

УДК 531.36

© 2002 г. А.В. Карапетян

## О СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ЭЛЛИПСОИДА, ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ, НА ПЛОСКОСТИ С ТРЕНИЕМ

Изучается движение тяжелого однородного тонкостенного эллипсоида вращения, целиком заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. Предполагается, что эллипсоид опирается на горизонтальную плоскость, со стороны которой на него действуют нормальная реакция и сила вязкого трения скольжения. Составлены уравнения движения системы, пригодные как в общем случае, так и в предельных случаях нулевой массы эллипсоида или нулевой массы жидкости. Найдены стационарные и периодические движения эллипсоида с жидкостью. Получены условия устойчивости равномерных вращений эллипсоида вокруг вертикально расположенной оси симметрии.

Хорошо известно, что абсолютно твердый (без жидкости) осесимметричный эллипсоид на горизонтальной плоскости с трением скольжения (частный случай китайского волчка) может вращаться с произвольной постоянной угловой скоростью вокруг вертикально расположенной оси симметрии, причем быстрые вращения эллипсоида, сплюснутого вдоль оси симметрии, неустойчивы, а вытянутого – устойчивы (см. [1–3]). Устойчивость равномерных вращений осесимметричного эллипсоида, заполненного жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, на горизонтальной плоскости раньше была исследована в случаях абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостей [4], а также в случае плоскости с трением скольжения, если масса оболочки пренебрежимо мала [5]. Ниже изучается общий случай, когда массой оболочки нельзя пренебречь.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим движение тяжелого однородного тонкостенного осесимметричного эллипсоида, целиком заполненного идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей однородное вихревое движение, по горизонтальной плоскости с учетом вязкого трения скольжения. Очевидно, центр масс системы и главные центральные оси инерции совпадают с центром  $S$  эллипсоида и его главными осями  $Sx_1x_2x_3$  соответственно.

Пусть  $m$  – масса системы,  $(m(1 - \epsilon))$  – масса эллипсоида,  $m\epsilon$  – масса жидкости;  $\epsilon \in [0, 1]$ ,  $d_1, d_2 = d_1$  и  $d_3$  – полуоси эллипсоида,  $\delta = d_1/d_3$ ,  $gd_3$  – ускорение свободного падения,  $d_3v_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\Omega_i$ ,  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – проекции скорости центра масс эллипсоида, угловой скорости, половины вектора вихря и орта восходящей вертикали соответственно на оси  $Sx_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $nd_3$  – величина нормальной реакции, отнесенная к массе системы,  $\kappa > 0$  – коэффициент вязкого трения скольжения,  $r = \sqrt{\delta^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + \gamma_3^2}$  ( $d_3r$  – расстояние от центра эллипсоида до опорной плоскости).

Уравнения движения системы, отнесенные к системе координат  $Sx_1x_2x_3$ , имеют вид (ср. с уравнениями движения системы, рассмотренной ранее [5])

$$\dot{v}_1 + \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 = (n - g)\gamma_1 - \kappa[v_1 + (\delta^2 \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3)r^{-1}]$$



$$\dot{\nu}_2 + \omega_3 \nu_1 - \omega_1 \nu_3 = (n - g)\gamma_2 - \kappa[\nu_2 + (\omega_1 \gamma_3 - \delta^2 \omega_3 \gamma_1)r^{-1}] \quad (1.1)$$

$$\dot{\nu}_3 + \omega_1 \nu_2 - \omega_2 \nu_1 = (n - g)\gamma_3 - \kappa[\nu_3 + \delta^2(\omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2)r^{-1}]$$

$$(1 - \varepsilon) \left[ \frac{\delta^2 + 1}{3} \dot{\omega}_j + (-1)^{j+1} \frac{\delta^2 - 1}{3} \omega_{3-j} \omega_3 \right] +$$

$$+ \varepsilon \left[ \frac{(\delta^2 - 1)^2}{5(\delta^2 + 1)} (\dot{\omega}_j - (-1)^{j+1} \omega_{3-j} \omega_3) + \frac{4\delta^2}{5(\delta^2 + 1)} (\dot{\Omega}_j - (-1)^{j+1} \Omega_{3-j} \omega_3) + (-1)^{j+1} \frac{2\delta^2}{5} \omega_{3-j} \Omega_3 \right] =$$

$$= -(-1)^{j+1} (\delta^2 - 1) n \gamma_{3-j} \gamma_3 r^{-1} + \kappa [(-1)^{j+1} (\delta^2 \nu_3 \gamma_{3-j} - \nu_{3-j} \gamma_3) r +$$

$$+ (-1)^{j+1} \delta^4 (\omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2) \gamma_{3-j} - (\omega_j \gamma_3 - \delta^2 \omega_3 \gamma_j) \gamma_3] r^{-2}, \quad j = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$\frac{2}{3} (1 - \varepsilon) \dot{\omega}_3 + \varepsilon \left[ \frac{2}{5} \dot{\Omega}_3 + \frac{4}{5(\delta^2 + 1)} (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) \right] =$$

$$= \kappa [(\nu_2 \gamma_1 - \nu_1 \gamma_2) r + (\omega_1 \gamma_1 + \omega_2 \gamma_2) \gamma_3 - \delta^2 \omega_3 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)] r^{-2}$$

$$\varepsilon \left[ \dot{\Omega}_j + (-1)^{j+1} \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1} (\omega_{3-j} - \Omega_{3-j}) \Omega_3 - (-1)^{j+1} (\omega_3 - \Omega_3) \Omega_{3-j} \right] = 0, \quad j = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$\varepsilon \left[ \dot{\Omega}_3 + \frac{2}{\delta^2 + 1} (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) \right] = 0$$

$$\dot{\gamma}_1 + \omega_2 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_2 = 0, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega_3 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_3 = 0, \quad \dot{\gamma}_3 + \omega_1 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_1 = 0 \quad (1.4)$$

$$\nu_1 \gamma_1 + \nu_2 \gamma_2 + \nu_3 \gamma_3 + (\delta^2 - 1) (\omega_2 \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2) \gamma_3 r^{-1} = 0 \quad (1.5)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) выражают теоремы об изменении соответственно импульса и кинетического момента системы, уравнение (1.3) – теорему Гельмгольца, уравнение (1.4) – условие постоянства орта восходящей вертикали в неподвижной системе отсчета, а уравнение (1.5) – условие безотрывного движения эллипсоида по плоскости. Система (1.1) – (1.5) замкнута относительно переменных  $\nu_i, \omega_i, \Omega_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $n$ .

При  $\varepsilon = 1$  (масса эллипсоида равна нулю) уравнения (1.1) – (1.5) переходят в уравнения движения безмассового эллипсоида, заполненного жидкостью, а при  $\varepsilon = 0$  (масса жидкости равна нулю) – в уравнения движения полого эллипсоида (при этом, очевидно, уравнения (1.3) следует отбросить). Случай  $\varepsilon = 0$  представляет собой частный случай китайского волчка, а случай  $\varepsilon = 1$  был исследован в [5]. В общем случае система (1.1) – (1.5) допускает два первых интеграла (Гельмгольца и геометрический)

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \delta^2 \Omega_3^2 = \text{const}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (1.6)$$

с помощью которых можно исключить переменные  $\Omega_3$  и  $\gamma_3$ . Переменные  $\nu_3$  и  $n$  также можно исключить с помощью третьего уравнения системы (1.1) и уравнения связи (1.5).

**2. Стационарные и периодические движения.** Очевидно, уравнения (1.1) – (1.5) допускают стационарные движения вида

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \omega_1 = \omega_2 = \Omega_1 = \Omega_2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_3 = \omega, \quad \Omega_3 = \Omega$$

( $\omega$  и  $\Omega$  – произвольные постоянные; при этом  $n = g$ ) и вида

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \gamma_3 = \omega_3 = \Omega_3 = 0, \quad \gamma_1 = \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \cos \varphi \quad (2.2)$$

$$\omega_j = w \gamma_j, \quad \Omega_j = W \gamma_j, \quad j = 1, 2$$

( $w, W$  и  $\varphi$  – произвольные постоянные; при этом по-прежнему  $n = g$ ). Эти решения отвечают равномерным вращениям эллипсоида вокруг вертикально расположенной



оси симметрии (решение (2.1)) или вертикально расположенного диаметра экваториального сечения (решение (2.2)).

Легко проверить, что уравнения (1.1) – (1.5) допускают периодические движения вида

$$\begin{aligned} \nu_1 &= -\delta\omega\gamma_2, & \nu_2 &= \delta\omega\gamma_1, & \nu_3 &= 0 \\ \gamma_1 &= \sin(\omega t + \varphi), & \gamma_2 &= \cos(\omega t + \varphi), & \gamma_3 &= 0 \\ \omega_j &= 0, & \omega_3 &= \omega, & \Omega_j &= \Omega\gamma_j, & \Omega_3 &= 0; & j &= 1, 2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

( $\omega$ ,  $\Omega$  и  $\varphi$  – произвольные постоянные;  $n = g$ ). Эти решения отвечают равномерным качениям эллипсоида вдоль прямой; при этом ось симметрии эллипсоида горизонтальна (как для решений (2.2)).

Способом, предложенным в [5], можно показать, что уравнения (1.1) – (1.5) допускают также периодические движения вида

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{1-\gamma^2} \sin[\tilde{\omega}t + \varphi], & \gamma_2 &= \sqrt{1-\gamma^2} \cos[\tilde{\omega}t + \varphi], & \gamma_3 &= \gamma \\ \tilde{\omega} &= (1-\delta^2)\omega\gamma; & \nu_1 &= \nu_2 = \nu_3 = 0 & (n = g) \\ \omega_j &= \delta^2\omega\gamma_j, & \omega_3 &= \omega\gamma, & \Omega_j &= \mu\delta^2\Omega\gamma_j, & \Omega_3 &= \Omega\gamma; & j &= 1, 2 \\ (\mu &= 2\delta^2\omega[(\delta^2-1)\Omega + \delta^2(\delta^2+1)\omega]^{-1}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\omega$ ,  $\Omega$  и  $\gamma$  ( $|\gamma| \leq 1$ ) – постоянные, связанные соотношением

$$\frac{15g}{\omega^2\delta^4\sqrt{\delta^2(1-\gamma^2)+\gamma^2}} = \frac{6\epsilon k^2 + (1-\delta^2)(5-8\epsilon)k - \delta^2[5(\delta^2+1) - 2\epsilon(\delta^2+4)]}{(1-\delta^2)k - \delta^2(\delta^2+1)}, \quad k = \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.5)$$

где  $\varphi$  – произвольная постоянная. Эти решения отвечают регулярным прецессиям эллипсоида и переходят в равномерные вращения (2.1) или (2.2) при соответственно  $\gamma^2 = 1$  или  $\gamma = 0$  (во втором случае  $\omega = \delta^2\omega$ ,  $W = 2k\delta^4\omega[k(\delta^2-1) + \delta^2(\delta^2+1)]^{-1}$ ). При  $\epsilon = 1$  соотношение (2.5) совпадает с соответствующим соотношением, полученным ранее [5], а при  $\epsilon = 0$  принимает вид

$$3g = \omega^2\delta^4\sqrt{\delta^2(1-\gamma^2)+\gamma^2}$$

и определяет связь между постоянными  $\omega$  и  $\gamma$  на регулярных прецессиях полого эллипсоида на горизонтальной плоскости с трением. При  $k = 1$  ( $\Omega = \omega$ ) правая часть соотношения (2.5) имеет вид

$$\frac{(5-2\epsilon)\delta^4 + 2(5-8\epsilon)\delta^2 - (5-2\epsilon)}{\delta^4 + 2\delta^2 - 1} \quad (2.6)$$

Учитывая, что его левая часть положительна, заключаем, что регулярные прецессии эллипсоида, заполненного жидкостью, вида (2.4) (при  $\Omega = \omega$ ) существуют только при условии положительности величины (2.6).

Если  $\delta^2 > \sqrt{2} - 1$  или  $\delta^2 < \sqrt{2} - 1$ , то это условие выполняется при  $\delta^2 > \delta_0^2(\epsilon)$  или  $\delta^2 < \delta_0^2(\epsilon)$  соответственно, где

$$\delta_0^2(\epsilon) = \frac{-5 + 8\epsilon + \sqrt{50 - 100\epsilon + 68\epsilon^2}}{5 - 2\epsilon} \quad (2.7)$$

Очевидно, функция  $\delta_0^2(\epsilon)$  монотонно возрастает на отрезке  $[0, 1]$ , причем

$$\delta_0^2(0) = \sqrt{2} - 1, \quad \delta_0^2(5/8) = 1, \quad \delta_0^2(1) = \sqrt{2} + 1$$



Таким образом, в случае эллипсоида, сжатого ( $\delta > 1$ ) вдоль оси симметрии, регулярные прецессии (2.4) ( $\Omega = \omega$ ) существуют при любом сжатии ( $\forall \delta > 1$ ), если масса жидкости составляет не более  $5/8$  массы системы ( $0 \leq \varepsilon \leq 5/8$ ), и только при сильном сжатии ( $\delta > \delta_0 > 1$ ) в противном случае ( $1 \geq \varepsilon > 5/8$ ). В случае эллипсоида, вытянутого ( $\delta < 1$ ) вдоль оси симметрии, регулярные прецессии (2.4) ( $\Omega = \omega$ ) существуют при любом отношении массы жидкости к массе системы ( $\forall \varepsilon \in [0, 1]$ ) для сильно вытянутого эллипсоида ( $\delta^2 < \sqrt{2} - 1$ ) и только при условии, что масса жидкости составляет менее  $5/8$  массы системы ( $0 \leq \varepsilon < 5/8$ ), для слабо вытянутого ( $1 > \delta > \delta_0$ ) эллипсоида.

В частности, при  $\varepsilon = 0$  (полый эллипсоид) регулярные прецессии существуют для любого эллипсоида вращения, а при  $\varepsilon = 1$  (безмассовый эллипсоид, заполненный жидкостью) — только для сильно сжатого ( $\delta^2 > \sqrt{2} + 1$ ) или сильно вытянутого ( $\delta^2 < \sqrt{2} - 1$ ) эллипсоидов (ср. с результатами для случаев твердого эллипсоида без жидкости [2] и безмассового эллипсоида, заполненного жидкостью [5]).

**3. Устойчивость равномерных вращений эллипсоида вокруг оси симметрии.** Рассмотрим стационарное движение (2.1) и выпишем в его окрестности линеаризованные уравнения возмущенного движения, полагая

$$\gamma_3 = 1 + \gamma'_3, \quad n = g + n', \quad \omega_3 = \omega + \omega'_3, \quad \Omega_3 = \Omega + \Omega'_3$$

и оставляя для остальных переменных  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\gamma_j$ ,  $\omega_j$  и  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) их прежние обозначения. Исключая переменные  $\gamma'_3, v_3, n'$  и  $\Omega'_3$  с помощью соотношений (1.5), (1.6) и третьего уравнения системы (1.1), после несложных, но достаточно громоздких вычислений получим

$$\dot{\gamma}_j - (-1)^{j+1}(\omega\gamma_{3-j} + \omega_{3-j}) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$\dot{\Omega}_j - (-1)^{j+1} \left( \omega\Omega_{3-j} + \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1} \Omega\Omega_{3-j} - \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1} \Omega\omega_{3-j} \right) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

$$\dot{v}_j - (-1)^{j+1} \omega v_{3-j} + \kappa v_j + (-1)^{j+1} \kappa \omega \delta^2 \gamma_{3-j} - (-1)^{j+1} \kappa \omega_{3-j} = 0, \quad j = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{5}{3} \frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1} (1 - \varepsilon) \left[ \frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1} \dot{\omega}_j + (-1)^{j+1} \omega \omega_{3-j} \right] + \varepsilon \dot{\omega}_j - (-1)^{j+1} \varepsilon \omega \omega_{3-j} + \\ & + 5\kappa \frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2} \omega_j + (-1)^{j+1} \frac{2\delta^2}{\delta^2 + 1} \varepsilon \Omega \omega_{3-j} - 5\kappa \frac{\delta^2 (\delta^2 + 1)}{(\delta^2 - 1)^2} \omega \gamma_j + \\ & + (-1)^{j+1} \left[ 5g \frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1} \gamma_{3-j} + \frac{4\delta^2}{\delta^4 - 1} \varepsilon \Omega \Omega_{3-j} + 5\kappa \frac{\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2} v_{3-j} \right] = 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\dot{\omega}'_3 = 0 \quad (3.5)$$

Очевидно, уравнение (3.5) отделяется от системы (3.1) – (3.4), причем этому уравнению отвечает нулевой корень характеристического уравнения для системы (3.1) – (3.5), связанный с произвольностью параметра  $\omega$  на решении (2.1). Поэтому устойчивость этого решения зависит от корней характеристического уравнения для системы (3.1) – (3.4).

Полагая

$$x = (\gamma_1 + i\gamma_2)e^{i\omega t}, \quad y = (\Omega_1 + i\Omega_2)e^{i\omega t}$$

$$z = (\omega_1 + i\omega_2)e^{i\omega t}, \quad v = (v_1 + iv_2)e^{i\omega t}$$



приведем систему восьмого порядка (3.1) – (3.4) относительно восьми действительных переменных к системе четвертого порядка относительно четырех комплексных переменных  $x, y, z$  и  $v$

$$\begin{aligned}
 \dot{x} - iz &= 0 \\
 \dot{y} + i \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1} \Omega y - 2i \frac{\delta^2}{\delta^2 + 1} \Omega z &= 0 \\
 \dot{v} + \kappa v - i\kappa\omega\delta^2 x + i\kappa z &= 0 \\
 \left[ \delta^2 + 1 - \frac{2}{5} \varepsilon \frac{\delta^4 + 8\delta^2 + 1}{\delta^2 + 1} \right] \dot{z} + \left[ 3\kappa - 2i\delta^2 \left( \frac{3}{5} \varepsilon \frac{(\delta^2 - 1)^2}{(\delta^2 + 1)^2} \Omega + (1 - \varepsilon)\omega \right) \right] z - \\
 - 3[\kappa\omega\delta^2 + i(\delta^2 - 1)g]x - \frac{12}{5} i\varepsilon \frac{\delta^2(\delta^2 - 1)}{(\delta^2 + 1)^2} \Omega y - 3i\kappa v &= 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Пусть  $\Omega = \omega$ , тогда характеристическое уравнение системы (3.6) имеет вид

$$f(\lambda) = p_0 \lambda^4 + (p_1 + iq_1) \lambda^3 + (p_2 + iq_2) \lambda^2 + (p_3 + iq_3) \lambda + iq_4 = 0 \tag{3.7}$$

$$p_k = a_k + \alpha_k \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, 3; \quad q_j = b_j + \beta_j \varepsilon, \quad q_{j+2} = b_{j+2}; \quad j = 1, 2$$

$$a_0 = -\frac{b_1}{\omega} = \frac{(\delta^2 + 1)^2}{3(\delta^2 - 1)^2}, \quad a_1 = \kappa \frac{(\delta^2 + 1)(\delta^2 + 4)}{3(\delta^2 - 1)^2}$$

$$a_2 = \frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1} g + \frac{2}{3} \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \omega^2, \quad a_3 = \kappa \left[ \frac{\delta^2 + 1}{\delta^2 - 1} g + \frac{5}{3} \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \omega^2 \right]$$

$$b_2 = -\frac{2\kappa\omega(2\delta^4 + \delta^2 + 2)}{3(\delta^2 - 1)^2}, \quad b_3 = \omega g, \quad b_4 = \omega g \kappa$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\kappa} = -\frac{\beta_1}{\kappa} = -\frac{\beta_2}{\omega\kappa} = -\frac{2}{15} \frac{\delta^4 + 8\delta^2 + 1}{(\delta^2 - 1)^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_3}{\kappa} = -\frac{4}{15} \frac{\delta^2}{\delta^2 - 1} \omega^2$$

Очевидно, перманентные вращения (2.1) ( $\Omega = \omega$ ) устойчивы, причем асимптотически по всем переменным, кроме, вообще говоря, переменных  $\Omega_3$  и  $\omega_3$ , если все корни уравнения (3.7) лежат в левой полуплоскости, и неустойчивы, если по крайней мере один корень лежит в правой полуплоскости.

Все корни уравнения (3.7) имеют отрицательные вещественные части, если и только если матрица

$$\begin{vmatrix}
 p_0 & -q_1 & -p_2 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & p_0 & -q_1 & -p_2 & q_3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & p_0 & -q_1 & -p_2 & q_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 \\
 0 & 0 & p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 & 0 \\
 0 & p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 & 0 & 0 \\
 p_1 & -q_2 & -p_3 & q_4 & 0 & 0 & 0
 \end{vmatrix} \tag{3.8}$$



иннорно положительна [6]. Условия иннорной положительности матрицы (3.8) имеют вид

$$(\delta^2 - 1)\{15(\delta^2 + 1)^2[5(\delta^4 + 5\delta^2 + 4) - 2(\delta^4 + 8\delta^2 + 1)\epsilon]g - \\ - \delta^4 \omega^2[125(\delta^2 + 1)^3 - 10(7\delta^6 + 63\delta^4 + 75\delta^2 + 55)\epsilon + 8(\delta^6 + 15\delta^4 + 57\delta^2 + 7)\epsilon^2]\} > 0 \quad (3.9)$$

$$(\delta^2 - 1)\{1125(\delta^2 + 1)^5 g^3 - 75(\delta^2 + 1)^2 \delta^4 g^2 \omega^2[5(\delta^2 + 1)^3 - 2(\delta^6 + 9\delta^4 + 9\delta^2 + 37)\epsilon] - \\ - 120\delta^4 g \omega^4[5(\delta^4 + 2\delta^2 - 1)(2\delta^4 + \delta^2 - 4) - 2(2\delta^8 + 17\delta^6 + 5\delta^4 + 3\delta^2 + 1)\epsilon]\epsilon - \\ - 8\delta^8 \omega^6[125(\delta^4 + 2\delta^2 - 1) - 10(7\delta^4 + 44\delta^2 - 7)\epsilon + 8(\delta^4 + 8\delta^2 - 1)\epsilon^2]\epsilon\} > 0 \quad (3.10)$$

$$(\delta^2 - 1)\{15(\delta^4 + 2\delta^2 - 1)g - \delta^4 \omega^2[5(\delta^4 + 2\delta^2 - 1) - 2(\delta^4 + 8\delta^2 - 1)\epsilon]\epsilon\} > 0 \quad (3.11)$$

Таким образом, при выполнении неравенств (3.9) – (3.11) равномерные вращения (2.1) устойчивы, причем асимптотически по части переменных. При строгом нарушении хотя бы одного из этих неравенств равномерные вращения (2.1) неустойчивы.

**4. Анализ полученных результатов.** Исследование неравенств (3.9) – (3.11) показывает, что устойчивость равномерных вращений (2.1) ( $\Omega = \omega$ ) существенно зависит от параметра  $\epsilon \in [0, 1]$ , характеризующего отношение массы жидкости к массе всей системы.

Если жидкость достаточно тяжелая ( $\epsilon \geq 5/8$ ), то равномерные вращения эллипсоида, вытянутого вдоль оси симметрии ( $\delta < 1$ ), неустойчивы при любой угловой скорости, а равномерные вращения слабо сжатого ( $1 < \delta \leq \delta_0(\epsilon)$ ) эллипсоида устойчивы при любой угловой скорости; равномерные вращения сильно сжатого ( $\delta > \delta_0(\epsilon)$ ) эллипсоида устойчивы при малой ( $\omega^2 < \omega_0^2(\epsilon)$ ) и неустойчивы при большой ( $\omega^2 > \omega_0^2(\epsilon)$ ) угловой скорости. Здесь  $\delta_0(\epsilon)$  определяется формулой (2.7), а

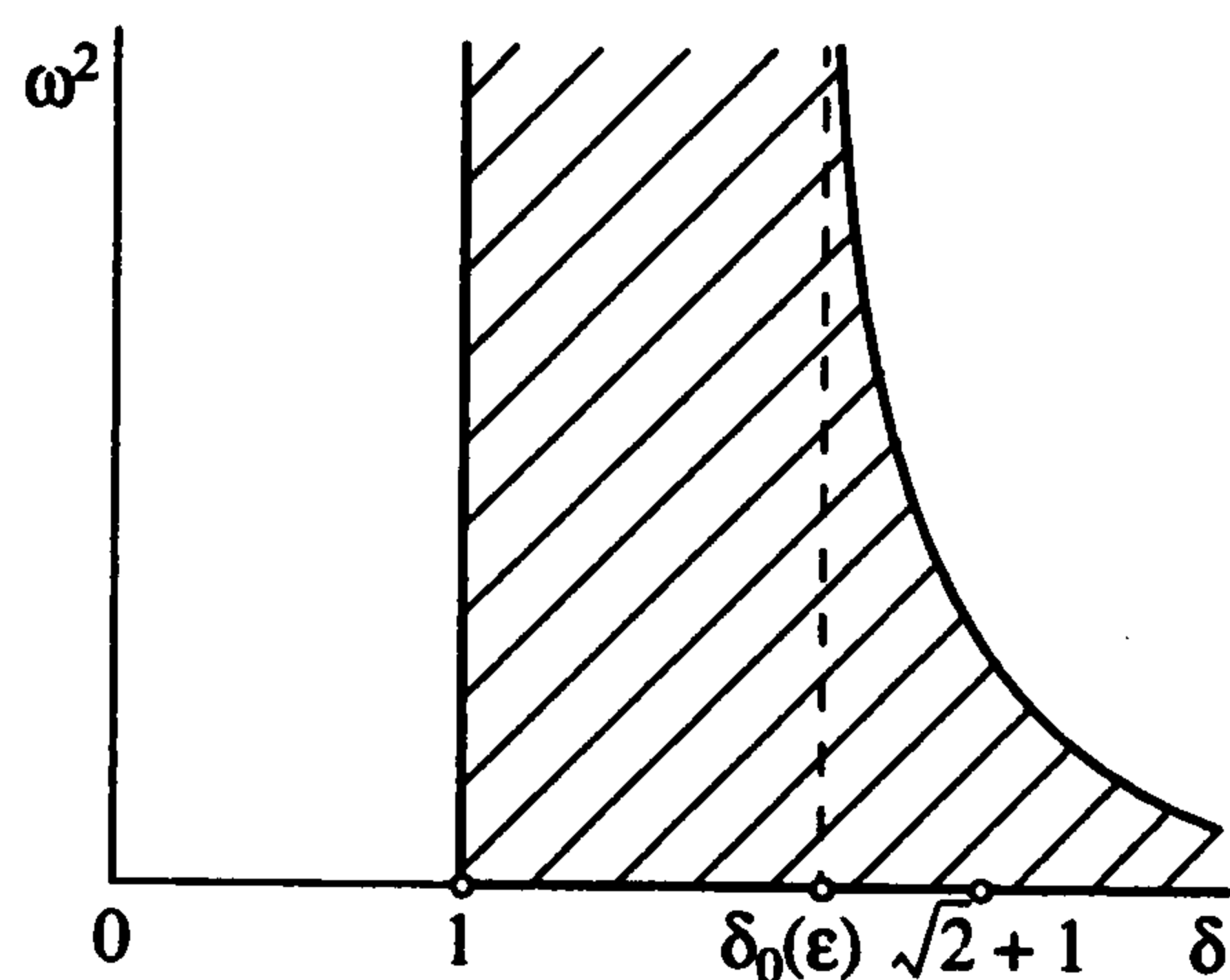
$$\omega_0^2(\epsilon) = \frac{3g}{\delta^4} \frac{5(\delta^4 + 2\delta^2 - 1)}{5(\delta^4 + 2\delta^2 - 1) - 2(\delta^4 + 8\delta^2 - 1)\epsilon} \quad (4.1)$$

Если жидкость достаточно легкая ( $0 < \epsilon < 5/8$ ), то равномерные вращения сжатого ( $\delta > 1$ ) эллипсоида устойчивы или неустойчивы при соответственно малой или большой угловой скорости ( $\omega^2 < \omega_0^2(\epsilon)$  или  $\omega^2 > \omega_0^2(\epsilon)$ ), равномерные вращения слабо вытянутого ( $\delta_0(\epsilon) < \delta < 1$ ) эллипсоида при соответственно большой или малой угловой скорости ( $\omega^2 > \omega_0^2(\epsilon)$  или  $\omega^2 < \omega_0^2(\epsilon)$ ), а равномерные вращения сильно вытянутого ( $\delta < \delta_0(\epsilon) < 1$ ) эллипсоида неустойчивы при любой угловой скорости. Очевидно, смена устойчивости равномерных вращений (2.1) ( $\Omega = \omega$ ) при критическом значении (4.1) угловой скорости связана с рождением регулярных прецессий (2.4) ( $\Omega = \omega$ ) эллипсоида (бифуркация Андронова – Хопфа [7]).

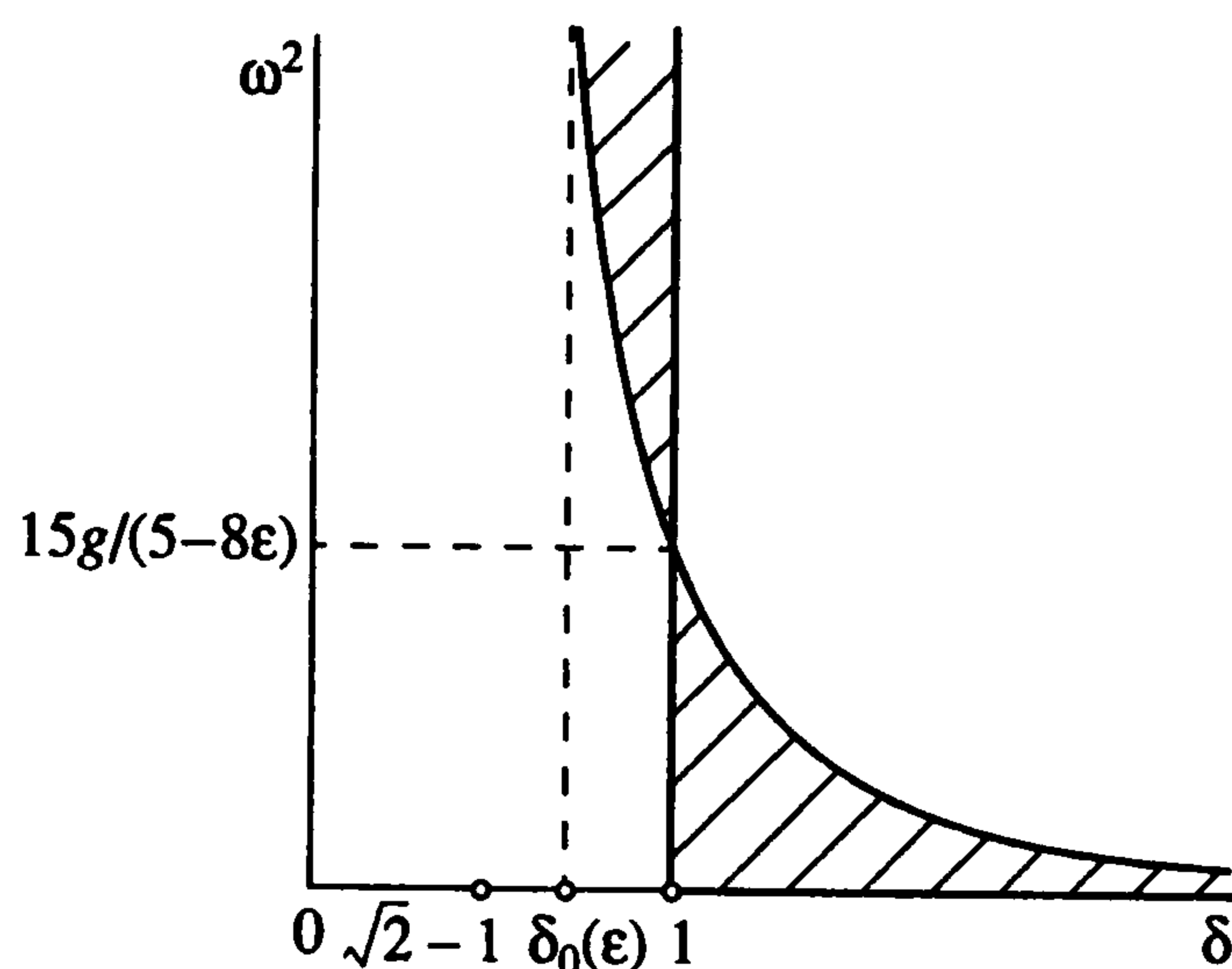
На фиг. 1 ( $5/8 \leq \epsilon < 1$ ) и фиг. 2 ( $0 < \epsilon < 5/8$ ) приведены области устойчивости (заштрихованы) и неустойчивости равномерных вращений (2.1) ( $\Omega = \omega$ ) в зависимости от степени сжатости (вытянутости) эллипсоида и его угловой скорости. Заметим, что вертикальная асимптота  $\delta = \delta_0(\epsilon)$  криволинейной границы области устойчивости, задаваемой формулой (4.1), стремится к прямым  $\delta = \sqrt{2} + 1$  при  $\epsilon \rightarrow 1 - 0$ ,  $\delta = 1$  при  $\epsilon \rightarrow 5/8$  и  $\delta = \sqrt{2} - 1$  при  $\epsilon \rightarrow +0$ . Таким образом, область устойчивости, указанная на фиг. 1 ( $5/8 \leq \epsilon < 1$ ), непрерывно при  $\epsilon \rightarrow 1 - 0$  переходит в область устойчивости [5] равномерных вращений безмассового ( $\epsilon = 1$ ) эллипсоида, заполненного жидкостью.

При  $\epsilon \rightarrow +0$  такого непрерывного перехода не наблюдается: на фиг. 3 указана область устойчивости равномерных вращений полого (жидкости нет) эллипсоида; криволинейная граница этой области определяется соотношением  $\omega^2 = 3g/\delta^4$  [1–3]. Таким образом, наличие даже легкой жидкости ( $0 < \epsilon \leq 1$ ) несколько расширяет об-

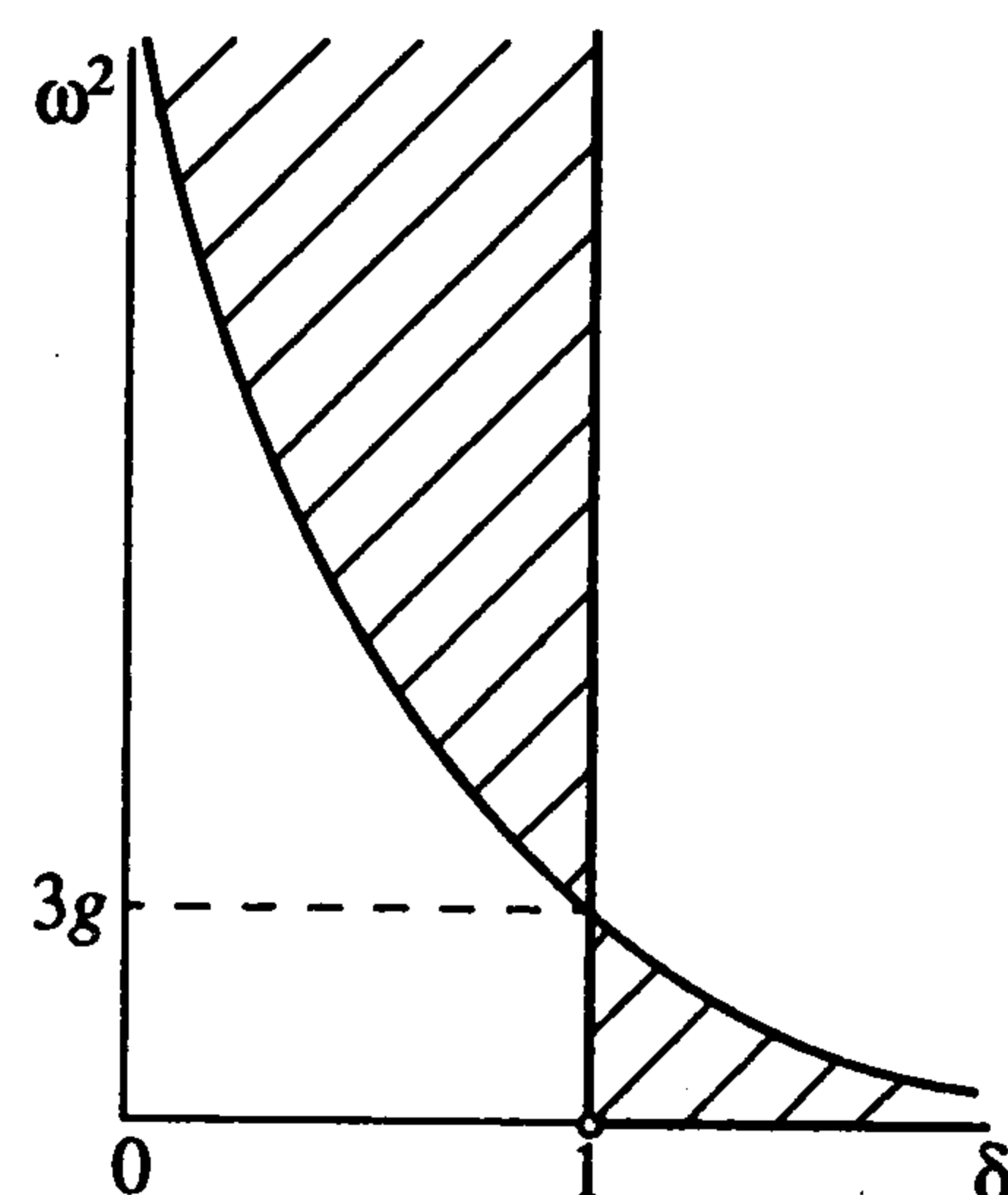




Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ласть устойчивости равномерных вращений (2.1) ( $\Omega = \omega$ ) сжатого эллипсоида и резко сужает область устойчивости этих вращений вытянутого эллипсоида (ср. фиг. 2 и 3). Такое различие областей устойчивости при  $\epsilon = +0$  (жидкость в полости есть, но она очень легкая) и  $\epsilon = 0$  (жидкости в полости нет) вполне объяснимо. Во втором случае ( $\epsilon = 0$ ) следовало отбросить уравнения (1.3), а значит, и уравнения (3.2), второе уравнение системы (3.6) и т.д.

Отметим также, что это различие можно объяснить и строго математически. При  $\epsilon = 0$  левая часть неравенства (3.11) обращается в нуль. Следовательно, характеристическое уравнение (3.7), которое можно представить в виде

$$f_0(\lambda) + \epsilon f_1(\lambda) = 0 \quad (4.2)$$

$$f_0 = a_0 \lambda^4 + (a_1 + ib_1) \lambda^3 + (a_2 + ib_2) \lambda^2 + (a_3 + ib_3) \lambda + ib_4$$

$$f_1 = \alpha_0 \lambda^4 + (\alpha_1 + i\beta_1) \lambda^3 + (\alpha_2 + i\beta_2) \lambda^2 + \alpha_3 \lambda$$

при  $\epsilon = 0$  имеет чисто мнимый корень  $\lambda_0$ . Этот корень легко найти:  $\lambda_0 = -i\omega(\delta^2 - 1)/(\delta^2 + 1)$  ( $f_0(\lambda_0) = 0$ ). При  $0 < \epsilon \ll 1$  уравнение (4.2) имеет корень  $\lambda(\epsilon) = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots$ , причем  $\lambda_1 = -f_1(\lambda_0)/f_0'(\lambda_0) = \xi + i\eta$  (штрих означает производную по  $\lambda$ ). Вычисляя  $\lambda_1$ , имеем

$$\xi = \frac{8\delta^4 \omega^6 (1 - 2\delta^2 - \delta^4)}{5(\delta^2 + 1)^5 (A^2 + B^2)}$$



$$A = \frac{\omega}{3(\delta^2 - 1)(\delta^2 + 1)} [3(\delta^2 + 1)^2 g - 2\omega^2(3\delta^4 + 4\delta^2 - 2)]$$

$$B = \frac{\omega}{3(\delta^2 + 1)} [-3(\delta^2 + 1)g + \omega^2(3\delta^2 - 1)]$$

Таким образом, если  $\delta^2 < \sqrt{2} - 1$ , то  $\xi > 0$  и корень  $\lambda(\epsilon)$  имеет положительную вещественную часть порядка  $\epsilon$ . Следовательно, наличие даже легкой жидкости в полости приводит к неустойчивости по Ляпунову всех равномерных вращений сильно вытянутого ( $\delta^2 < \sqrt{2} - 1$ ) эллипсоида. Однако если угловая скорость эллипсоида достаточно велика ( $\omega^2 > 3g/\delta^4$ ), то при  $0 < \epsilon \ll 1$  все остальные корни уравнения (4.2) имеют отрицательные вещественные части и на временах порядка  $1/\epsilon$  возмущенные движения эллипсоида близки к невозмущенному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-00141), Программы поддержки ведущих научных школ (00-15-96150) и Федеральной целевой программы "Интеграция" (Б0053).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Magnus K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. B. etc.: Springer, 1971. = Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 526 с.*
2. *Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.*
3. *Карпетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.*
4. *Маркеев А.П. Об устойчивости вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 3. С. 19–26.*
5. *Карпетян А.В. О стационарных движениях сфероида, заполненного жидкостью, на плоскости с трением // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 4. С. 645–652.*
6. *Jury E.I. Inners and Stability of Dynamical Systems. N.Y. etc.: Wiley, 1974. = Джури Э.И. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979. 299 с.*
7. *Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and its Applications. N.Y.: Springer, 1976. = Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.*

Москва

Поступила в редакцию  
27.XII.2001