы коллинеарны и направлены вдоль одной из осей [3].

Говоря теперь о задаче устойчивости эллипсоидов равновесия, первое, что необходимо отметить, это то, что сама постановка этой задачи, как и любой другой задачи о системах с бесконечным числом степеней свободы, является неоднозначной. В классической литературе известно два подхода к рассмотрению устойчивости эллипсоидов равновесия, помимо подхода Пуанкаре, близкого к гидродинамическому методу, который здесь не рассматривается.

В рамках первого из них – подхода Римана – возмущение предполагается удовлетворяющим условиям Дирихле, а устойчивость определяется естественным образом как обычная (т.е. по Ляпунову для систем с конечным числом степеней свободы) устойчивость соответствующего положения равновесия системы (1.1)–(1.4) [2, 3].

Второй подход – подход Ляпунова – предусматривает произвольный, вообще говоря, характер возмущения. Устойчивость здесь понимается как устойчивость формы равновесия в соответствии с данным Ляпуновым в его магистерской диссертации [1] определением:

Если для каждого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого возмущения, для которого в начальный момент времени

$$|v(r) - v_0(r)|_{t=0} < \delta, \quad |\Omega - \Omega_0| < \delta, \quad l|_{t=0} < \delta \text{ и } \nabla|_{t=0} > \nabla_{\min}(l|_{t=0}) \quad (1.11)$$

будет иметь место условие $l(t) < \varepsilon$ по крайней мере до тех пор, пока выполнено соотношение $\nabla(t) > \nabla_{\min}(l(t))$, то стационарное движение, отвечающее данной фигуре равновесия, является устойчивым.

Здесь $v(r)$ – поле скоростей внутренних движений, $\Omega = (p, q, r)$ – угловая скорость эллипсоида в подвижных осях (индексом 0 отмечены соответствующие параметры для фигуры равновесия); величина l , введенная Ляпуновым и названная [1] им удалением возмущенной поверхности жидкости S от невозмущенной S_0 , определяется как

$$l = \max_{P_0 \in S_0} \left(\min_{P \in S} \rho(P, P_0) \right)$$

∇ – величина, названная Ляпуновым уклонением, соответствует объему части жидкости в возмущенной конфигурации, ограниченной поверхностями S и S_0 и находящейся над поверхностью S_0 ; $\nabla_{\min}$ – функция удаления l , определяющая минимальное возможное при данном значении l значение величины ∇ , которое возможно для реальной жидкости.

Метод решения Ляпуновым поставленной им задачи основан на доказательствах достижения строгого минимума у функционала измененной потенциальной энергии на рассматриваемом стационарном вращении [1]. Таким образом, им была исследована устойчивость эллипсоидов Маклорена и Якоби (другие эллипсоиды равновесия Ляпуновым, по-видимому, не рассматривались).

Метод Ляпунова предполагает проведение анализа выполнимости сформулированного им достаточного условия устойчивости формы. К сожалению, с технической (вычислительной) точки зрения применение этого метода сопряжено со значительными затруднениями. Кроме того, при исследовании эллипсоидов Якоби Ляпунову, как известно [1], удалось доказать устойчивость формы лишь в отношении очень "малой" их части (а именно – тех, эксцентриситеты которых лежат в некоторых очень тесных пределах). И, принимая во внимание, что эллипсоиды Якоби – самые "простые" частные случаи эллипсоидов Римана, складывается впечатление, что получить какие-либо результаты об устойчивости в отношении общего случая эллипсоидов Римана на этом пути крайне затруднительно, если вообще это возможно.

В связи с этим возникает вопрос о том, нельзя ли здесь подойти к решению задачи устойчивости с другой стороны, а именно, анализируя выполнимость не достаточного условия устойчивости, а (какого-либо) достаточного условия неустойчивости?

В данной заметке показывается, что такой подход действительно позволяет, вообще говоря, получить выводы о характере понимаемой в смысле определения Ляпунова (1.11) устойчивости (доказать неустойчивость) значительной (если не большей, в смысле обычной меры) части эллипсоидов Римана.

Можно показать (см. ниже, разд. 2), что условная (в классе возмущений, удовлетворяющих условиям Дирихле) устойчивость формы в смысле определения Ляпунова (1.11) эквивалентна частичной устойчивости положения равновесия системы (1.1)–(1.4), соответствующего рассматриваемому эллипсоиду Римана, по отношению к части фазовых переменных – полуосям (a, b) системы (1.1)–(1.4).

Таким образом, определение множества положений равновесия системы (1.1)–(1.4), являющихся неустойчивыми по отношению к (a, b) , автоматически определяет множество эллипсоидов Римана, представляющих собой неустойчивые формы равновесия уже в классе возмущений, удовлетворяющих условиям Дирихле, а значит, множество заведомо неустойчивых в смысле определения Ляпунова (1.11) эллипсоидов Римана.

2. Эквивалентность условной устойчивости формы и устойчивости по отношению к переменным (a, b) . Рассмотрим условную устойчивость формы – то свойство, в которое переходит свойство устойчивости формы эллипсоида Римана в смысле определения Ляпунова (1.11), данного в [1], при условии, что возмущения удовлетворяют предположениям Дирихле.

В этом случае все время движения поверхность жидкости будет представлять собой поверхность эллипсоида с полуосями $a(t), b(t), c(t)$.

Исходя из этого определим здесь величину удаления l , определенную Ляпуновым [1].

Перейдем в пространстве $\mathbf{R}^3$ к безразмерным эллиптическим координатам (r, φ, θ)

$$x = ra_0 \sin \varphi \sin \theta, \quad y = rb_0 \cos \varphi \sin \theta, \quad z = rc_0 \cos \theta$$

Тогда $r = 1$ – уравнение невозмущенной поверхности эллипсоида равновесия, а φ и θ – координаты на этой поверхности.

Уравнение возмущенной поверхности в этих координатах

$$r(t, \varphi, \theta) = \left(\frac{a_0^2}{a^2(t)} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \frac{b_0^2}{b^2(t)} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \frac{c_0^2}{c^2(t)} \cos^2 \theta \right)^{-1/2}$$

Определим в рассматриваемых координатах величину $\tilde{l}$ "безразмерного" удаления, соответствующую величине l . Исходя из определения Ляпунова, имеем

$$\tilde{l} \leq L(a(t), b(t), c(t)) = \max_{\varphi, \theta} |r(t, \varphi, \theta) - 1| \quad (2.1)$$

поскольку расстояние от любой точки поверхности невозмущенного эллипсоида с координатами (φ, θ) до ближайшей к ней точки поверхности возмущенного эллипсоида заведомо не больше $|r(\varphi, \theta) - 1|$.

Ясно, что значение величины $L(a(t), b(t), c(t))$ соответствует значению функции $r(t, \varphi, \theta)$ при тех φ и θ , при которых функция

$$\frac{1}{r^2(t, \varphi, \theta)} = \frac{a_0^2}{a^2(t)} \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \frac{b_0^2}{b^2(t)} \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \frac{c_0^2}{c^2(t)} \cos^2 \theta \quad (2.2)$$

принимает экстремальное (по φ, θ) значение. Дифференцируя функцию (2.2) по φ и θ , заключаем, что обе производные будут нулевыми лишь в каждом из шести возможных случаев:

1) $\varphi = 0, \theta = \pi/2$, 2) $\varphi = 0, b_0^2/b^2(t) = c_0^2/c^2(t)$, 3) $\varphi = \pi/2, \theta = \pi/2$, 4) $\varphi = 0, a_0^2/a^2(t) = c_0^2/c^2(t)$, 5) $\theta = 0$, 6) $\theta = \pi/2, a_0^2/a^2(t) = b_0^2/b^2(t)$.

Исходя из значений функции (2.2), в каждом из этих случаев получаем

$$\tilde{l}(t) \leq \mu, \quad \mu = \max\{(a(t) - a_0)/a_0, (b(t) - b_0)/b_0, (c(t) - c_0)/c_0\} \quad (2.3)$$

С другой стороны, для точек невозмущенной поверхности, лежащих на полуосях a_0, b_0, c_0 (случаи 3, 1, 5), расстояние до ближайших к ним точек возмущенной поверхности равно соответственно $(a(t) - a_0)/a_0, (b(t) - b_0)/b_0$ и $(c(t) - c_0)/c_0$. Поэтому

$$\tilde{l}(t) \geq \mu$$

Отсюда при учете неравенства (2.3) имеем

$$\tilde{l}(t) = \mu$$

Очевидно, далее, что для любой заданной точки M' возмущенной поверхности определение точки $M_1 = M_1(M')$ невозмущенной поверхности, такой, что

$$\rho(M_1, M') = \min_M \rho(M, M')$$

не зависит от выбора системы координат. Точно так же от него не зависит и определение точки M_2 возмущенной поверхности, для которой

$$\rho(M_1(M_2), M_2) = \max_{M'} \rho(M_1(M'), M')$$

Исходя из этого и учитывая определение величины удаления l , имеем, что те две точки – M_2 на возмущенной поверхности и $M_1(M_2)$ на невозмущенной поверхности, расстояние между которыми определяет величину l , не зависят от выбора системы координат (хотя сама эта величина будет, вообще говоря, меняться при переходе от одной системы координат к другой, если при таком переходе расстояние не сохраняется). Учитывая изложенное выше в этом разделе, получаем, что в исходных декартовых координатах (x, y, z)

$$l(t) = \max\{|a(t) - a_0|, |b(t) - b_0|, |c(t) - c_0|\} \quad (2.4)$$

(Этот очевидный факт можно обосновать также и иначе.)

Далее, из выражений для производных от функции $r(t, \varphi, \theta)$ по φ и θ видно, что

$$|dr(t; \varphi, \theta)/d\varphi| < M \quad |dr(t; \varphi, \theta)/d\theta| < M, \quad \forall t, \varphi, \theta$$

где

$$\begin{aligned} M &= 3 \max(a_0^2, b_0^2, c_0^2) / [\min(a, b, c)]^5 < 3 \max(a_0^2, b_0^2, c_0^2) / [(1 - \tilde{l}) \min(a_0, b_0, c_0)]^5 = \\ &= M^*(a_0, b_0, c_0, \tilde{l}) \end{aligned}$$

Поэтому производные $dr/d\varphi, dr/d\theta$ при любых t, φ, θ ограничены по модулю постоянной $M^*(a_0, b_0, c_0, \tilde{l})$.

Из этого сразу же следует, что часть возмущенной жидкости, находящаяся над невозмущенной поверхностью, включает в себе конус $K(\tilde{l}, a_0, b_0, c_0)$ с высотой $\tilde{l}$ и основанием – кругом радиуса

$$\rho = \rho(\tilde{l}) = \sin(\tilde{l} / M^*) \tilde{l} / (\tilde{l} + 1 - \cos(\tilde{l} / M^*))$$

Тогда получаем, что существует функция $\nabla_{\min}^*(\tilde{l})$, равная объему конуса $K(\tilde{l}, a_0, b_0, c_0)$, такая, что

$$\nabla(t) > \nabla_{\min}^*(l(t)), \quad \forall t \leq 0 \quad (2.5)$$

Условие, соответствующее условию (2.5), будет выполнено, очевидно, и в исходных координатах (x, y, z) .

Далее, при учете выражения (2.4) получаем, исходя из выражений для компонент поля скоростей внутренних движений жидкости для случая, когда начальные условия удовлетворяют предположениям Дирихле [2], что для каждого числа $\tilde{\delta} > 0$ найдется число $\delta > 0$, такое, что из условий

$$|\Delta v_{\text{rel}}| < \delta, \quad |\Omega - \Omega_0| < \delta, \quad l < \delta$$

вытекает

$$|\Delta\omega_i| < \tilde{\delta}, |\Delta p| < \tilde{\delta}, |\Delta q| < \tilde{\delta}, |\Delta r| < \tilde{\delta}, |\Delta a| < \tilde{\delta}, |\Delta b| = \tilde{\delta}, |\Delta c| < \tilde{\delta} \quad (2.6)$$

где ω_i, p, q, r, a, b – фазовые переменные системы (1.1)–(1.4), описывающей динамику жидкого эллипсоида Дирихле, $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i_0}$ и т.д. С другой стороны, поскольку поле скоростей в случае, когда начальные условия удовлетворяют предположениям Дирихле, непрерывно зависит от $x = (\omega_i, p, q, r, a, b, \dot{a}, \dot{b})$, имеем, что для каждого числа $\delta > 0$ найдется такое число $\delta_1(\delta) > 0$, что условие $|x - x_0| < \delta_1$ влечет условие $|\Delta v_{rel}| < \delta$.

Отсюда, а также с учетом выражения (2.4) и того, что из условия $|x - x_0| < \delta_1$ автоматически следуют соотношения

$$|\Delta p| < \delta_1, |\Delta q| < \delta_1, |\Delta r| < \delta_1; |\Delta a| < \delta_1, |\Delta b| < \delta_1, |\Delta c| < \delta_1$$

получаем, что для каждого числа $\delta > 0$ найдется такое число $\delta_2 = \min(\delta; \delta_1(\delta)) > 0$ ($\delta_1(\delta)$ определено выше), что из условия $|x - x_0| < \delta_2$ вытекает неравенство

$$|\Delta v_{rel}| < \delta; |\Delta\Omega| < \delta, l < \delta \quad (2.7)$$

В результате заключаем, что в случае, когда начальные условия удовлетворяют предположениям Дирихле:

1) условие $\nabla > \nabla_{\min}(l(t))$ может быть опущено в определении (1.11), так как оно выполняется в силу неравенства (2.5) автоматически;

2) условия

$$|\Delta v_{rel}(t=0)| < \delta, |\Delta\Omega(t=0)| < \delta, l(t=0) < \delta$$

в определении (1.11) эквивалентны в силу условий (2.6) и (2.7) условию $|x(t=0) - x_0| < \delta$.

3) условие $l(t) < \varepsilon$ в определении (1.11) эквивалентно в силу выражения (2.4), условию $\Delta a < \varepsilon, \Delta b < \varepsilon, \Delta c < \varepsilon$.

Таким образом, свойство (1.11) в этом случае эквивалентно (напомним, что $c = 1/(ab)$) устойчивости эллипсоида z_0 как положения равновесия системы (1.1)–(1.4) по отношению к функциям a и b в смысле Ляпунова, что и требовалось показать.

Поэтому здесь естественно возникает вопрос об устойчивости эллипсоидов Римана как положений равновесия системы (1.1)–(1.4) по отношению к части (a, b) переменных системы (1.1)–(1.4).

Прежде чем рассматривать этот конкретный вопрос, уместно коснуться некоторых общих фактов.

3. Замечания к вопросу об устойчивости по части переменных. Постановка вопроса об устойчивости по отношению к части переменных принадлежит Ляпунову [1].

Однако исследован этот вопрос был намного позже, более чем полвека спустя, в работах В.В. Румянцева и его последователей (библиографию см. в [5]).

В этих работах был создан основополагающий метод решения задачи об устойчивости по отношению к части переменных, фундаментом которого явились идеи Ляпунова. Проведенный в этих исследованиях анализ как теорем самого Ляпунова, так и большинства других теорем метода функций Ляпунова показал, что близкие к ним утверждения справедливы и применительно к вопросу об устойчивости по отношению к части переменных.

Сформулированы [5] общие теоремы, дающие достаточные условия устойчивости, неустойчивости, асимптотической устойчивости, равномерной асимптотической устойчивости, асимптотической устойчивости в целом – по отношению к части

переменных, рассмотрены модификации этих теорем, исследован вопрос об их обратимости. В.В. Румянцевым здесь впервые введено в литературу понятие положительной определенности функции по части переменных и определено свойство бесконечно малого высшего предела по части переменных.

Большинство теорем метода В.В. Румянцева решения задачи об устойчивости по отношению к части переменных носит универсальный характер и применимо в общем случае неавтономных динамических систем.

Их использование не требует знания какой-либо априорной информации о свойствах рассматриваемой в каждой конкретном случае системы. Но в некоторых случаях наличие такой информации может облегчить решение задачи, построенное на применении теорем общего характера.

Ниже будет показано, что именно такая ситуация имеет место и при решении вопроса об устойчивости положений равновесия системы (1.1) – (1.4) по отношению к переменным (a, b) , к которому (см. разд. 1,2) сводится исходная задача, являющаяся предметом настоящей статьи. В данном случае на основе анализа теоремы В.В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных можно сформулировать дополнение к этой теореме, представляющее собой некоторое ее развитие для одного частного класса систем, к которому принадлежит и система (1.1) – (1.4). Это и позволяет получить (см. ниже) некоторые выводы в отношении устойчивости положений равновесия рассматриваемой системы по отношению к переменным (a, b) .

Система (1.1) – (1.4) автономна. Кроме того, в фазовом пространстве этой системы оказывается возможным [7] в явном аналитическом виде определить области, такие, что почти все принадлежащие им положения равновесия системы (1.1) – (1.4) неустойчивы по Ляпунову. В соответствии с принятым здесь подходом к решению исходной задачи (см. разд. 1) далее будет рассматриваться устойчивость по отношению к (a, b) именно этих положений равновесия системы (1.1) – (1.4).

Рассмотрим сначала общий случай автономной системы

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad v_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

с неустойчивым по Ляпунову положением равновесия $x = x_0 = 0$. Пусть требуется определить характер устойчивости x_0 по отношению к переменным $y = (x_1, \dots, x_k)$, $k < n$, ($x = (x_1 \dots x_n) = (y, z)$; $z = (z_1 \dots z_{n-k}) = (x_{k+1} \dots x_n)$).

Теорема В.В. Румянцева об устойчивости по отношению к части переменных [5, 6], которую везде далее будем для краткости называть "теоремой об у-устойчивости", допускает обращение [5] для класса динамических систем достаточно общего вида [5]. Если некоторая система вида (3.1) принадлежит этому классу и если у-положительно-определенная функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условиям теоремы об у-устойчивости для этой системы (3.1), допускает бесконечно малый высший предел по y , то [5] множество $\{x: y = 0\}$ является устойчивым и, с необходимостью, инвариантным для рассматриваемой системы (3.1).

Таким образом, здесь естественно возникает вопрос о том, в какой мере для систем вида (3.1) возможна совместная выполнимость двух свойств: у-устойчивости и инвариантности множества $\{x: y = 0\}$. Рассмотрение показывает, что в случае, когда у-устойчивость имеет место, множество M если и не является инвариантным, т.е. целиком заполненным траекториями системы (3.1), то во всяком случае содержит целиком отдельные траектории, имеющие точки в сколь угодно малой окрестности x_0 . Соответствующее предложение, которое может быть сформулировано в этой связи, можно распространить и на несколько более общий случай. Пусть требуется определить устойчивость x_0 по отношению к совокупности функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$, произвольной в том смысле, что существование диффеоморфизма $x \rightarrow (f_1(x), \dots, f_k(x), z_1(x) \dots z_{n-k}(x))$ здесь уже не предполагается.

Предложение 1. Пусть x_0 – неустойчивое положение равновесия системы $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (3.1). Тогда если равновесие x_0 устойчиво по отношению к функциям

$f_i(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ ($i = 1, \dots, k, k < n$), то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется траектория системы (3.1), некоторый отрезок которой принадлежит множеству

$$\{x: f_i(x) = f_i(x_0), i = 1, \dots, k; \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$$

Заметим, что в гиперболическом случае этот факт тривиально вытекает из теоремы о топологической эквивалентности стандартному многомерному седлу (существование выходящего и входящего "усов"). Но он имеет место и в общем случае, когда положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Без ограничения общности считаем $x_0 = 0, f_i(x_0) = f_i(0) = 0$.

Из определения неустойчивости имеем, что существует некоторое число $\alpha > 0$, такое, что для любого числа $\delta > 0$ найдется точка x_δ и момент времени $t(\delta) > 0$, что $\|x_\delta\| < \delta$, но

$$\|g^{t(\delta)}(x_\delta)\| = \alpha \quad (3.2)$$

где $g^t(x)$ – траектория системы (3.1) с начальным условием $g^{t=0}(x) = x$.

Рассмотрим теперь некоторую строго убывающую последовательность $\{\delta_n\} \rightarrow 0$. Тогда для любого числа $\delta > 0$ найдется номер $N = N(\delta)$, который определяется, исходя из условия $\delta > \delta_N$ ($\delta_N \in \{\delta_n\}$), такой, что каждая из траекторий $g^t(x_{\delta_n})$ при $n > N(\delta)$ выходит в момент $t = 0$ из точки (x_{δ_n}) , принадлежащей δ -окрестности нуля. Пусть теперь задано некоторое достаточно малое положительное число $\varepsilon < \alpha$. Каждая траектория $g^t(x_{\delta_n})$ для $n > N(\delta = \varepsilon/4)$ выходит в момент $t = 0$ из $(\varepsilon/4)$ -окрестности нуля и пересекает в момент $t(\delta_n)$ сферу $\rho(x, x_0) = \|x\| = \alpha$, поэтому для нее существует момент $\tau(\delta_n)$ ($0 < \tau(\delta_n) < t(\delta_n)$), в который эта траектория пересекает также и сферу $\|x\| = \varepsilon/2$; обозначим соответствующие точки пересечения x_n (если точка пересечения траектории $g^{\tau(\delta_n)}(x_{\delta_n})$ со сферой $\|x\| = \varepsilon/2$ не единственна, то в качестве x_n можно взять любую из этих точек, например, ту, в которой траектория $g^{\tau(\delta_n)}(x_{\delta_n})$, выйдя в момент $t = 0$ и точки x_{δ_n} , пересекает сферу $\|x\| = \varepsilon/2$ первый раз):

$$g^{\tau(\delta_n)}(x_{\delta_n}) = x_n; \quad \|x_n\| = \varepsilon/2$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{x_n\}$ ($n > N(\delta = \varepsilon/4)$). Заметим, что здесь можно было бы рассмотреть отдельно каждый из двух возможных вариантов:

- 1) в последовательности $\{x_n\}$ бесконечное число различных точек.
- 2) в последовательности $\{x_n\}$ конечное число различных точек, так что по крайней мере у одной из них x^* "бесконечное число номеров": $x^* = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots$. Однако легко видеть, что приводимое ниже доказательство, непосредственно рассчитанное на первый из этих двух вариантов, пригодно и в случае, когда имеет место второй вариант, так что последний отдельно рассматривать здесь не имеет смысла.

Поскольку сфера в $\mathbb{R}^n$ является компактом, то из бесконечной последовательности $\{x_n\}$ точек на сфере $\|x\| = \varepsilon/2$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\tilde{x}_m\}$ (существует функция $n(m): N \rightarrow N: \tilde{x}_m = x_{n(m)}, \forall m$), которая сходится к некоторой точке x^* этой же сферы: $\{\tilde{x}_m\}_{m \rightarrow \infty} \rightarrow x^*, \quad \|x^*\| = \varepsilon/2$.

Рассмотрим теперь траекторию системы (3.1), проходящую через точку x_ε^* , и покажем, что вся эта траектория принадлежит поверхности

$$f_i(x) = f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

Предположим сначала, что найдется номер i ($1 \leq i \leq k$), такой, что $f_i(x_\varepsilon^*) \neq 0$; пусть $f_i(x_\varepsilon^*) = 2\beta > 0$ без ограничения общности.

Из непрерывности функций $f_i(x)$ имеем тогда, что найдется число $l(\beta)$, такое, что $\|x - x_\varepsilon^*\| < l \Rightarrow |f_i(x) - f_i(x_\varepsilon^*)| = |f_i(x) - 2\beta| < \beta$, т.е. $f_i(x) > \beta$.

Из сходимости $\{\tilde{x}_m\} \rightarrow x_\varepsilon^*$ следует, что найдется число M_1 , такое, что $\|\tilde{x}_m - x_\varepsilon^*\| < l(\beta)$, $\forall m > M_1$. Поэтому

$$f_i(\tilde{x}_m) > \beta, \quad \forall m > M_1 \quad (3.3)$$

Зададим теперь некоторое произвольное сколь угодно малое число $\delta > 0$. Определим число M_2 : $n(M_2) > N(\delta)$, где функции $n(m)$ и $N(\delta)$ определены выше.

Пусть $M = \max(M_1, M_2)$. Тогда получаем, учитывая вышеизложенное и неравенство (3.3), что любая из траекторий $g^t(x_{\delta_{n(m)}})$, $m > M$, выходит в момент $t = 0$ из точки $(x_{\delta_{n(m)}})$, лежащей в δ -окрестности нуля, и в некоторый момент $(\tau(\delta_{n(m)}))$ попадает в точку (а именно в $x_{n(m)} = \tilde{x}_m$), в которой значение функции $f_i(x)$ больше некоторого фиксированного числа $\beta > 0$. Это означает, что нулевое положение равновесия системы (3.1) является неустойчивым по отношению к функции $f_i(x)$, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и $f_i(x_\varepsilon^*) = 0$ для каждого $i = 1, \dots, k$.

Предположим теперь, что для некоторого числа $T > 0$ найдется номер i , такой, что $f_i(g^T(x_\varepsilon^*)) \neq 0$; пусть (без ограничения общности) $f_i(g^T(x_\varepsilon^*)) = 2\beta$, $\beta > 0$. В силу непрерывности функции f_i существует число $l_1 = l_1(\beta)$, такое, что

$$\|x - g^T(x_\varepsilon^*)\| < l_1 \Rightarrow |f_i(x) - f_i(g^T(x_\varepsilon^*))| < \beta \Rightarrow f_i(x) > \beta \quad (3.4)$$

В силу теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных условий заключаем, что найдется число $l_2 = l_2(l_1(\beta)) = l_2(\beta)$, такое, что

$$\|x - x_\varepsilon^*\| < l_2 \Rightarrow \|g^T(x), g^T(x_\varepsilon^*)\| < l_1 \quad (3.5)$$

Из сходимости $\{\tilde{x}_m\} \rightarrow x_\varepsilon^*$ получаем в свою очередь что существует номер M_3 , такой, что:

$$\|x_\varepsilon^* - \tilde{x}_m\| < l_2(\beta), \quad \forall m > M_3 \quad (3.6)$$

Таким образом, в силу (3.4) – (3.6) имеем: $f_i(g^T(\tilde{x}_m)) > \beta \forall m > M_3$. Пусть теперь $M_4 = \max(M_3, M_2)$, где $M_2 = M_2(\delta)$ определено выше. Тогда для каждого сколь угодно малого $\delta > 0$ любая из траекторий $g^t(x_{\delta_{n(m)}})$, $m > M_4$, выходит в момент $t = 0$ из точки $(x_{\delta_{n(m)}})$, лежащей в δ -окрестности положения равновесия $x_0 = 0$, и в некоторый момент $(t = \tau(\delta_{n(m)}) + T)$ попадает в точку (а именно, в точку $g^T(x_{n(m)}) = g^T(\tilde{x}_m)$), в которой значение функции $f_i(x)$ больше некоторого фиксированного числа $\beta > 0$. Последнее означает неустойчивость равновесия $x_0 = 0$ по отношению к функции f_i , противоречащую предположению.

Таким образом, предположение неверно, и

$$f_i(g^T(x_\varepsilon^*)) = 0, \quad \forall T > 0 \quad i = 1, \dots, k$$

Аналогично $f_i(g^T(x_\varepsilon^*)) = 0$ и при отрицательных T . В результате получаем, что вся траектория $g^t(x_\varepsilon^*)$ принадлежит множеству уровня

$$\{x: f_i(x) = f_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, k\}$$

Поскольку точка x_ε^* лежит в ε -окрестности точки $x_0 = 0$ ($\|x_\varepsilon^*\| = \varepsilon/2$ см. выше), то и некоторый отрезок траектории $g'(x_\varepsilon^*)$ лежит в этой окрестности. Таким образом, для любого наперед заданного достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует траектория системы (3.1), принадлежащая множеству

$$\{x: f_i(x) = f_i(x_0), i = 1, \dots, k; \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

что и доказывает утверждение предложения 1.

Заметим, что в случае, когда последовательность $\{x_n\}$ состоит из конечного числа точек, так что одна из них, скажем, x^* , имеет бесконечно много "номеров" $x_\varepsilon^* = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots (\{n_k\} \rightarrow \infty)$, траектория $g'(x_\varepsilon^*)$ бесконечно близко подходит к точке $x_0 = 0$ при $t \rightarrow -\infty$, и поэтому доказательство здесь упрощается: равенство нулю всех функций $f_i(x)$ в точках этой траектории $g'(x_\varepsilon^*)$ сразу вытекает из определения устойчивости положения равновесия x_0 по отношению к функциям $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$).

Пусть теперь функции $f_i(x)$ – класса C^m , $m \geq 1$ или аналитические; $d^{(p)}f(v)$ – p -я производная Ли по времени от функции f в силу уравнений движения (3.1).

Следствие 1. Если неустойчивое положение равновесия $x_0 = 0$ системы (3.1), $v_j(x) \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ ($j = 1, \dots, n$; $m \geq 1$) является устойчивым по отношению к каждой из функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$, $f_i \in C^m(\mathbb{R}^n)$, то для каждого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в $\mathbb{R}^n$ существует кривая, все точки которой удовлетворяют алгебраической системе

$$d^p f_i(x)/dt^p = d^p f_i(v)(x) = 0, \quad p = 0, 1, \dots, m; \quad i = 1, \dots, k \quad (3.7)$$

и такая, что некоторый отрезок этой кривой лежит в ε -окрестности точки $x_0 = 0$.

Действительно, следствие 1 сразу же вытекает из предложения 1.

Траектория $g'(x_\varepsilon^*)$, определенная в доказательстве предложения 1, принадлежит множеству $\{x: f_i(x) = 0\}$. Пусть в некоторой точке $\tilde{x}_1$ траектории $g'(x_\varepsilon^*) df_i(v)(\tilde{x}_1) = \langle \nabla f_i, v \rangle(\tilde{x}_1) = c > 0$. Тогда по непрерывности в некоторой γ -окрестности точки $\tilde{x}_1$ на траектории $g'(x_\varepsilon^*)$ имеем $df_i(v)(x) > c/2$, $\|x - \tilde{x}_1\| < \gamma$. Пусть τ – время, за которое траектория, выйдя из точки $\tilde{x}_1$, попадает в точку $\tilde{x}_2 = g'(\tilde{x}_1) \cap \{x: \|x - \tilde{x}_1\| < \gamma\}$. Имеем

$$f_i(\tilde{x}_2) = f_i(\tilde{x}_1) + \int_0^\tau df_i(v)(g'(\tilde{x}_1))dt > f_i(\tilde{x}_1) + \frac{c}{2}\tau = \frac{c}{2}\tau \quad (f_i(\tilde{x}_1) = 0)$$

Поэтому $f_i(\tilde{x}_2) \neq 0$. Получили противоречие; следовательно, все точки траектории $g'(x_\varepsilon^*)$ принадлежат множеству $\{x: df_i(v)(x) = 0$ (для каждого $i = 1, \dots, k\}$. Рассуждая точно так же по отношению к функции $f_i^{(1)}(x) = df_i(v)(x)$, получим, что все точки $g'(x_\varepsilon^*)$ принадлежат множеству

$$\{x: df_i^{(1)}(v)(x) = d^{(2)}f_i(v)(x) = 0, \quad i = 1, \dots, k\}$$

и т.д.

В результате имеем, что все точки траектории $g'(x_\varepsilon^*)$ удовлетворяют системе (3.7). Далее, точка x_ε^* лежит внутри ε -окрестности нуля ($\|x_\varepsilon^*\| = \varepsilon/2$, см. выше), так что некоторый отрезок траектории $g'(x_\varepsilon^*)$ также принадлежит этой окрестности. Это и доказывает утверждение следствия 1.

Таким образом, некоторое развитие теоремы об u -устойчивости [5] дает необходимые условия такой устойчивости. Однако эти условия применимы лишь для автономных систем и лишь в случае, когда неустойчивость положения равновесия по Ляпунову известна дополнительно, в то время как теорема об u -устойчивости применима в общем случае неавтономных систем (см. разд. 3) безотносительно к тому, известен заранее характер устойчивости их положений равновесия по Ляпунову или нет.

Предложение 2. Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$, являющейся неустойчивым по Ляпунову положением равновесия системы (3.1), $v_j(x) \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$; $m \geq 1$, алгебраическая система

$$d^p f^i / dt^p = d^{(p)} f_i(v)(x) = 0, \quad p = 0, \dots, m, \quad i = 1, \dots, k, \quad k < n$$

где $f_i \in C^m(\mathbb{R}^n)$, имеет единственное решение. Тогда положение равновесия x_0 неустойчиво по отношению к совокупности функций $f_1(x), \dots, f_k(x)$.

Действительно, утверждение, сформулированное в предложении 2, – прямое следствие следствия 1. Заметим, что условия следствия 1 носят конструктивный характер. При этом в случае, когда выполнено условие предложения 2, они заведомо не выполняются (откуда сразу же следует вывод о неустойчивости x_0 по отношению к функции f). Но эти условия могут не выполняться, очевидно, и тогда, когда условие предложения 2 не выполнено. Однако последнее оказывается, формально говоря, выполненным "почти всегда", если $m \geq n$, в связи с чем здесь может быть сделано следующее замечание:

Для любой динамической системы (3.1), $v_j(x) \in C^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$, "общего положения" с неустойчивым по Ляпунову положением равновесия $x_0 = 0$ в общем случае произвольной функции фазовых переменных $f(x) \in C^n(\mathbb{R}^n)$ ($f(0) = 0$) имеет место также и неустойчивость положения равновесия x_0 по отношению к функции f .

Действительно, нетрудно показать, что в общем случае произвольной функции f фазовых переменных системы (3.1) якобиан

$$\det \left| \frac{D(f^{(0)}, f^{(1)}(x), \dots, f^{(n-1)}(x))}{D(x)} \right|_{x_0=0} \neq 0$$

где $f^{(k)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} d^k f(x) / dt^k$ – из левая часть k -го уравнения системы (3.7).

Отсюда при учете предложения 2 сразу получаем утверждение, сформулированное в замечании.

Предложение 2 представляет собой достаточное условие частичной неустойчивости для автономных систем с неустойчивыми по Ляпунову положениями равновесия. Нетрудно показать, что в автономном случае при выполнении условий теоремы В.В. Румянцева об u -неустойчивости ($y = (y_1, \dots, y_s)$, $s < n$) [5, 6] условия предложения 2 также будут выполнены, если функция $V(t, y)$, удовлетворяющая теореме об u -неустойчивости, не зависит явно от t .

Действительно, в этом случае условия предложения 2 удовлетворяются для $k = 1$, $m = 1$ и для функции $f_1(x) = f(x) = \tilde{V}(y)$, где $\tilde{V}(y)$ – любая функция, совпадающая с функцией $V(y)$ в области $\tilde{D} \subset \mathbb{R}_{\{y\}}^s$, если D – область $V(y) > 0$, фигурирующая в теореме об u -неустойчивости, и продолженная в область $B_{\epsilon_0} \setminus \bar{D}$ ($\epsilon_0 > 0$) некоторой положительной функцией класса $C^1(\mathbb{R}_{\{y\}}^s)$ с сохранением производных на границе ∂D . А из неустойчивости положения равновесия x_0 по отношению к некоторой функции $V(y)$ следует и его неустойчивость по отношению к совокупности переменных $\{y\}$.

Однако если функция $V(t, y)$, удовлетворяющая теореме об у-неустойчивости, зависит явно от t , это уже не влечет каких-либо заключений относительно выполнимости условий предложения 2. Заметим также, что для возможности использования предложения 2 в каждом конкретном случае необходимо дополнительно располагать информацией о неустойчивости положения равновесия по Ляпунову, тогда как теорема об у-неустойчивости автоматически дает [1,5] наряду с достаточными условиями у-неустойчивости также и достаточные условия неустойчивости по Ляпунову (как это и должно быть).

В задаче об устойчивости по отношению к части переменных (a, b) положений равновесия системы (1.1) – (1.4), соответствующих эллипсоидам Римана, также имеет место ситуация общего положения, о которой шла речь в последнем замечании. Покажем это.

4. Об устойчивости эллипсоидов Римана в смысле определения Ляпунова (1.11). Рассмотрим вопрос о частичной устойчивости по отношению к переменным a, b положений равновесия системы (1.1) – (1.4), соответствующих эллипсоидам Римана.

Ранее было показано [7], что система (1.1) – (1.4) диффеоморфизмом

$$(a, b, \dot{a}, \dot{b}, p, q, r, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \rightarrow \{z\} = \{a, b, p_{(a)}, p_{(b)}; G_1, G_2, G_3, l_1, l_2, l_3\} \quad (4.1)$$

задаваемым соотношениями

$$G_1 = (M/5)((b^2 - c^2)^2)/(b^2 + c^2))p + (4M/5)((b^2 c^2)/(b^2 + c^2))\omega_1 \quad (123, abc, pqr)$$

$$l_1 = -(2M/5)bc\omega_1 \quad (123, abc)$$

$$p_a = (M/5) (\dot{a}(1 + 1/(a^4 b^2)) + \dot{b}/(a^3 b^3))$$

$$p_{(b)} = (M/5)(\dot{b}(1 + 1/(a^2 b^4)) + \dot{a}/(a^3 b^3))$$

приводится [7] к системе гамильтонова вида

$$\dot{z} = \{z, H\} \quad (4.2)$$

Здесь $H(z)$ – энергия (1.7), выраженная в координатах $\{z\}$ (4.1),

$$H = \mathcal{H}|_{c=1/(ab)} + 5(2M)^{-1}(a^4 b^4 (p_{(a)}^2 + p_{(b)}^2) + (ap_{(a)} - bp_{(b)})^2)(a^4 b^4 + a^2 + b^2)^{-1} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) = & 5(2M)^{-1}[(b^2 + c^2)(b^2 - c^2)^{-2}G_1^2 + (a^2 + c^2)(a^2 - c^2)^{-2}G_2^2 + \\ & + (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^{-2}G_3^2 + 4bc(b^2 - c^2)^{-2}G_1 l_1 + 4ac(a^2 - c^2)^{-2}G_2 l_2 + \\ & + 4ab(a^2 - b^2)^{-2}G_3 l_3 + (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)^{-2}l_1^2 + (a^2 + c^2)(a^2 - c^2)^{-2}l_2^2 + \\ & + (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^{-2}l_3^2] + W \end{aligned} \quad (4.4)$$

В уравнении (4.2) $\{ , \}$ – скобка Пуассона на пространстве функций $C^\infty(Z)$, задаваемая следующим образом:

$$\{G_i, G_j\} = \varepsilon_{kji} G_k, \quad \{l_i, l_j\} = \varepsilon_{kji} l_k, \quad \{a, p_{(0)}\} = \{b, p_{(b)}\} = 1 \quad (4.5)$$

скобки Пуассона между всеми остальными парами фазовых переменных тождественно равны нулю.

Везде далее систему (1.1) – (1.4) будем рассматривать в координатах $\{z\}$ (4.1), т.е. в виде (4.2), так как это удобнее с вычислительной точки зрения.

Пусть теперь z_0 – положение равновесия системы (1.1) – (1.4). Рассмотрим систему (1.1) – (1.4) на множестве уровня интегралов момента (1.8) и циркуляции (1.9)

$$M_{z_0} = \{z : \sum G_i^2 = G_i^2(z_0), \sum l_i^2 = l_i^2(z_0)\}$$

$$M_{z_0} = M_{z_0} \{\tilde{z}\}, \quad (\tilde{z}) = (a, b, p_{(a)}, p_{(b)}; G_1, l_1, G_2, l_2)$$

Имеем систему

$$\dot{\tilde{z}} = \{\tilde{z}, h(\tilde{z}; (z_0))\}' \quad (4.6)$$

(являющуюся собственно гамильтоновой [7]).

Здесь $h(\tilde{z}; (z_0))$ – ограничение функции (4.3) на уровень M_{z_0} , обозначение (z_0) указывает на параметрическую зависимость функции $h(\tilde{z}; (z_0))$ от координат точки z_0 в пространстве рассматриваемого множества положений равновесия, соответствующих эллипсоидам равновесия; скобка $\{ \cdot, \cdot \}'$ – ограничение скобки Пуассона $\{ \cdot, \cdot \}$ на пространство $C'^\infty(M_{z_0})$.

Как будет показано ниже, для почти каждого эллипсоида Римана z_0 первого и второго семейств в некоторой окрестности $O_{(z_0)}$ точки $\tilde{z}_0$ в фазовом пространстве $(G_i, l_i, p_{(a)}, p_{(b)}, a, b, i = 1, 2)$ системы (4.6), отвечающей этому эллипсоиду z_0 , решение соответствующей алгебраической системы (3.7) с $f_1 = a, f_2 = b$ является единственным: $z = \tilde{z}_0$.

Тогда при учете предложения 2 из разд. 3 (а также того, что каждому неустойчивому положению равновесия $\tilde{z}_0$ системы (4.6) соответствует, очевидно, неустойчивое положение равновесия z_0 системы (4.2) и, обратно, для каждого неустойчивого положения равновесия z_0 системы (4.2) соответствующее ему положение равновесия системы (4.6) $\tilde{z}_0$ также неустойчиво) получим, что почти все неустойчивые положения равновесия системы (1.1) – (1.4) будут в то же время и неустойчивыми по отношению к переменным (a, b) . А значит, в силу изложенного в разд. 2 соответствующие им эллипсоиды равновесия будут заведомо неустойчивыми в смысле определения Ляпунова (1.11) фигурами равновесия.

Об устойчивости по отношению к полуосям эллипсоидов первого семейства эллипсоидов Римана.

Риман показал [3], что эллипсоиды равновесия существуют только в двух случаях:

- 1) когда одна из трех пар (ω_1, p) , (ω_2, q) и (ω_3, r) (или (G_i, l_i) , $i = 1, 2, 3$) имеет обе нулевые компоненты (без ограничения общности – первая: $l_1 = G_1 = 0$),
- 2) когда нулевые компоненты имеют две из этих пар ($l_1 = G_1 = 0, l_2 = G_2 = 0$).

Рассмотрим первое из указанных семейств эллипсоидов равновесия P_1^2 . Оно образовано эллипсоидами

$$z_0 = \{a = a_0, b = b_0, G_1 = l_1 = 0, G_2 = G_{20}, l_2 = l_{20}, G_3 = G_{30}, l_3 = l_{30}\} \quad (4.7)$$

в задании которых шесть параметров связаны [3] четырьмя уравнениями равновесия.

В параметрическом пространстве семейства P_1^2 эллипсоидов (4.7) координатами выберем (a_0, b_0) [3].

Учитывая вид функции $h(\tilde{z}; (z_0))$ и скобки Пуассона $\{ \cdot, \cdot \}'$, видим, что все точки, удовлетворяющие системе (3.7) для динамической системы (4.6) и для $f_1 = a, f_2 = b$, заведомо удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a = a_0, b = b_0, p_{(a)} = p_{(b)} = 0 \\ h_a(\tilde{z}; (z_0)) = \dot{p}_{(a)} = 0, h_b(\tilde{z}; (z_0)) = \dot{p}_{(b)} = 0 \\ \frac{d}{dt}(h_a(\tilde{z}; (z_0))) = 0, \frac{d}{dt}(h_b(\tilde{z}; (z_0))) = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь и далее используется обозначение $h_a = \partial h / \partial a$, $h_b = \partial h / \partial b$.

Система (4.8) эквивалентна системе четырех алгебраических уравнений

$$h_a(\tilde{z}; (z_0))|_* = h_b(\tilde{z}; (z_0))|_* = 0 \quad (4.9)$$

$$\left[\frac{d}{dt}(h_a(\tilde{z};(z_0))) \right]_* = \left[\frac{d}{dt}(h_b(\tilde{z};(z_0))) \right]_* = 0$$

с четырьмя неизвестными: G_1, l_1, G_2, l_2 . Здесь и далее звездочка означает, что значение производной берется в точке с координатами $a = a_0, b = b_0, p_{(a)} = p_{(b)} = 0$.

Покажем, что для почти всех значений z_0 решение системы (4.9) $G_i = G_{i0} = G_i(z_0), l_i = l_i(z_0)$ ($i = 1, 2$) является в некоторой окрестности точки $(G_1(z_0), G_2(z_0), l_1(z_0), l_2(z_0))$ единственным.

Выпишем в явном виде, с учетом явного вида функции $h(\tilde{z};(z_0))$, уравнения (4.9) (две звездочки здесь и далее означают, что соответствующие производные берутся в точке $(a, b) = (a_0, b_0)$)

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & \frac{5}{2M} \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{b^2 + c^2}{(b^2 - c^2)^2} \right) \right]_{**} G_1^2 + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{b^2 + c^2}{(b^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} l_1^2 + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{4bc}{(b^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} G_1 l_1 + \\ & + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} G_2^2 + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{4ac}{(a^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} G_2 l_2 + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} l_2^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} \right) \Big|_{**} (G_0^2 - G_1^2 - G_2^2) + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2} \right) \Big|_{**} (G_0^2 - G_1^2 - \\ & - G_2^2)^{1/2} (l_0^2 - l_1^2 - l_2^2)^{1/2} + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} \right) \Big|_{**} (l_0^2 - l_1^2 - l_2^2) \Big] + \frac{\partial}{\partial a} (W(a, b)) \Big|_{**} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\Psi_2 = \Psi_1 \Big|_{\partial/\partial a \rightarrow \partial/\partial b} = 0 \quad (4.11)$$

$$\Psi_3 = B_a^{(1)} + B_a^{(2)} + B_a^{(3)} = 0 \quad (4.12)$$

$$\Psi_4 = B_b^{(1)} + B_b^{(2)} + B_b^{(3)} = 0 \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} B_a^{(1)} = & \frac{5}{M} \left\{ \left(\frac{a_0^2 + b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2)^2} G_3 G_2 + \frac{2a_0 b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2} l_3 G_2 - \frac{a_0^2 + c_0^2}{(a_0^2 - c_0^2)^2} G_2 G_3 - \frac{2a_0 c_0}{(a_0^2 - c_0^2)^2} l_2 G_3 \right) \otimes \right. \\ & \otimes \left(\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{b_0^2 + c_0^2}{(b_0^2 - c_0^2)^2} \right) \Big|_{**} 2G_1 + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{4b_0 c_0}{(b_0^2 - c_0^2)^2} \right) \Big|_{**} l_1 \right) + \left(\frac{a_0^2 + b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2)^2} l_2 l_3 + \frac{2a_0 b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2} G_3 l_2 - \right. \\ & - \frac{a_0^2 + c_0^2}{(a_0^2 - c_0^2)^2} l_2 l_3 - \frac{2a_0 c_0}{(a_0^2 - c_0^2)^2} G_2 l_3 \Big) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{4b_0 c_0}{(b_0^2 - c_0^2)^2} \right) \Big|_{**} G_1 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{b_0^2 + c_0^2}{(b_0^2 - c_0^2)^2} \right) \Big|_{**} 2l_1 \right) \right\} \Big|_{\substack{g_3 = (G_0^2 - G_1^2 - G_2^2)^{1/2} \\ l_3 = (l_0^2 - l_1^2 - l_2^2)^{1/2}}} \end{aligned}$$

(123, $a_0 b_0 c_0$)

$$B_b^{(i)} = B_a^{(i)} \Big|_{\partial/\partial a \rightarrow \partial/\partial b} \quad (4.14)$$

В формуле (4.11) символ $|\partial/\partial a \rightarrow \partial/\partial b$ означает, что явное выражение для функции ψ_2 получается, если в выражении для функции ψ_1 (4.10) все частные производные по переменной a заменить производными по переменной b .

Рассмотрим теперь якобиан матрицы

$$A = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)}{D(G_1, l_1, G_2, l_2)} \quad (4.15)$$

где все производные берутся в точке $G_i = G_{i0}$, $l_i = l_{i0}$ ($i = 1, 2$).

Дифференцируя функции ψ_1 и ψ_2 по переменным G_1 и l_1 , находим, что производные представляют собой каждая сумму членов, пропорциональных либо G_1 , либо l_1 , так что

$$\partial\psi_i/\partial G_1|_0 = \partial\psi_i/\partial l_1|_0 = 0, \quad i = 1, 2$$

Нулевой индекс означает, что производные берутся в точке $(G_1, l_1, G_2, l_2) = (0, 0, G_{20}, l_{20})$.

Далее, функции ψ_3 и ψ_4 , записанные в левых частях уравнений (4.12) и (4.13), являются суммами членов вида $\varphi(a_0, b_0) s_1 s_2 s_3$, где φ – некоторая функция, а s есть G или l . Поэтому при дифференцировании функции ψ_3 и ψ_4 по переменным G_2 и l_2 получаются функции, являющиеся суммами членов, пропорциональных s_1 , т.е. l_1 или G_1 . Таким образом, имеем

$$\partial\psi_i/\partial G_2|_0 = \partial\psi_i/\partial l_2|_0 = 0, \quad i = 3, 4$$

Поэтому матрица A при $l_{i0} = G_{i0} = 0$ имеет блочный вид и ее определитель (4.15) будет равен произведению определителей

$$\det A = \det A_1 \times \det A_2; \quad A_1 = \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(G_2, l_2)} \Big|_0, \quad A_2 = \frac{D(\psi_3, \psi_4)}{D(G_1, l_1)} \Big|_0 \quad (4.16)$$

Рассмотрим сначала матрицу A_1 .

С учетом соотношения $\partial G_3/\partial G_2 = -G_2/G_3$ находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial G_2} \Big|_0 &= 2G_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} - \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} \right) \Big|_{**} + \frac{2l_2}{G_2} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{ac}{(a^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2l_3}{G_3} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{ab}{(a^2 - c^2)^2} \right) \Big|_{**} \right\} \end{aligned}$$

Аналогично

$$\partial\psi_2/\partial G_2|_0 = \partial\psi_1/\partial G_2|_{\partial/\partial a \rightarrow \partial/\partial b}$$

Точно так же

$$\partial\psi_1/\partial l_2|_0 = \partial\psi_1/\partial G_2|_{l_i \leftrightarrow G_i}, \quad i = 2, 3 \quad \text{и} \quad \partial\psi_2/\partial l_2|_0 = \partial\psi_1/\partial l_2|_{\partial/\partial a \rightarrow \partial/\partial b}$$

Поэтому элементы рассматриваемой матрицы таковы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial G_2} \Big|_0 &= 2G_{20} \frac{\partial J_1}{\partial a}, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial G_2} \Big|_0 = 2G_{20} \frac{\partial J_1}{\partial b} \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial l_2} \Big|_0 &= 2l_{20} \frac{\partial J_2}{\partial a}, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial l_2} \Big|_0 = 2l_{20} \frac{\partial J_2}{\partial b} \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$J_1 = J_1 \left(a, b, \frac{l_{20}}{G_{20}}, \frac{l_{30}}{G_{30}} \right) = \left\{ \frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)^2} - \frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{2l_{20}}{G_{20}} \frac{ac}{(a^2 - c^2)^2} - \frac{2l_{30}}{G_{30}} \frac{ab}{(a^2 - b^2)^2} \right\} \Big|_{**},$$

$$J_2 = J_1 |_{G_i \leftrightarrow l_i (i=1,2)}$$

Таким образом, получаем

$$\det A_1 = 4G_{20}l_{20} \det D(J_1, J_2) / D(a, b) |_{**} \quad (4.18)$$

Заметим теперь, что функции J_1 и J_2 в точности совпадают [3] с левыми частями первых двух уравнений равновесия. Из этих уравнений при любых l_{20}/G_{20} , l_{30}/G_{30} единственным образом определяются [3] параметры a_0 и b_0 эллипсоида Римана с данными значениями параметров l_{20}/G_{20} , l_{30}/G_{30} – неявные функции $a_0(l_{20}/G_{20}, l_{30}/G_{30})$, $b_0(l_{20}/G_{20}, l_{30}/G_{30})$. Поэтому

$$\det D(J_1, J_2) / D(a, b) |_{**} \neq 0 \quad (4.19)$$

что можно получить, конечно, и прямым вычислением.

Рассмотрим теперь матрицу A_2 из формулы (4.16).

Исходя из третьего уравнения (4.9) и вида функции $h(\tilde{z}; (z_0))$, имеем

$$\begin{aligned} \psi_3(G_1, G_2, l_1, l_2) &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial a} \right) \right) \Big|_* = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} \right) \Big|_* = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} \Big|_{**} \right) + \dot{a} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial a^2} \Big|_* + \dot{b} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial a \partial b} \Big|_* = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} \Big|_{**} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \psi_1(G_1, G_2, l_1, l_2) = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial G_1} \dot{G}_1 \right) \Big|_{**} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial G_2} \dot{G}_2 \right) \Big|_{**} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial l_1} \dot{l}_1 \right) \Big|_{**} + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial l_2} \dot{l}_2 \right) \Big|_{**} \end{aligned} \quad (4.20)$$

где $\mathcal{H}$ – функция (4.4), а

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= \frac{5}{M} \left[\left(\frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2} (G_0^2 - G_1^2 - G_2^2)^{1/2} + \frac{2ab}{(a^2 - b^2)^2} (l_0^2 - l_1^2 - l_2^2)^{1/2} \right) G_2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a^2 + c^2}{(a^2 - c^2)^2} G_2 + \frac{2ac}{(a^2 - c^2)^2} l_2 \right) (G_0^2 - G_1^2 - G_2^2)^{1/2} \right] \quad (123, \quad abc) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Дифференцируя функцию ψ_3 (4.20) с учетом формул (4.21), имеем

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial G_1} \Big|_0 = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial G_2} \right) \left(\frac{\partial \dot{G}_2}{\partial G_1} \right) \Big|_0 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial l_2} \right) \left(\frac{\partial \dot{l}_2}{\partial G_1} \right) \Big|_0 \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) вытекает из того, что

$$\dot{s}_i |_0 = \dot{s}_i |_{\tilde{z}_0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad s = G, l$$

так как $\tilde{z}_0 = \{a = a_0, b = b_0, G_1 = l_1 = 0, G_{20}, l_{20}\}$ – положение равновесия системы (4.6) и

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial G_1} \Big|_0 = \frac{\partial \psi_1}{\partial l_1} \Big|_0 = \frac{\partial \psi_2}{\partial G_1} \Big|_0 = \frac{\partial \psi_2}{\partial l_1} \Big|_0 = 0$$

как следствие вида функции ψ_1 (4.10) и ψ_2 (4.11).

Аналогично имеем

$$\left. \frac{\partial \psi_4}{\partial G_1} \right|_0 = \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial G_2} \right) \left(\frac{\partial \dot{G}_2}{\partial G_1} \right) + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial l_2} \right) \left(\frac{\partial \dot{l}_2}{\partial G_1} \right) \right] \Big|_0 \quad (4.23)$$

Далее, точно так же

$$\left. \frac{\partial \psi_x}{\partial l_1} \right|_0 = \left[\left(\frac{\partial \psi_{x-2}}{\partial G_2} \right) \left(\frac{\partial \dot{G}_2}{\partial l_1} \right) + \left(\frac{\partial \psi_{x-2}}{\partial l_2} \right) \left(\frac{\partial \dot{l}_2}{\partial l_1} \right) \right] \Big|_0, \quad x = 3, 4 \quad (4.24)$$

Из соотношений ((4.22) – (4.24)) сразу получаем, что

$$[D(\psi_3, \psi_4) / D(G_1, l_1)]|_0 = [D(\psi_1, \psi_2) / D(G_2, l_2)]|_0 B \quad (4.25)$$

где $B = \|\beta_{ij}\|$ – матрица 2×2 , элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= \frac{5}{M} \left(\frac{b_0^2 + c_0^2}{(b_0^2 - c_0^2)^2} G_{30} - \frac{a_0^2 + b_0^2}{(a_0^2 - b_0^2)^2} G_{30} - \frac{2a_0 b_0}{(a_0^2 - b_0^2)^2} l_{30} \right) \\ \beta_{12} &= \frac{5}{M} \frac{2b_0 c_0}{(b_0^2 - c_0^2)^2} l_{30}, \quad \beta_{22} = \beta_{11} |_{l_{30} \leftrightarrow G_{30}}, \quad \beta_{21} = \beta_{12} |_{l_{30} \leftrightarrow G_{30}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Условие $\det B = 0$ представляет собой, при учете выражений (4.26), квадратное уравнение

$$\begin{aligned} x^2 [(2a_0 b_0 (a_0^2 - b_0^2)^{-2} ((b_0^2 + c_0^2)(b_0^2 - c_0^2)^{-2} - (a_0^2 + b_0^2)(a_0^2 - b_0^2)^{-2})) + x[4b_0^2 c_0^2 (b_0^2 - c_0^2)^{-4} - \\ - 4a_0^2 b_0^2 (a_0^2 - b_0^2)^{-4} - ((b_0^2 + c_0^2)(b_0^2 - c_0^2)^{-2} - (a_0^2 + b_0^2)(a_0^2 - b_0^2)^{-2})^2] + \\ + 2a_0 b_0 (a_0^2 - b_0^2)^{-2} ((b_0^2 + c_0^2)(b_0^2 - c_0^2)^{-2} - (a_0^2 + b_0^2)(a_0^2 - b_0^2)^{-2})] = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

относительно $x = G_{30}/l_{30}$. Однако из уравнений равновесия следует [3], что величина G_{30}/l_{30} удовлетворяет другому квадратному уравнению, причем нетрудно убедиться, что при почти всех a_0, b_0 у этого уравнения и уравнения (4.27) нет общих корней.

Это означает, что при почти всех значениях (a_0, b_0) определитель матрицы A отличен от нуля. Отсюда, при учете выражения (4.25) и неравенства (4.19) получаем

$$\det A_2 \neq 0 \quad (4.28)$$

В результате имеем, исходя из соотношений (4.16), (4.18), (4.19) и (4.28), что $\det A \neq 0$ при почти всех значениях a_0, b_0 .

Таким образом, для почти всех эллипсоидов первого семейства (4.7) решение $G_1 = l_1 = 0, G_2 = G_{20}, l_2 = l_{20}$ алгебраической системы (4.9) является в некоторой окрестности точки $(0, 0, G_{20}, l_{20})$ единственным.

Следовательно, почти все неустойчивые эллипсоиды Римана первого семейства являются в то же время и неустойчивыми по отношению к переменным a, b . Иными словами, почти все эллипсоиды Римана из первого семейства с полуосями (a_0, b_0) , принадлежащими определенной в [7] области U в параметрическом пространстве $P_2^1\{a_0, b_0\}$, неустойчивы в смысле определения Ляпунова устойчивости формы равновесия уже в классе возмущений, удовлетворяющих предположениям Дирихле. А значит, эти эллипсоиды представляют собой неустойчивые фигуры равновесия вращающейся жидкости в смысле определения данного Ляпуновым в [1].

Об устойчивости по отношению к полуосям эллипсоидов второго семейства эллипсоидов Римана. Рассмотрим теперь устойчивость эллипсоидов равновесия, относящихся ко второму из указанных выше семейств эллипсоидов Римана [3, 7]

$$z_0 = \{a = a_0, b = b_0, p_{(a)} = p_{(b)} = 0, \quad l_1 = l_2 = G_1 = G_2 = 0, \quad (4.29)$$

$$G_3 = \Omega(C_{10} + fG_{20})^{1/2}, \quad l_3 = -\frac{2M}{5}a_0b_0f\Omega\}$$

$$f \geq 1, \quad a_0 \geq c_0 = 1/(a_0b_0), b_0 > c_0 = 1/(a_0b_0)$$

Четыре параметра (a_0, b_0, f, Ω) , фигурирующие в задании эллипсоидов (4.29), связаны [3, 4] двумя уравнениями равновесия.

В случае эллипсоидов (4.29) система (4.6) на уровне интегралов момента (1.8) и циркуляции (1.9) системы (1.1) – (1.4)

$$\dot{\tilde{z}} = \{\tilde{z}, \bar{h}(\tilde{z}; (z_0))\} \quad (4.30)$$

имеет [7] инвариантное множество

$$N = \{\tilde{z} : G_1 = l_1 = G_2 = l_2 = G_{10} = l_{10} = l_{20} = G_{20} = 0\}$$

Динамическая система, определенная таким образом системой (4.30) на множестве N , является гамильтоновой системой с фазовым пространством $N \{(a, b, p_{(a)}, p_{(b)})\}$. Условия принадлежности некоторой траектории этой системы плоскости $a = a_0, b = b_0$ и имеют вид $a = a_0, b = b_0, p_{(a)} = p_{(b)} = 0$, и поэтому такой траектории, отличной от положения равновесия, не существует. Следовательно, получаем, при учете предложения 2 из разд. 3, что любой эллипсоид Римана второго семейства, неустойчивый уже (что здесь существенно) в классе возмущений, удовлетворяющих в начальный момент условиям

$$G_i(z(t=0)) = G_{i0}, \quad l_i(z(t=0)) = l_{i0}; \quad z(t=0) \in N$$

является неустойчивым по отношению к переменным a, b .

Однако было показано [7], что множество всех неустойчивых эллипсоидов (4.29) исчерпывается теми, что неустойчивы уже в классе возмущений, принадлежащих множеству N . Поэтому в результате имеем, что все неустойчивые по Ляпунову как положения равновесия системы (1.1) – (1.4) эллипсоиды (4.29) являются одновременно и неустойчивыми (в смысле Ляпунова) по отношению к переменным (a, b) .

Следовательно, все (кроме, быть может, эллипсоидов бифуркации) эллипсоиды Римана второго семейства (4.29) с полуосями, удовлетворяющими условию, противоположному условию (3.4.10) из [7], представляют собой неустойчивые формы равновесия в смысле определения, данного Ляпуновым [1].

Таким образом, получаем, что анализ условной устойчивости позволил ответить на вопрос о характере понимаемой в соответствии с общей постановкой Ляпунова устойчивости эллипсоидов Римана.

Устойчивость эллипсоидов равновесия в смысле определения (1.11), данного Ляпуновым [1], за исключением частных случаев эллипсоидов Маклорена и Якоби, исследовавшихся самим Ляпуновым, ранее в литературе не рассматривалась.

Автор благодарит В.В. Румянцева за помощь в работе и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00785).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. СПб., 1884. 109 с.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости эллипсоидов Маклорена вращающейся жидкости // ПММ 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 494–504.
3. *Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven: London: Yale Univ. Press, 1969 = *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
4. *Appell P.* Traité de mécanique rationnelle. Т. 4. Fasc. 1. Figures d'équilibre d'une masse liquide homogène en rotation. Paris. Gauthier-Villars, 1932 = *Аппель П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 375 с.
5. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
6. *Озиранер А.С., Румянцев В.В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движений относительно к части переменных // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 364–384.
7. *Григорьева Н.Б.* Об устойчивости эллипсоидов равновесия вращающейся жидкости // ПММ 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 963–975.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.2001