

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. Ю.Д. Глухих, В.Н. Тхай

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВДОЛЬ ПРЯМОЙ НА ПЛОСКОСТИ

Исследуется задача об устойчивости качения по горизонтальной шероховатой плоскости вдоль прямой тяжелого твердого тела, ограниченного поверхностью эллипсоида и с полостью в форме соосного эллипсоида. Показано, что в случае тела, близкого к динамически симметричному, всегда возникает параметрический резонанс, который приводит к неустойчивости качения. При этом каждому эллипсоиду отвечает своя "индивидуальная" резонансная угловая скорость. В общем случае в пространстве параметров выделены области выполнения необходимых условий устойчивости. Решена задача вычисления резонансного коэффициента, отвечающего за неустойчивость, при параметрическом резонансе в обратимой системе третьего порядка.

1. Параметрический резонанс в обратимой системе третьего порядка. Рассмотрим квазиавтономную 2π -периодическую по t обратимую систему дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\dot{u}_s = U_s^0(u, v) + \varepsilon U_s(\varepsilon, u, v, t), \quad s = 1, 2, \quad \dot{v} = V^0(u, v) + \varepsilon V(\varepsilon, u, v, t) \quad (1.1)$$

(ε – малый параметр), инвариантную относительно замены $(u_1, u_2, v, t) \rightarrow (u_1, u_2, -v, -t)$. Предположим, что полученная из (1.1) при $\varepsilon = 0$ порождающая система допускает постоянное решение $(u_1^0, u_2^0, 0)$, принадлежащее неподвижному множеству $M = \{u_1, u_2, v: v = 0\}$. Уравнения в вариациях, составленные для этого решения, имеют вид

$$\dot{x}_s = b_s^0 y, \quad s = 1, 2, \quad \dot{y} = a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2 \quad (1.2)$$

(a_s^0, b_s^0 – постоянные). Если $a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 \neq -k^2$, $k \in \mathbb{N}$, или $a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 = 0$, но $|a_1^0| + |a_2^0| \neq 0$, то система (1.1) при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ допускает [1] 2π -периодическое решение

$$u_s^*(\varepsilon, t) = u_s^0 + \varepsilon u_s^1(\varepsilon, t), \quad s = 1, 2, \quad v^*(\varepsilon, t) = \varepsilon v_1(\varepsilon, t) \quad (1.3)$$

симметричное относительно множества M . Предположим, что функции $u_s^1(\varepsilon, t)$, $v_1(\varepsilon, t)$ – аналитические по параметру ε .

Поставим задачу об устойчивости периодического решения (1.3) системы (1.1) и рассмотрим сначала систему линейного по ε приближения (всюду далее суммирование по j и s ведется от 1 до 2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= \varepsilon \sum_j a_{sj}(t) x_j + (b_s^0 + \varepsilon b_s(t)) y, \quad s = 1, 2 \\ \dot{y} &= \sum_j (a_j^0 + \varepsilon a_j(t)) x_j + \varepsilon a_{33}(t) y \end{aligned} \quad (1.4)$$

В силу обратимости исходной системы (1.1) и симметричности решения (1.3) уравнения (1.4) также будут инвариантны [2] относительно каждого из преобразований: а) $(x_1, x_2, y, t) \rightarrow (x_1, x_2, -y, -t)$ и б) $(x_1, x_2, y, t) \rightarrow (-x_1, -x_2, y, -t)$.

Это означает, что в системе (1.4) функции $a_{sj}(t)$ – нечетные, а $b_s(t)$, $a_j(t)$ – четные по t . Тогда эти функции можно представить их рядами Фурье в виде

$$\begin{aligned} a_{sj} &= a_{sj}^{(1)} \sin t + a_{sj}^{(2)} \sin 2t + \dots \\ b_s &= b_s^* + b_s^{(1)} \cos t + b_s^{(2)} \cos 2t + \dots \\ a_j &= a_j^* + a_j^{(1)} \cos t + a_j^{(2)} \cos 2t + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Правая часть системы (1.4) зависит от параметра ϵ . При $\epsilon = 0$ система (1.4) автономна и корни характеристического уравнения таковы

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0}, \quad \lambda_3 = 0$$

При $a_1^0 b_1^0 + a_2^0 b_2^0 < 0$ имеем чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, и необходимое условие устойчивости решения (1.3) выполнены. Это условие является достаточным для устойчивости линейной системы (1.4) при малых $\epsilon \neq 0$, если только нет параметрического резонанса $2\omega = p \in \mathbb{N}$ [3].

Параметрический резонанс, как правило, приводит [3] к неустойчивости, выводимой из неравенства нулю одного коэффициента в нормальной форме линейной системы (1.4). Вычисление указанного коэффициента представляет собой определенную проблему, связанную с нормализацией периодической по t , зависящей от параметра ϵ системы. Однако этот коэффициент достаточно вычислить в первом по ϵ приближении [3], что несколько упрощает задачу. Ниже получим конкретные формулы, позволяющие вычислить указанный коэффициент в общем случае системы третьего порядка (1.1).

Система (1.1) всегда имеет один характеристический показатель, равный нулю [2]. Поэтому, согласно теории Ляпунова – Флоке, система (1.1) допускает первый интеграл вида

$$V(x_1, x_2, y, \epsilon, t) = \sum_j A_j(\epsilon, t)x_j + B(\epsilon, t)y = h \quad (h = \text{const}) \quad (1.6)$$

с периодическими по t коэффициентами. При этом, в силу обратимости исходной системы (1.1), функции $A_j(\epsilon, t)$ будут четными, а функция $B(\epsilon, t)$ – нечетной. Кроме того, очевидно, эти коэффициенты зависят от параметра ϵ . Положим

$$A_j(\epsilon, t) = \alpha_j^0 + \epsilon \alpha_j(\epsilon, t), \quad B(\epsilon, t) = \epsilon \beta(\epsilon, t) \quad (1.7)$$

и вычислим полную производную функции V в силу системы (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sum_j (\dot{\alpha}_j^0 + \epsilon \dot{\alpha}_j) x_j + \epsilon \dot{\beta} y + \sum_j (\alpha_j^0 + \epsilon \alpha_j) \left[\sum_s \epsilon a_{js} x_s + (b_j^0 + \epsilon b_j) y \right] + \\ &+ \epsilon \beta \left[\sum_s (a_s^0 + \epsilon a_s) x_s + \epsilon a_{33} y \right] \end{aligned}$$

Из условия равенства этой производной нулю найдем уравнения, которым удовлетворяют неизвестные функции α_j , β . Для этого приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ϵ . Для коэффициентов при ϵ^0 и ϵ^1 получим

$$\dot{\alpha}_j^0 = 0, \quad j = 1, 2, \quad \sum_s \alpha_s^0 b_s^0 = 0 \quad (1.8)$$

$$\dot{\alpha}_j(0, t) + \sum_s \alpha_s^0(0, t) a_{sj} + a_j^0 \beta(0, t) = 0, \quad j = 1, 2$$

$$\dot{\beta}(0, t) + \sum_s (\alpha_s^0 b_s(t) + \alpha_s(0, t) b_s^0) = 0 \quad (1.9)$$

Первое из этих уравнений служит для определения α_j^0 и дает определенную свободу в их выборе. Положим

$$\alpha_j(0, t) = \alpha_{j0} + \alpha_{j1} \cos t + \alpha_{j2} \cos 2t + \dots$$

$$\beta(0, t) = \beta_1 \sin t + \beta_2 \sin 2t + \dots$$

($\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \beta_j$ – постоянные) и подставим эти выражения в систему (1.9). В результате имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{s1} \sin t + 2\alpha_{s2} \sin 2t + \dots &= a_s^0 (\beta_1 \sin t + \beta_2 \sin 2t + \dots) + \\ &+ \sum_j \alpha_j^0 a_{js}^{(1)} \sin t + \sum_j \alpha_j^0 a_{js}^{(2)} \sin 2t + \dots, \quad s = 1, 2 \\ -(\beta_1 \cos t + 2\beta_2 \cos 2t + \dots) &= \sum_j b_j^0 \alpha_{j0} + \sum_j b_j^0 \alpha_{j1} \cos t + \sum_j b_j^0 \alpha_{j2} \cos 2t + \\ &+ \sum_j \alpha_j^0 b_j^* + \sum_j \alpha_j^0 b_j^{(1)} \cos t + \sum_j \alpha_j^0 b_j^{(2)} \cos 2t + \dots \end{aligned}$$

Теперь, приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим

$$\sum_j (b_j^0 \alpha_{j0} + \alpha_j^0 b_j^*) = 0 \quad (1.10)$$

$$k\alpha_{sk} = a_s^0 \beta_k + \sum_j \alpha_j^0 a_{js}^{(k)}, \quad s = 1, 2, \quad -k\beta_k = \sum_j (b_j^0 \alpha_{jk} + \alpha_j^0 b_j^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Определим из первых двух уравнений (1.10) α_{1k}, α_{2k} и подставим в третье уравнение. Тогда получим одно линейное уравнение для определения β_k

$$(\sum_j a_j^0 b_j^0 + k^2) \beta_k + k \sum_j \alpha_j^0 b_j^{(k)} + \alpha_1^0 \sum_j b_j^0 a_{1j}^{(k)} + a_2^0 \sum_j b_j^0 a_{2j}^{(k)} = 0 \quad (1.11)$$

причем α_j^0 удовлетворяют условию (1.8).

Если при любом натуральном k имеем

$$\Delta \equiv \sum_j a_j^0 b_j^0 + k^2 \neq 0$$

то все β_k , а значит, и α_{jk} определяются единственным образом. Это условие всегда выполняется при отсутствии параметрического резонанса.

При наличии параметрического резонанса $2\omega = p = 2l - 1, l \in \mathbb{N}$, имеем

$$\sum_j a_j^0 b_j^0 = -(2l - 1)^2 / 4$$

и $\Delta = 0$ при $(2l - 1)^2 = 4k^2$, что невозможно. Следовательно, при нечетном p преобразование также определяется единственным образом.

В указанных случаях положим

$$\alpha_1^0 = b_2^0, \quad \alpha_2^0 = -b_1^0, \quad \alpha_{10} = -b_2^0, \quad \alpha_{20} = b_1^0 - \sum_j \alpha_j^0 b_j^* / b_2^0 \quad (1.12)$$

Тогда коэффициенты α_{jk}, β_k вычисляются по формулам

$$\alpha_{jk} = (a_j^0 f_k + g_k) / k, \quad \beta_k = f_k, \quad (1.13)$$

$$f_k = -\left(\sum_j b_j^0 (b_2^0 a_{1j}^{(k)} - b_1^0 a_{2j}^{(k)}) + k(b_2^0 b_1^{(k)} - b_1^0 b_2^{(k)})\right) \left(\sum_j b_j^0 a_j^0 + k^2\right)^{-1}$$

$$g_k = b_2^0 a_{11}^{(k)} - b_1^0 a_{21}^{(k)}$$

Предположим теперь, что имеет место параметрический резонанс $2\omega = p = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда при $k = l$ имеем $\Delta = 0$. В этом случае из (1.11) получим равенство нулю линейной однородной формы от α_j^0 . Но α_j^0 также удовлетворяют (1.8). Поэтому получим $\alpha_j^0 = 0$.

Таким образом, при $\omega = l \in \mathbb{N}$ имеем в (1.7)

$$\alpha_j^0 = 0, \quad \sum_j b_j^0 \alpha_{j0} = 0, \quad \alpha_{jk} = a_j^0 \beta_k / k, \quad k \in \mathbb{N}$$

а коэффициенты β_k – произвольные. В этом случае интеграл (1.6) не позволяет исключить из системы одно из уравнений (по x_1 или x_2).

Формулами (1.13) можно пользоваться и в том частном случае параметрического резонанса $\omega = l$, когда в системе (1.4) отсутствуют первые l гармоник. В этом случае уравнения (1.11) дают: $\beta_1 = \dots = \beta_{k-1} = 0$, β_k – произвольная величина, β_{k+1} , β_{k+2} , ... определяются единственным образом. При этом также остаются справедливыми формулы (1.12).

Итак, коэффициенты α_{jk} , β_k в интеграле вычисляются по формулам (1.12), (1.13) в следующих случаях:

- а) нет параметрического резонанса;
- б) имеется параметрический резонанс $2\omega = p = 2l - 1$, $l \in \mathbb{N}$;
- в) имеется параметрический резонанс $\omega = l \in \mathbb{N}$, но система (1.4) не содержит первых l гармоник.

В указанных случаях понизим с помощью интеграла V порядок системы (1.4). Для этого выразим из (1.6)

$$x_1 = \Delta_1 (V - (\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2) x_2 - \varepsilon \beta y), \quad \Delta_1 = (\alpha_1^0 + \varepsilon \alpha_1)^{-1}$$

и подставим полученное выражение в систему (1.4). Получим

$$\dot{x}_2 = (-\varepsilon a_{21} (\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2) \Delta_1 + \varepsilon a_{22}) x_2 + (-\varepsilon^2 a_{21} \beta \Delta_1 + b_2^0 + \varepsilon b_2) y + q(t) V$$

$$\dot{y} = (-a_1^0 + \varepsilon a_1) (\alpha_2^0 + \varepsilon \alpha_2) \Delta_1 + a_2^0 + \varepsilon a_2 x_2 + (-\varepsilon \beta (a_1^0 + \varepsilon a_1) \Delta_1 + \varepsilon a_{33}) y + r(t) V$$

(коэффициенты $q(t)$, $r(t)$ 2π -периодические функции).

На интегральном многообразии $V = 0$ имеем систему второго порядка

$$\dot{x}_2 = \eta_1 x_2 + \xi_1 y, \quad \dot{y} = \xi_2 x_2 + \eta_2 y \tag{1.14}$$

$$\eta_j = \varepsilon (\eta_{j1} \sin t + \eta_{j2} \sin 2t + \dots) + \varepsilon^2 (\dots) + \dots$$

$$\xi_j = \xi_j^0 + \varepsilon (\xi_{j0} + \xi_{j1} \cos t + \xi_{j2} \cos 2t + \dots) + \varepsilon^2 (\dots) + \dots, \quad j = 1, 2$$

Выразим коэффициенты η_j , ξ_j через коэффициенты системы (1.4), задаваемые формулами (1.5). Получим

$$\eta_1 = \varepsilon \left(a_{22} - a_{21} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \right) = \varepsilon \left(\left(a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \right) \sin t + \left(a_{22}^{(2)} - a_{21}^{(2)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} \right) \sin 2t + \dots \right)$$

$$\eta_2 = \varepsilon \left(a_{33} - a_1^0 \frac{\beta}{\alpha_1^0} \right) = \varepsilon \left(\left(a_{33}^{(1)} - \beta_1 \frac{a_1^0}{\alpha_1^0} \right) \sin t + \left(a_{33}^{(2)} - \beta_2 \frac{a_1^0}{\alpha_1^0} \right) \sin 2t + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= b_2^0 + \varepsilon b_2 = b_2^0 + \varepsilon(b_2^* + b_2^{(1)} \cos t + b_2^{(2)} \cos 2t + \dots) \\
\xi_2 &= a_2^0 - a_1^0 \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} + \varepsilon \left(a_2 - a_1 \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_2 \alpha_1^0 - \alpha_1 \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} \right) = \\
&= a_2^0 - a_1^0 \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} + \varepsilon \left(a_2^* - a_1^* \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_{20} \alpha_1^0 - \alpha_{10} \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \left(a_2^{(1)} - a_1^{(1)} \frac{\alpha_2^0}{\alpha_1^0} - a_1^0 \frac{\alpha_{21} \alpha_1^0 - \alpha_{11} \alpha_2^0}{(\alpha_1^0)^2} \right) \cos t + \dots \right)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Рассмотрим систему, полученную из системы (1.14) усреднением на периоде коэффициентов

$$\dot{x}_2 = (\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10}) y, \quad \dot{y} = (\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20}) x_2 \tag{1.16}$$

Обозначим через

$$\omega_*^2 = -(\xi_1^0 + \varepsilon \xi_{10})(\xi_2^0 + \varepsilon \xi_{20})$$

частоту колебаний усредненной системы (1.16), которая при $\varepsilon = 0$ совпадает с частотой ω колебаний системы (1.2)

$$\omega_* = \omega + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2), \quad \omega_1 = -\frac{1}{2\sqrt{|\xi_1^0 \xi_2^0|}} (\xi_{10} \xi_2^0 + \xi_{20} \xi_1^0) \tag{1.17}$$

Преобразованием

$$x_2 = -\frac{x_2^*}{\sqrt{|\xi_2^0|}} \left(1 - \varepsilon \frac{\xi_{20}}{2|\xi_2^0|} \right), \quad y = \frac{y^*}{\sqrt{|\xi_1^0|}} \left(1 - \varepsilon \frac{\xi_{10}}{2|\xi_1^0|} \right)$$

система (1.16) приводится к виду

$$\dot{x}_2^* = -(\omega + \varepsilon \omega_1) y^*, \quad \dot{y}^* = (\omega + \varepsilon \omega_1) x_2^* \tag{1.18}$$

Тогда соответствующая система (1.14) примет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2^* &= -(\omega + \varepsilon \omega_1) y^* + \varepsilon (\eta_{11} \sin t + \dots) x_2^* + \varepsilon r (\xi_{11} \cos t + \dots) y^* \\
\dot{y}^* &= (\omega + \varepsilon \omega_1) x_2^* + \varepsilon r^{-1} (\xi_{21} \cos t + \dots) x_2^* + \varepsilon (\eta_{21} \sin t + \dots) y^*
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$r = |\xi_2^0 / \xi_1^0|^{1/2}$$

Теперь для системы (1.19) воспользуемся комплексно-сопряженными переменными $z = x_2^* + i y^*$, $\bar{z} = x_2^* - i y^*$.

Рассмотрим случай резонанса второго порядка

$$2\omega = p, \quad p \in \mathbb{Z}$$

В этом случае уравнение для z запишется в виде

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= i(\omega + \varepsilon \omega_1) z + \frac{1}{4} i \varepsilon (z[F_- - G_-] e^{ipt} - z[F_- + G_-] e^{-ipt} + \\
&\quad + \bar{z}[F_+ + G_+] e^{ipt} + \bar{z}[-F_+ + G_+] e^{-ipt})
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$F_{\pm} = -\eta_{1p} \pm \eta_{2p}, \quad G_{\pm} = r^{-1} \xi_{2p} \pm r \xi_{1p}$$

Согласно полученным ранее результатам [3], если в системе (1.4) разложение коэффициентов начинается с p -й гармоники, то решение (1.3) системы (1.1) будет неустойчиво по первому приближению [3] при выполнении неравенства

$$\kappa^2 > \omega_1^2, \quad \kappa = F_+ + G_+ \quad (1.21)$$

где κ – коэффициент при $\bar{z}e^{ip\tau}$ в уравнении (1.20).

Тем самым получено явное выражение для резонансного коэффициента κ при параметрическом резонансе.

2. Задача о качении тяжелого твердого тела вдоль прямой на плоскости. Качение тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой плоскости описывается [4] системой

$$\Theta \dot{\omega} + \omega \times (\Theta \omega) = -m\rho \times (\dot{\omega} \times \rho + \omega \times \dot{\rho} + \omega \times (\omega \times \rho) - g\gamma) \quad (2.1)$$

$$\dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0$$

где m – масса тела, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – вектор мгновенной угловой скорости, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – единичный вектор в точке контакта тела и плоскости, направленный вертикально вверх, g – ускорение свободного падения, $\Theta = \text{diag} \{A, B, C\}$ – центральный тензор инерции тела, $\rho = (x, y, z)$ радиус-вектор, проведенный из центра масс в точку контакта. Связь между векторами ρ и γ устанавливается с помощью уравнения поверхности тела; если это уравнение записывается в виде $F(\rho) = 0$, то

$$\gamma = -\text{grad } F(\rho) / |\text{grad } F(\rho)| \quad (2.2)$$

Запишем уравнения движения (2.1) в проекциях $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ вектора мгновенной угловой скорости ω на оси связанной системы координат и проекциях единичного вектора γ

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(C - B) &= mg(y\gamma_3 - z\gamma_2) - m(\dot{\omega}_1 y^2 - \dot{\omega}_2 xy - \dot{\omega}_3 xz + \dot{\omega}_1 z^2) - \\ &- m(\omega_1 \dot{y}y - \omega_2 \dot{x}y - \omega_3 \dot{x}z + \omega_1 \dot{z}z) - m(\omega_1 \omega_3 xy - \omega_2^2 zy + \omega_2 \omega_3 y^2 - \\ &- \omega_3 \omega_2 z^2 + \omega_3^2 yz - \omega_1 \omega_2 xz) \\ \dot{\gamma}_1 + \omega_2 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_2 &= 0 \\ (1 \ 2 \ 3, x \ y \ z, A \ B \ C) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Связь между вектором γ и вектором $\rho(x, y, z)$, проведенным в точку контакта тела и плоскости, в случае тела, ограниченного поверхностью эллипсоида, задается уравнением (2.2)

$$\gamma_1 = -\frac{x}{a^2} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2} \quad (1 \ 2 \ 3, x \ y \ z, a \ b \ c) \quad (2.4)$$

Таким образом, задача о движении тяжелого твердого тела по абсолютно шероховатой неподвижной горизонтальной плоскости описывается замкнутой системой скалярных дифференциальных уравнений шестого порядка относительно $x, y, z, \omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Система (2.3) допускает первые интегралы – интеграл энергии и геометрический интеграл

$$\begin{aligned} m[\omega_1^2(z^2 + y^2) + \omega_2^2(x^2 + z^2) + \omega_3^2(y^2 + x^2) - \\ - 2(\omega_1 \omega_2 xy + \omega_2 \omega_3 zy + \omega_3 \omega_1 xz)] + A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - \end{aligned}$$

$$-2mg(x\gamma_1 + y\gamma_2 + z\gamma_3) = 2h \quad (h = \text{const}) \quad (2.5)$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

Отметим, что наличие этих интегралов позволяет в принципе описать задачу системой дифференциальных уравнений четвертого порядка, зависящих от h . Однако такое сведение представляет собой определенную проблему, ибо первый из приведенных интегралов содержит как проекции $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, так и координаты точки контакта x, y, z : связь между этими величинами определяется достаточно громоздкими формулами (2.4).

Система уравнений (2.3) обладает интегральным многообразием [5], на котором

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \gamma_3 = 0 \quad (2.6)$$

а изменение переменных $\gamma_1, \gamma_2, \omega_3$ определяется системой

$$[C + m(x^2 + y^2)]\dot{\omega}_3 = m(g(\gamma_2\dot{x} + \gamma_1\dot{y}) - \omega_3(x\dot{x} + y\dot{y})) \quad (2.7)$$

$$\dot{\gamma}_1 - \omega_3\gamma_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega_3\gamma_1 = 0$$

В самом деле, положим в системе (2.3) переменные $\omega_1, \omega_2, \gamma_3$ равными нулю. Тогда первое, второе и четвертое уравнения системы обратятся в тождество и останется система уравнений третьего порядка (2.7), определяющая изменение переменных $\gamma_1, \gamma_2, \omega_3$.

Это многообразие отвечает частному движению, на котором точка касания тела и плоскости описывает одно из главных сечений, а именно сечение, расположенное в плоскости xGy .

Система уравнений (2.3) инвариантна относительно преобразования

$$(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (-t, -\omega_1, -\omega_2, -\omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

В самом деле, подставим в систему уравнений (2.3) вместо переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ переменные $-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, заменяя при этом t на $-t$. Тогда уравнения сохраняют свой вид. Более того, система (2.3), (2.4) инвариантна относительно каждого из преобразований вида $(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \rightarrow (-t, -\omega_1, \omega_2, \omega_3, -\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ с учетом циклической замены переменных.

Это означает, что система (2.3) является линейно обратимой системой [6] с четырьмя неподвижными множествами. Свойство обратимости позволит использовать для исследования системы (2.6) разработанные в последние годы методы исследования обратимых систем (см., например, [7]).

Выполним поворот системы координат $xуz$ в плоскости xGy вокруг оси z на угол φ , а отклонение оси z от вертикали будем характеризовать углом θ . Это достигается преобразованием, связывающим "старые" и "новые" переменные по формулам [5]

$$\gamma_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (2.8)$$

$$\omega_1 = p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \omega_2 = p \sin \varphi + q \cos \varphi, \quad \omega_3 = r$$

Очевидно, φ – угол между осью Gx и осью $G\xi$ – линией пересечения плоскости xGy и плоскости, проходящей через ось Gz и вертикаль; θ – угол между осью Gz и вертикалью.

Замена (2.8) позволяет автоматически учесть геометрический интеграл. В результате задача описывается пятью независимыми переменными p, q, r, φ, θ . Далее исключим r с помощью интеграла энергии и получим систему дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= S^{-1} \{ [X_1 + Y_1] \cos \varphi + [X_2 + Y_2] \sin \varphi \} + q\dot{\varphi} \\
\frac{dq}{dt} &= S^{-1} \{ [-X_1 + Y_1] \sin \varphi + [X_2 + Y_2] \cos \varphi \} - p\dot{\varphi} \\
\frac{d\theta}{dt} &= -q \\
\frac{d\varphi}{dt} &= -r + p \operatorname{ctg} \theta
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned}
S &= AB + Am(x^2 + z^2) + Bm(y^2 + z^2) + m^2 z^2 (x^2 + y^2 + z^2) \\
X_1 &= (B + m(x^2 + z^2))(m\dot{\omega}_3 xz + X), \quad Y_1 = mxy(m\dot{\omega}_3 yz + Y) \\
X_2 &= mxy(m\dot{\omega}_3 xz + X), \quad Y_2 = (A + m(y^2 + z^2))(m\dot{\omega}_3 yz + Y) \\
X &= (B - C)\omega_2\omega_3 + m\{g(\gamma_3 y - \gamma_2 z) - \omega_1(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + \\
&\quad + \dot{x}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_3 y(\omega_1 x + \omega_2 y) + \\
&\quad + \omega_2 z(\omega_3 z + \omega_1 x) + yz(\omega_2^2 - \omega_3^2)\} \\
Y &= (C - A)\omega_3\omega_1 + m\{g(\gamma_1 z - \gamma_3 x) - \omega_2(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + \\
&\quad + \dot{y}(\omega_1 x + \omega_2 y + \omega_3 z) - \omega_1 z(\omega_2 y + \omega_3 z) + \\
&\quad + \omega_3 x(\omega_1 x + \omega_2 y) + zx(\omega_3^2 - \omega_1^2)\}
\end{aligned}$$

(выражения $\omega_1, \omega_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ через p, q, θ, φ задаются формулами (2.8), ω_3 исключается интегралом энергии).

3. Качение тела вдоль прямой. В системе уравнений (2.9) многообразие (2.6) определяется условием

$$\theta = \pi/2, \quad p = q = 0, \quad r = \omega_3 = -\dot{\varphi} \tag{3.1}$$

причем зависимость φ от t задается первым из уравнений (2.7)

$$(C + m(x^{*2} + y^{*2}))\ddot{\varphi} + m(g(\gamma_2^* x^* - \gamma_1^* y^*) - r(x^* \dot{x}^* + y^* \dot{y}^*)) = 0 \tag{3.2}$$

Здесь и ниже звездочка означает, что значение функции подсчитано на исследуемом движении (3.1).

При заданной поверхности тела координаты точки касания тела и плоскости будут функциями угла φ .

Ниже рассмотрим полый эллипсоид, т.е. тело, ограниченное поверхностью эллипсоида с полуосями a, b и c и полостью в форме соосного гомотетичного эллипсоида и полуосями $a(1-d), b(1-d), c(1-d)$; d – безразмерный параметр. Моменты инерции описанного эллипсоида

$$\begin{aligned}
A &= \lambda m(b^2 + c^2)/5, \quad \lambda = (1 - (1-d)^5)(1 - (1-d)^3)^{-1} \\
&(ABC, abc)
\end{aligned}$$

Найдем координаты точки касания x^* , y^* и скорости $\dot{x}^*$, $\dot{y}^*$

$$x^* = -\cos \varphi \Phi^{-1}(\varphi), \quad y^* = -\alpha \sin \varphi \Phi^{-1}(\varphi)$$

$$\dot{x}^* = \alpha \sin \varphi \dot{\varphi} \Phi^{-3}(\varphi), \quad \dot{y}^* = -\alpha \cos \varphi \dot{\varphi} \Phi^{-3}(\varphi)$$

$$\Phi(\varphi) = (\cos^2 \varphi + \alpha \sin^2 \varphi)^{1/2}, \quad \alpha = b^2 / a^2$$

После подстановки полученных выражений уравнение в (3.2) получим консервативную систему с одной степенью свободы. Полное исследование этой системы проводится [8] методом фазовой плоскости.

В зависимости от величины постоянной энергии h различают несколько видов движений. Для их классификации удобно пользоваться интегралом в безразмерном виде.

Введем следующие характерные величины: l – бóльшая ось эллипсоида; $\tau = \sqrt{g/l}$ – безразмерное время. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi}{d\tau} \right]^2 \left(C^* + (\cos^2 \varphi + \alpha^2 \sin^2 \varphi) \Phi^{-2}(\varphi) \right) + \Phi(\varphi) = h^*; \quad h^* = \frac{h}{mgl}, \quad C^* = \frac{C}{ml^2} \quad (3.3)$$

В зависимости от величины безразмерной постоянной h^* (или h) различают [8] следующие случаи:

- 1) $h^* < \sqrt{\alpha}$ (или $h < mgb$) – движение невозможно.
- 2) $\sqrt{\alpha} < h^* < 1$ (или $mgb < h < mga$) – эллипсоид совершает "качания", на которых след точки касания на опорной плоскости представляет собой отрезок. На этих движениях значение угла φ принадлежит промежутку $(0, T)$. Угловая скорость $d\varphi/dt$ представляет собой периодическую функцию времени, дважды обращающуюся в нуль на периоде качания.
- 3) $h^* > 1$ – эллипсоид катится вдоль прямой в одном направлении с периодической по времени угловой скоростью $d\varphi/dt$.

Ниже исследуем задачу об устойчивости качений эллипсоида в одном направлении (случай 3). Так как в этом случае угловая скорость качения эллипсоида сохраняет свой знак, то для описания таких качений и близких к ним можно перейти к новой независимой переменной – углу φ . Для этого разделим уравнения системы (2.9) на $d\varphi/dt$ и получим 2π -периодическую систему третьего порядка

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\varphi} &= \frac{[X_1 + Y_1] \cos \varphi + [X_2 + Y_2] \sin \varphi}{S\dot{\varphi}} + q \\ \frac{dq}{d\varphi} &= \frac{[-X_1 + Y_1] \sin \varphi + [X_2 + Y_2] \cos \varphi}{S\dot{\varphi}} - p \\ \frac{d\theta}{d\varphi} &= -\frac{1}{S\dot{\varphi}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Угловая скорость $\dot{\varphi}$ на многообразии (3.1) находится из интеграла энергии (3.3)

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2(h^* + mg(x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi))}{(m(x^{*2} + y^{*2}) + C)}} \quad (3.5)$$

а в общем случае – из интеграла энергии (2.5).

Не ограничивая общности, рассмотрим случай, для которого $\dot{\varphi} > 0$, и задача об устойчивости качения корректно сводится к исследованию устойчивости частного решения

$$p = q = 0, \quad \theta = \pi/2 \quad (3.6)$$

системы (3.4).

4. Уравнения возмущенного движения. Запишем систему уравнений в вариациях для системы уравнений (3.4) в окрестности исследуемого решения (3.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \delta p &= \left[\frac{\cos \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_1 + \frac{\sin \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_2 \right] \delta p + \left[\frac{\cos \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_3 + \frac{\sin \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_4 + 1 \right] \delta q + \\ &+ \frac{m}{S^* \dot{\varphi}} [\cos \varphi c_1 + \sin \varphi c_2] \delta \theta \\ \frac{d}{d\varphi} \delta q &= \left[-\frac{\sin \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_1 + \frac{\cos \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_2 - 1 \right] \delta p + \left[-\frac{\sin \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_3 + \frac{\cos \varphi}{S^* \dot{\varphi}} d_4 \right] \delta q + \\ &+ \frac{m}{S^* \dot{\varphi}} [-c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi] \delta \theta \\ \frac{d}{d\varphi} \delta \theta &= -\frac{1}{\dot{\varphi}} \delta q \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} S^* &= AB + m(Ax^{*2} + By^{*2}) \\ d_1 &= B_1 a_1 + mx^* y^* a_2, \quad d_2 = mx^* y^* a_1 + A_1 a_2 \\ d_3 &= B_1 a_3 + mx^* y^* a_4, \quad d_4 = mx^* y^* a_3 + A_1 a_4 \\ B_1 &= B + mx^{*2}, \quad A_1 = A + my^{*2} \\ a_1 &= \omega_3 ((B - C) \sin \varphi - my^* X_+) + my^* X_- \\ a_2 &= \omega_3 ((C - A) \cos \varphi + mx^* X_+) - mx^* X_- \\ a_3 &= \omega_3 ((B - C) \cos \varphi + my^* X_-) \\ a_4 &= \omega_3 (-(C - A) \sin \varphi - mx^* X_-) \\ X_+ &= x^* \cos \varphi + y^* \sin \varphi, \quad X_- = \dot{x}^* \sin \varphi - \dot{y}^* \cos \varphi \\ c_1 &= \frac{\dot{\omega}_3 c^2 x^*}{\Delta_2} (B + m(x^{*2} + y^{*2})) + B_1 b_1 + mx^* y^* b_2 \\ c_2 &= \frac{\dot{\omega}_3 c^2 y^*}{\Delta_2} (A + m(x^{*2} + y^{*2})) + mx^* y^* b_1 + A_1 b_2 \\ b_1 &= \frac{c^2}{\Delta_2} (\dot{x}^* \omega_3 - \omega_3^2 y^* - g \sin \varphi) - gy^* \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$b_2 = \frac{c^2}{\Delta_2} (\dot{y}^* \omega_3 + \omega_3^2 x^* + g \cos \varphi) + g x^*$$

$$\Delta_2 = (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

Отметим, что в полученной системе зависимость $\omega_3 = r = -\dot{\varphi}$ задается выражением (3.5), а $\dot{\omega}_3 = -\ddot{\varphi}$. Кроме того, $\dot{x}^* \cos \varphi + \dot{y}^* \sin \varphi = 0$.

В результате получена линейная обратимая система с периодическими коэффициентами, инвариантная относительно преобразования $(\varphi, \delta p, \delta q, \delta \theta) \rightarrow (-\varphi, \delta p, -\delta q, \delta \theta)$.

Проведем систему (4.1) к безразмерному виду. Для этого, воспользовавшись введенными ранее величиной l и безразмерным временем τ , введем следующие безразмерные переменные:

$$p_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} p, \quad q_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} q, \quad r_1 = \omega_3^* = \sqrt{\frac{l}{g}} \omega_3; \quad \omega_3^{*'} = \frac{d\omega_3^*}{d\tau} = \frac{l}{g} \frac{d\omega_3}{dt}$$

В результате в новых переменных получим безразмерную систему уравнений в вариациях.

5. Качение эллипсоида, близкого к эллипсоиду вращения. Исследуем качение эллипсоида, близкого к эллипсоиду вращения. В этом случае примем $b = a\sqrt{1+\varepsilon}$ (ε – малый параметр).

При $\varepsilon = 0$ имеем эллипсоид вращения, катящийся с постоянной угловой скоростью $d\varphi/d\tau$, определяемой соотношением (3.5)

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \sqrt{\frac{10(h^* - 1)}{2\lambda + 5}} = \text{const}$$

Система уравнений в вариациях (4.1) в случае эллипсоида вращения имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \delta p &= \frac{2}{\beta + 1} \delta q \\ \frac{d}{d\varphi} \delta q &= -\frac{\xi}{\eta} \delta p + \frac{5(\beta - 1)\sqrt{\xi}}{\eta g} \delta \theta \\ \frac{d}{d\varphi} \delta \theta &= -\frac{\sqrt{\xi}}{g} \delta q \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\xi = 2\lambda + 5, \quad \eta = \lambda(\beta + 1) + 5, \quad g = \sqrt{10(h^* - 1)}, \quad \beta = c^2 / a^2$$

Вычислим корни характеристического уравнения этой системы

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\xi}{\eta} \left(\frac{\beta - 1}{2(h^* - 1)} + \frac{2}{\beta + 1} \right)}, \quad \lambda_3 = 0$$

Отсюда видно, что если выполняется условие

$$\beta^2 > 5 - 4h^* \tag{5.2}$$

то корни $\lambda = \pm i\omega$ характеристического уравнения будут чисто мнимыми.

Отметим, что условие (5.2) является необходимым и достаточным условием устойчивости по Ляпунову [9] качения эллипсоида вращения.

Рассмотрим теперь качение эллипсоида, близкого к эллипсоиду вращения ($\varepsilon \neq 0$). В этом случае коэффициенты системы (4.1), определяемые формулами (4.2), будут зависеть от ε .

Обозначим вариации δp , δq , $\delta \theta$ через x_1 , y , x_2 . Тогда система (4.1) примет вид (1.4) с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11}(\varphi) &= \frac{\beta \xi}{2(\beta + 1)\eta} \sin 2\varphi \\ a_{12}(\varphi) &= \frac{30\lambda(1 - \beta) - 25(\beta + 1) + 8\lambda^2 + 20h^* \eta}{\sqrt{h^* - 1}(2\lambda + 5)^{3/2}(\lambda + 5 + \beta(\eta - 5/2))} \sin 2\varphi \\ a_{21}(\varphi) &= 0, \quad a_{22}(\varphi) = 0, \quad a_{33}(\varphi) = -\frac{\beta(\lambda + 5)}{(\beta + 1)\eta} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$b_1^0 = \frac{2}{\beta + 1}, \quad b_2^0 = -\frac{\sqrt{\xi}}{g}$$

$$b_1(\varphi) = \frac{\beta}{(\beta + 1)^2} + \frac{\beta}{(\beta + 1)^2} \cos 2\varphi$$

$$b_2(\varphi) = \frac{(\lambda + 5/2)(1 - 2h^*)}{4(h^* - 1)g\sqrt{\xi}} + \frac{(\lambda - 5/2 + 5h^*)}{g\sqrt{\xi}} \cos 2\varphi$$

$$a_1^0 = -\frac{\xi}{\eta}, \quad a_2^0 = \frac{5(\beta - 1)\sqrt{\xi}}{\eta g}$$

$$a_1(\varphi) = -\frac{\lambda\beta(\lambda + 5/2)}{\eta^2} + \frac{(\lambda^2\beta + 15/2\lambda\beta + 5\lambda + 25)}{\eta^2} \cos 2\varphi$$

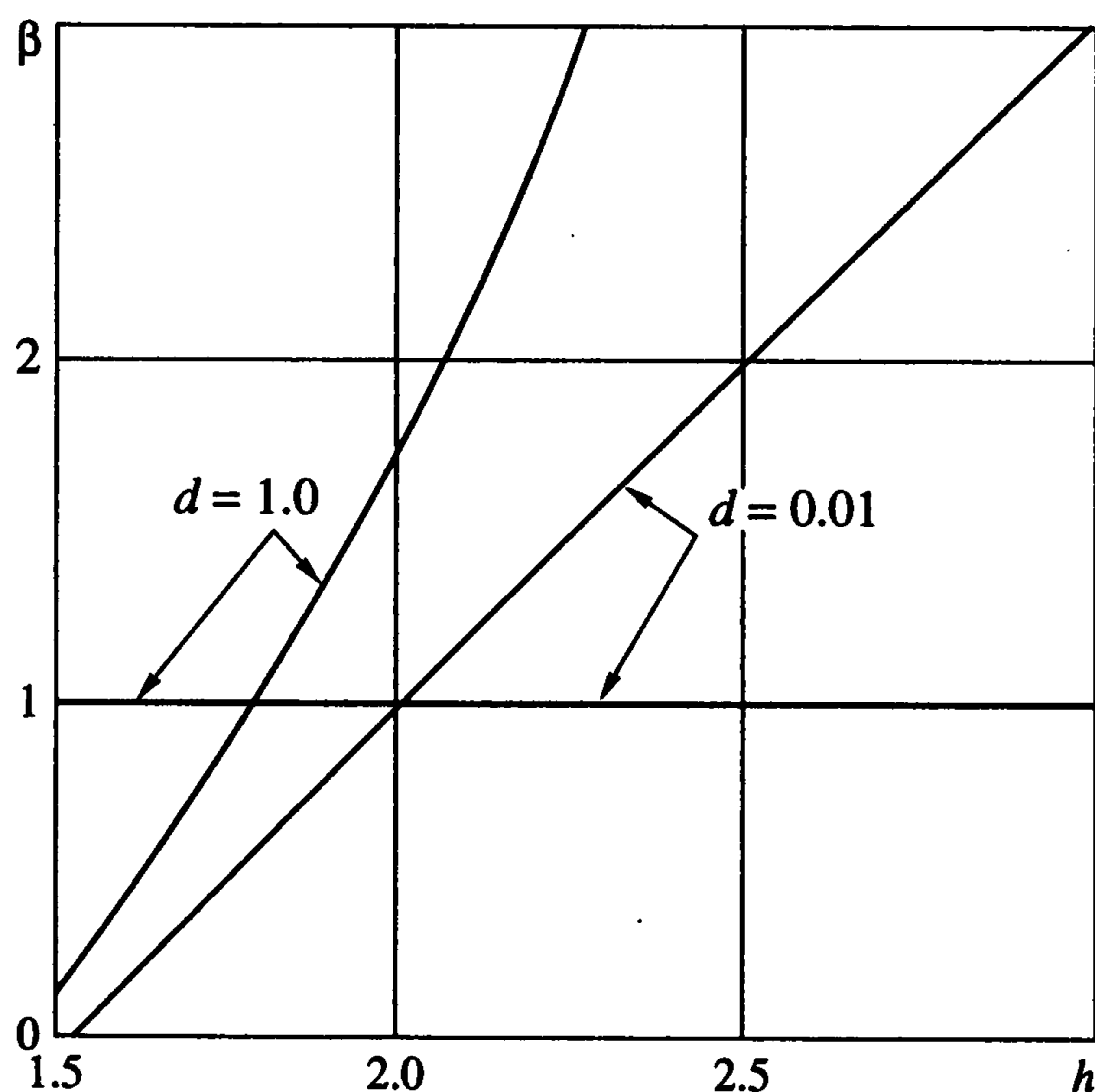
$$\begin{aligned} a_2(\varphi) &= -\frac{5\sqrt{\xi}}{4\eta^2 g} \left(\lambda\beta^2 + (4\lambda + 15)\beta - \lambda - 5 + \frac{(5(1 - 2h^*)(\beta - 1))\sqrt{\xi}}{g^2} \right) + \\ &+ \left(\frac{5\beta g}{\eta\sqrt{\xi}} + \frac{5/4(\lambda\beta^2 + (4\lambda + 15)\beta - \lambda - 5)\sqrt{\xi}}{\eta^2 g} + \frac{25/4(1 - \beta)(2\lambda - 5 + 10h^*)}{\eta^2 \xi^{1/2} g^3} \right) \cos 2\varphi \end{aligned}$$

Согласно известным результатам [3], характеристические показатели системы совпадают с характеристическими показателями $\pm i\omega_*$ усредненной системы с точностью до членов порядка ε^2 и при выполнении условия (5.2) и отсутствии резонансов второго порядка ($2\omega = p$, $p \in \mathbb{Z}$) будут чисто мнимыми.

Из формул (5.3) следует, что система (1.4) содержит только четную гармонику. Следовательно, возможен только резонанс $\omega = 1$ ($p = 2$).

В явном виде резонансное соотношение имеет вид

$$\frac{\sqrt{\xi}}{\eta} \left(\frac{\beta - 1}{2(h^* - 1)} + \frac{2}{\beta + 1} \right) = 1 \quad (5.4)$$



Фиг. 1

Очевидно, это соотношение выполняется при любом h^* и $\beta = 1$ (случай шара). Следовательно, для эллипсоида, близкого к шару, качение происходит всегда при параметрическом резонансе. На фиг. 1 шару отвечает горизонтальная прямая.

В случае $\beta \neq 1$ соотношение (5.4) задает еще одну кривую $\beta = \beta(h^*)$, отвечающую резонансу. Отсюда следует, что каждому эллипсоиду, близкому к эллипсоиду вращения, отвечает своя "индивидуальная" резонансная угловая скорость (величина h^*).

На фиг. 1 кривые $\beta = \beta(h^*)$ приведены для $d = 0.01$ (эллипсоид с тонкой стенкой) и $d = 1.0$ (однородный эллипсоид). Массы эллипсоидов совпадают.

Дальнейшие исследования проводились численно. На резонансных кривых (5.4) проверялось условие неустойчивости $\kappa^2 > \omega_1^2$.

Теорема 1. Параметрический резонанс приводит к неустойчивости качения эллипсоида, близкого к эллипсоиду вращения.

Отсюда, в частности, следует, что качение близкого к шару динамически симметричного эллипсоида в случае, когда ось симметрии не совпадает с горизонтальной осью, неустойчиво.

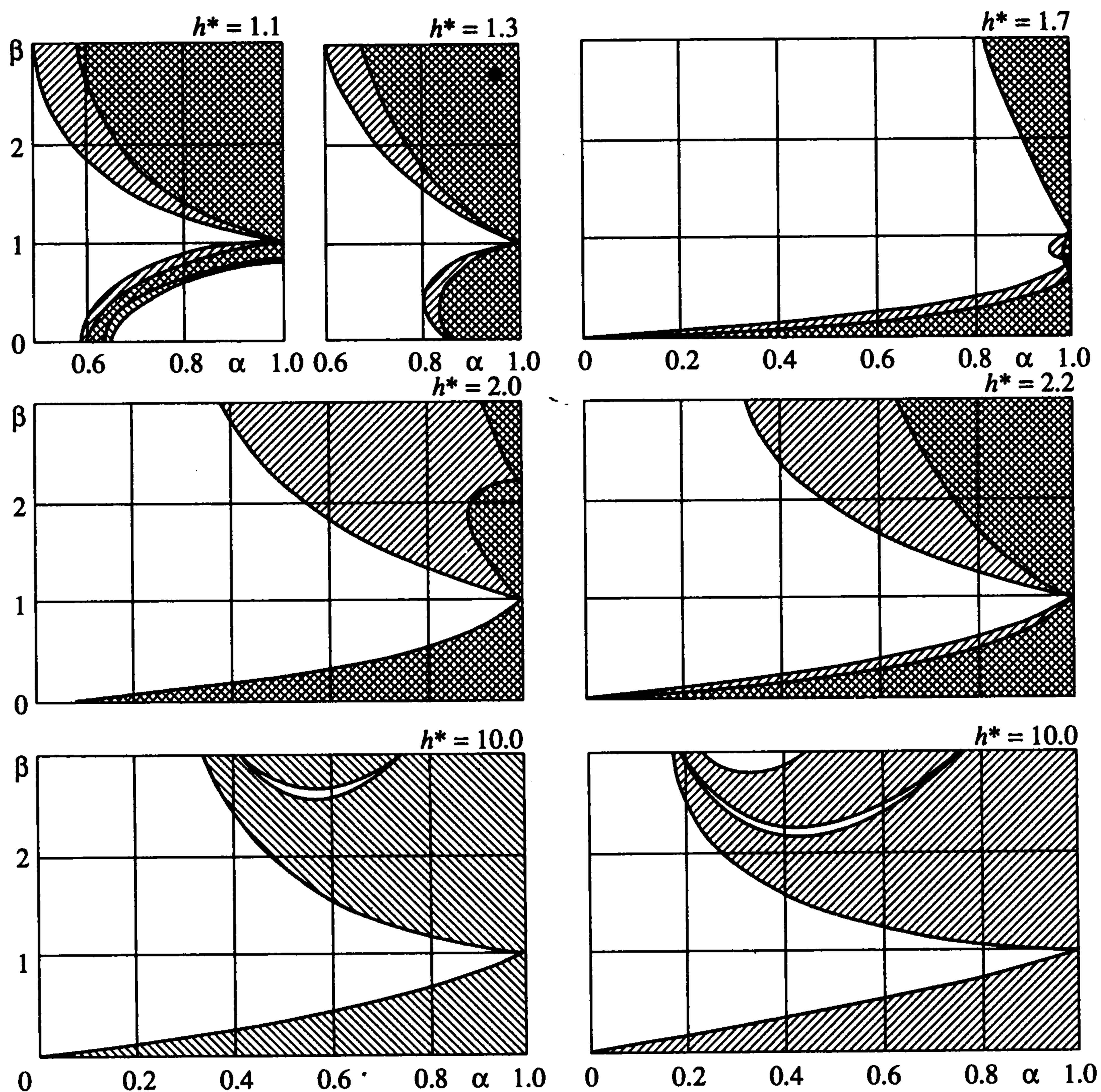
6. Результаты и выводы об устойчивости. Вычислим теперь характеристические показатели в случае произвольного эллипсоида.

Безразмерная система уравнений в вариациях с 2π -периодическими по φ коэффициентами инвариантна относительно каждой из замен: а) $(\varphi, \delta p_1, \delta q_1, \delta \theta) \rightarrow (-\varphi, -\delta p_1, \delta q_1, -\delta \theta)$ и б) $(\varphi, \delta p_1, \delta q_1, \delta \theta) \rightarrow (-\varphi, \delta p_1, -\delta q_1, \delta \theta)$, т.е. является линейной обратимой системой. Для этой системы характеристические показатели находятся известным методом [2].

Построим одно решение задачи Коши системы уравнений в вариациях на отрезке $[0, 2\pi]$ с начальными данными

$$\delta p_1(0) = 0, \quad \delta \theta(0) = 0, \quad \delta q_1(0) = 1$$

Тогда если $|\delta q_1(2\pi)| < 1$, то характеристические показатели системы уравнений в вариациях будут чисто мнимыми [2].



Фиг. 2

Результаты численных исследований приведены на фиг. 2 и сравниваются для полого и однородного эллипсоидов. Вращение происходит вокруг оси c .

По оси абсцисс отложено значение параметра $\alpha = b^2/a^2$, по оси ординат – параметра $\beta = c^2/a^2$. Предполагается, что $a > b$ ($0 < \alpha \leq 1$). Области, где выполняются необходимые условия устойчивости, показаны штриховкой с наклоном влево для однородного эллипсоида (параметр $d = 1.0$) и с наклоном вправо для полого (параметр $d = 0.01$). На каждой части фигуры сравниваются результаты при одном и том же фиксированном значении угловой скорости (параметра h^*).

Эволюция областей устойчивости в зависимости от изменения угловой скорости качения хорошо прослеживается на всей серии приведенных рисунков.

В результате анализа полученных результатов можно сделать следующий вывод.

Теорема 2. Качение произвольного эллипсоида вокруг средней оси ($\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\beta > \alpha$) всегда неустойчиво; качение эллипсоида вокруг наименьшей оси ($\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\beta < \alpha$) становится устойчивым с увеличением угловой скорости; область, где выполняются необходимые условия устойчивости качения эллипсоида вокруг наибольшей оси, тем больше, чем больше угловая скорость. При этом качение полого эллипсоида

вокруг наибольшей оси более устойчиво, чем качение однородного эллипсоида вокруг наибольшей оси.

Качение эллипсоида вращения ($\alpha = 1$) вокруг наибольшей оси ($\beta > 1$) устойчиво; качение вокруг наименьшей оси ($\beta < 1$) устойчиво при достаточно большом значении угловой скорости. Эти результаты полностью согласуются с выводами, полученными ранее [9].

Из приведенных результатов также хорошо видно, что к точкам параметрического резонанса ($\alpha = 1$, $\beta = 1$ или $\alpha = 1$, $\beta = \beta(h^*)$) примыкают области неустойчивости по первому приближению. Тем самым выводы об устойчивости при параметрическом резонансе согласуются с полученными в предыдущем разделе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00122, 00-15-96150, 02-01-06-509) и программы "Университеты России".

Второй соавтор этой работы благодарит врачей, своих учителей, коллег, учеников, редакцию ПММ, всех, кто в течение последнего года помогал ему вновь обрести возможность жить и работать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тхай В.Н. Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
2. Тхай В.Н. Об устойчивости регулярных прецессий Гриоли // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 848–857.
3. Тхай В.Н. Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3–12.
4. Карапетян А.В. Бифуркация Хопфа в задаче о движении тяжелого твердого тела по шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 2. С. 19–24.
5. Тхай В.Н. Об устойчивости качений тяжелого эллипсоида вращения по шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 1. С. 11–16.
6. Тхай В.Н. Обратимые механические системы // Вторые Поляховские чтения. Избр. тр. СПб.: Изд-во НИИ химии СПб. ун-та, 2000. С. 115–127.
7. Тхай В.Н. Периодические движения системы, близкой к автономной обратимой системе // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 661–680.
8. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.
9. Миндлин И.М., Пожарицкий Г.К. Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости // ПММ. 1965. Т. 29. № 4. С. 742–745.

Москва

Поступила в редакцию
25.III.2002