

УДК 531.36

© 2002 г. А.С. Сумбатов

О ФОРМУЛЕ ДЛЯ РЕАКЦИЙ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Получена формула для определения реакций идеальных по Лагранжу связей при использовании произвольных линейных квазискоростей. Рассмотрен пример качения шара по паре скрещающихся прямых при разных предположениях о наличии или отсутствии проскальзывания в точках контакта.

Как правило, в механике систем с идеальными связями используются такие формы уравнений движения, в которые реакции связей явно не входят. В этом состоит большое преимущество уравнений Лагранжа второго рода, Чаплыгина, Больцмана–Гамеля и др. Однако если система подчинена односторонним связям, часть которых в процессе движения системы может исчезать (ослабевать) или, наоборот, появляться (накладываться), то практически единственный способ установить, наложена ли связь на систему, заключается в постоянной проверке условия равенства нулю силы реакции этой связи. Другими словами значения реакций всех односторонних связей в системах переменной структуры необходимо в процессе движения вычислять.

Нетрудно получить формулу для реакций идеальных связей, когда уравнения связей независимы (см., например, [1]). Такая формула была получена [2, 3] и для случая избыточного числа уравнений связей, когда записанные в виде равенств второго порядка они образуют линейно зависимую относительно обобщенных ускорений совокупность. Применение избыточного числа уравнений связей нередко бывает оправданным, чтобы не нарушить симметрию этих уравнений и входящих в них переменных системы [4–6].

Ниже формула Калабы с соавт. [2, 3] обобщается на случай использования в системах с идеальными связями произвольных линейных квазискоростей и получена несколько иным, имеющим прозрачный механический смысл способом.

1. Линейная система. Пусть A – произвольная вещественнозначная $(m \times n)$ -матрица ранга $r > 0$. Далее потребуется следующее утверждение: общее решение совместной системы линейных уравнений $Ax = b$ ($x \in R^n$) можно представить в виде

$$x = A^+b + Gy, \quad G = E - A^+A \quad (1.1)$$

Здесь A^+ – псевдообратная $(n \times m)$ -матрица [7], E – единичная матрица, $y \in R^n$ – произвольный вектор.

Есть несколько обоснований этой формулы [2, 8, 9].

Приведем еще одно ее доказательство. Множество решений неоднородной системы замкнуто, и при $b \neq 0$ норма этих решений строго положительна. Следовательно, существует решение, минимальное по норме, которое, как известно [7], имеет вид A^+b . Остается доказать, что $\text{rang } G = n - r$, т.е. второе слагаемое в формуле (1.1) представляет самое общее решение однородной системы $Ax = 0$. По свойству псевдообратной матрицы

$$AG = A - AA^+A = A - A = 0$$

Поэтому $\text{rank } G \leq n - r$. С другой стороны, матрица A^+A всегда симметрическая, ее ранг не больше r , так как ранг псевдообратной матрицы равен рангу исходной матрицы. Существует неособая матрица W , такая, что $W^{-1}GW$ – диагональная матрица. Но тогда в этой матрице не менее $n-r$ диагональных элементов – единицы. Следовательно, $\text{rank } G = n - r$.

Для вычисления псевдообратной матрицы есть эффективные численные методы. Можно записать ее и в аналитической форме. Пусть $A = BC$ – скелетное представление исходной матрицы [7]. Тогда

$$A^+ = C'(CC')^{-1}(B'B)^{-1}B'$$

(штрих означает транспонирование).

Потребуется еще одна формула для псевдообратных матриц

$$D^+ = D'(DD')^+ \quad (1.2)$$

Для доказательства рассмотрим совместную систему линейных уравнений $Dx = b$, где D – произвольная ненулевая $(m \times n)$ -матрица, $x \in R^n$. Условие непротиворечивости этой системы имеет вид (см. (1.1))

$$DD^+b = b \quad (1.3)$$

Минимальное по норме частное решение системы $x_p = D^+b$.

Рассмотрим другую систему $DD'z = b$, где $D'z = x$. Ее минимальное по норме решение $z_p = (DD')^+b$, откуда, в силу единственности минимального по норме частного решения исходной линейной системы, следует, что

$$(D^+ - D'(DD')^+)b = 0 \quad (1.4)$$

Но условие (1.3) – единственное ограничение на вектор b , поэтому из равенства (1.4) следует выражение (1.2).

2. Формула для реакций. Пусть механическая система с конечным числом степеней свободы описывается вектором локальных обобщенных координат $q \in R^n$. На систему наложены идеальные по Лагранжу кинематические связи

$$a_i(t, q, \dot{\pi}) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

где t – время, $\dot{\pi}$ – n -вектор линейных квазискоростей, вводимых при помощи неособой $(n \times n)$ -матрицы P и свободного вектора $h \in R^n$

$$\dot{\pi} = P(t, q)\dot{q} + h(t, q), \quad \det P \neq 0$$

Взяв полную производную по времени от уравнений связей, получим

$$A(t, q, \dot{\pi})\ddot{\pi} = b(t, q, \dot{\pi}) \quad (2.1)$$

Уравнения движения механической системы запишем в форме Эйлера–Лагранжа [10] с множителями $\lambda \in R^m$ связей (2.1)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_j} - \frac{\partial T}{\partial \pi_j} + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \gamma_{rj}^k \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_k} \dot{\pi}_r + \sum_{k=1}^n \alpha_j^k \frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_k} = P_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}$$

$$j = 1, \dots, n$$

Здесь T – кинетическая энергия системы, P_j – обобщенные активные силы, приложенные к системе, $A = \|a_{ij}\|$, формулы для многоиндексных символов γ_{rj}^k и α_j^k приведены в книге [10].

В матричной форме эти уравнения принимают вид

$$M\ddot{\pi} = F(t, q, \dot{\pi}) + A'\lambda \quad (2.2)$$

где M – положительно определенная симметрическая $(n \times n)$ -матрица формы T_2 кинетической энергии системы, в выражение F собраны все члены уравнений Эйлера–Лагранжа, которые не содержат квазиускорений (кроме ковектора $A'\lambda$ реакции связей (2.1)).

Заметим, что $a = M^{-1}F$ – вектор квазиускорений системы, освобожденной от связей (2.1).

Чтобы определить реакцию связей, исключим вектор квазиускорений $\ddot{\pi}$ из формул (2.1), (2.2) и, введя обозначения

$$B = AM^{-1/2}, \quad B'\lambda = x, \quad b - Aa = c$$

получим матричное уравнение

$$Bx = c \quad (\text{rank } B = \text{rank } A = r)$$

В общем случае матрица B прямоугольная.

Согласно выражению (1.1), общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = B^+c + (E - B^+B)y, \quad y \in R^n$$

Следовательно,

$$A'\lambda = F_1 + F_2, \quad F_1 = M^{1/2}B^+c, \quad F_2 = M^{1/2}(E - B^+B)y \quad (2.3)$$

Ковекторы F_1 и F_2 в правой части последней формулы взаимно ортогональны:

$$M^{-1}F_2' \cdot F_1 = y'(E - B^+B)M^{-1/2} \cdot F_1 = y'(B^+ - B^+BB^+)c = y'(B^+ - B^+)c = 0$$

С другой стороны, вектор $M^{-1}F_2$ принадлежит множеству виртуальных перемещений системы

$$A\delta q = 0$$

Действительно,

$$A \cdot M^{-1}F_2 = B(E - B^+B)y = 0$$

Но, по условию, наложенные на систему связи (2.1) идеальные; следовательно, $y = 0$, и из формулы (2.3) вытекает выражение

$$A'\lambda = M^{1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (2.4)$$

для реакции этих связей.

Несколько иначе формула (2.4) была выведена [2, 3] для механических систем, заданных в обобщенных координатах. Опубликован также общий аналог этой формулы для систем с неидеальными по Лагранжу связями [11].

Заметим, что можно избежать вычисления матрицы $M^{1/2}$ в выражении (2.4). Именно, по свойству (1.2) псевдообратной матрицы для $D = AM^{-1/2}$ получим

$$(AM^{-1/2})^+ = M^{-1/2}A'(AM^{-1}A')^+$$

и формула (2.4) принимает вид

$$A'\lambda = A'(AM^{-1}A')^+(b - Aa) \quad (2.5)$$

более удобный в приложениях.

Когда матрица A имеет максимальный ранг, равный $\min(m, n)$, выражение (2.5) упрощается:

$$A'\lambda = A'(AM^{-1}A')^{-1}(b - Aa) \quad (2.6)$$

3. Пример. В качестве примера, иллюстрирующего полученные явные выражения для реакции связей, рассмотрим задачу о движении тяжелого однородного шара радиуса R и массы m , опирающегося на пару скрещивающихся прямых.

Выберем неподвижную декартову систему координат $Oxyz$. Пусть $OO' = a$ – расстояние между прямыми, точка O лежит на первой опорной прямой. Направим ось Oy вдоль отрезка OO' , а ось Oz – перпендикулярно плоскости, содержащей отрезок OO' и вторую опорную прямую, причем так, чтобы эта ось составляла острый угол α с восходящей вертикалью. Через β обозначим наименьший из двух углов между скрещивающимися прямыми, (X, Y, Z) – координаты центра C шара.

Условия контакта шара с обеими опорными прямыми имеют вид

$$[(Y - a)^2 + Z^2]^{1/2} - R = 0, \quad (3.1)$$

$$[Y^2 + (X \sin \beta - Z \cos \beta)^2]^{1/2} - R = 0$$

Рассмотрим три случая взаимодействия шара с опорными прямыми.

В системе S_1 шар катится без скольжения. Условия равенства нулю мгновенных скоростей шара в точках контакта C_1 и C_2 выражаются уравнениями

$$v_C + \omega \times \rho_i = 0, \quad \rho_i = CC_i, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

где v_C – скорость центра шара, $\omega(p, q, r)$ – угловая скорость.

В системе S_2 шар катится без скольжения по первой опорной прямой и скользит без трения вдоль второй прямой. Уравнения связей – (3.1) и уравнение (3.2) при $i = 1$.

Наконец, в системе S_4 шар скользит без трения по обеим опорным прямым.

Далее в графической форме приведены некоторые результаты численных расчетов, полученных при следующих значениях параметров:

$$m = 1, R = 2, a = 3, \beta = \pi/6, \alpha = \pi/12$$

Во всех вариантах расчетов начальные условия полагались одинаковыми: $X_0 = 2.5$, $\omega_0 = -1.55$. Шар начинает движение без скольжения, опираясь на обе прямые и имея начальную скорость ω_0 поворота вокруг мгновенной оси C_1C_2 в направлении OO' .

Положим

$$\dot{\pi}_1 = \dot{X}, \quad \dot{\pi}_2 = \dot{Y}, \quad \dot{\pi}_3 = \dot{Z}, \quad \dot{\pi}_4 = p, \quad \dot{\pi}_5 = q, \quad \dot{\pi}_6 = r$$

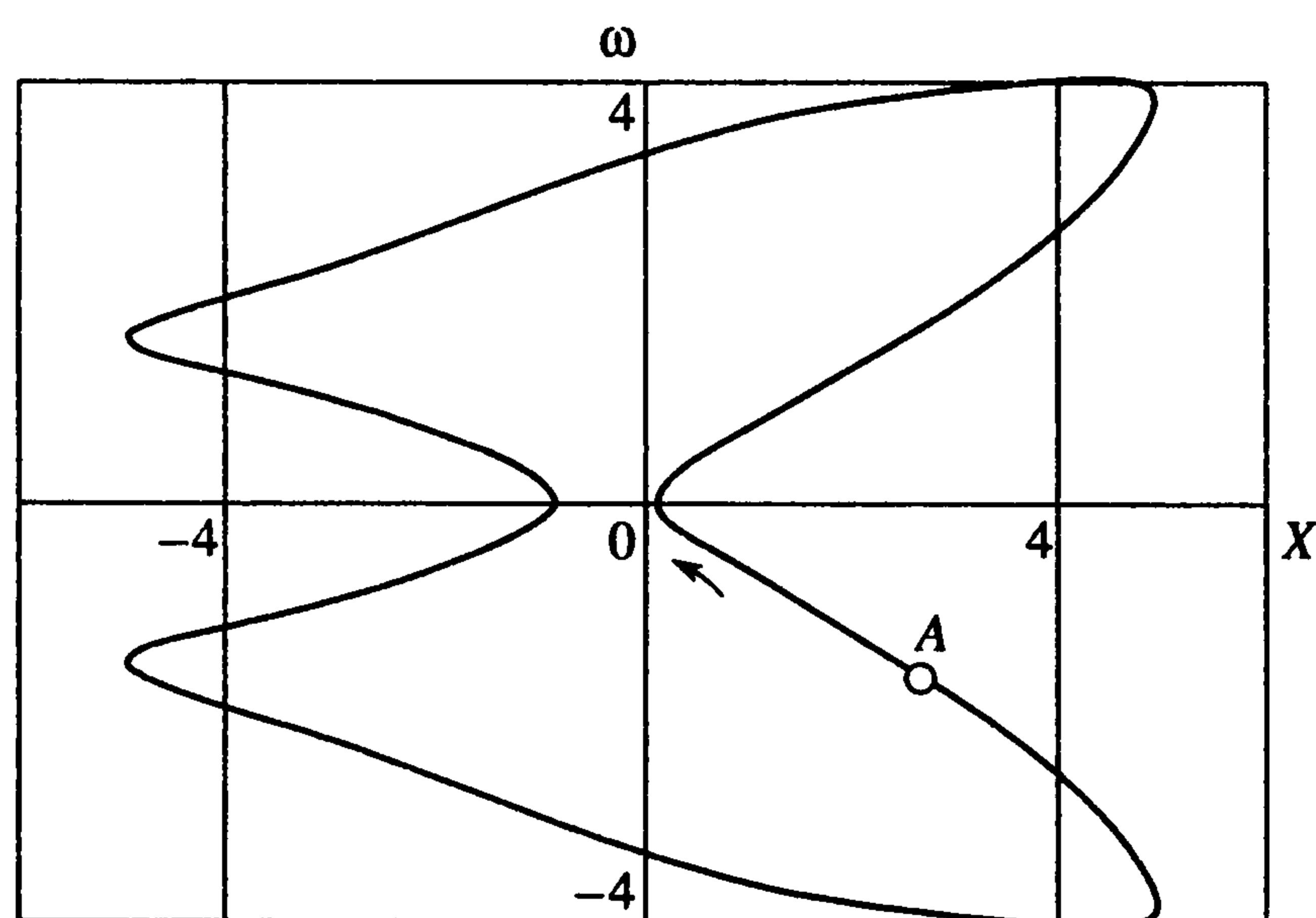
Система S_1 (интегрируемая в квадратурах голономная система с одной степенью свободы). Уравнений связей (3.1) и (3.2) восемь. Преобразовав их к виду (2.1), получим по формуле (2.5) явное выражение для обобщенной силы реакции – правой части формулы

$$\left\| \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ \rho_1 \times R_1 + \rho_2 \times R_2 \end{matrix} \right\| = A'\lambda \quad (3.3)$$

где R_1 и R_2 – силы, действующие на шар со стороны соответственно первой и второй опорных прямых.

Под действием силы тяжести и реакций шар будет катиться до тех пор, пока выполняются оба неравенства

$$\rho_1 \cdot R_1 \leq 0, \quad \rho_2 \cdot R_2 \leq 0 \quad (3.4)$$



Фиг. 1

Однако проверить эти условия в системе S_1 невозможно, поскольку из уравнений (3.3) неизвестные R_1 и R_2 определяются только с точностью до вектора kC_1C_2 , где k – произвольный скаляр. Следовательно, задания кинематических ограничений (3.2) недостаточно для динамической определимости системы, необходимы дополнительные условия.

На фиг. 1 изображена кривая значений проекции мгновенной угловой скорости шара на направление C_1C_2 в зависимости от координаты X центра шара. Кривая получена численным интегрированием уравнений движения (2.2) системы S_1 .

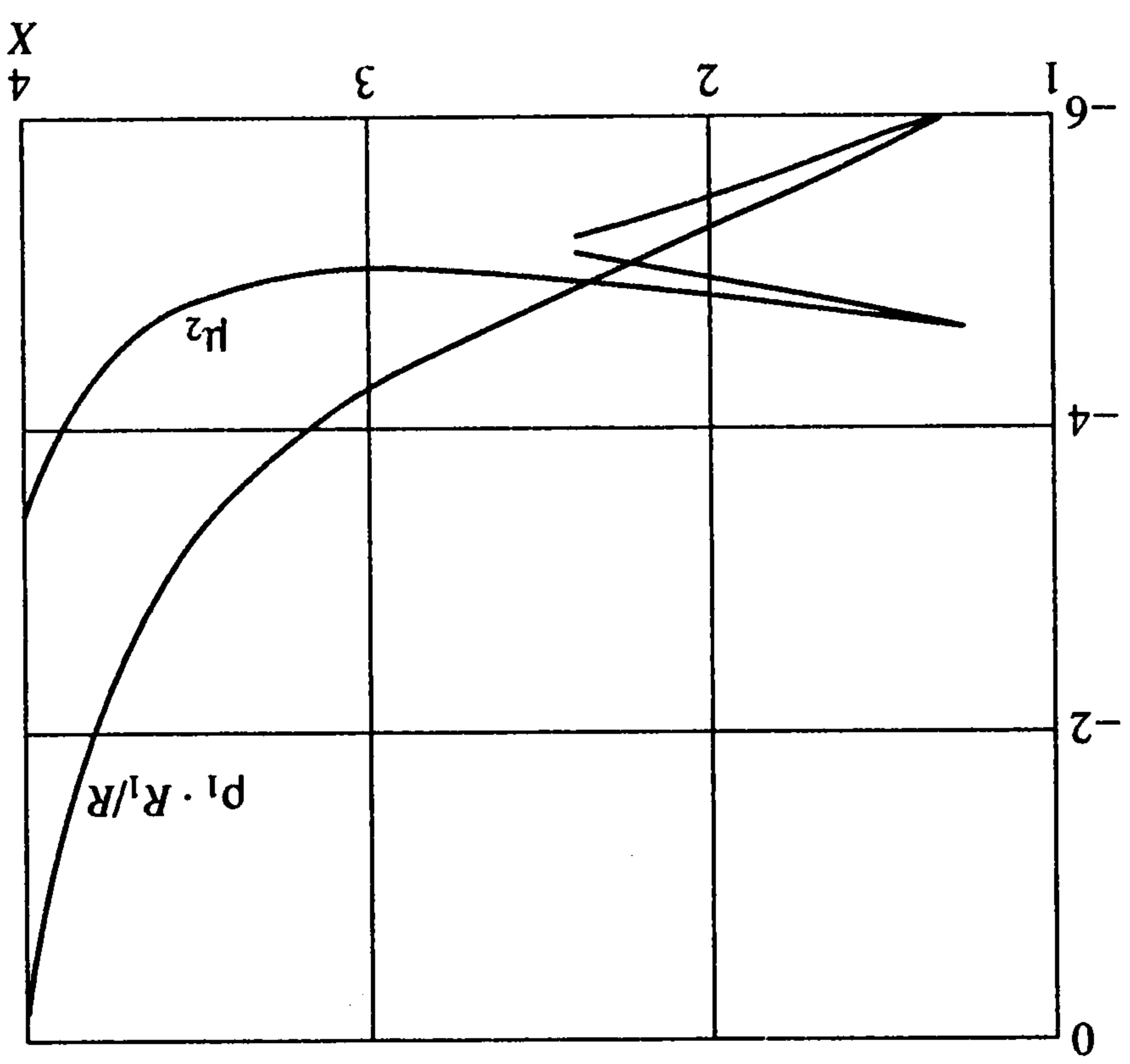
Начальному положению шара соответствует точка A на кривой. Шар начинает движение к началу координат $X_0 = 0$ и, едва не достигнув его, останавливается, потом начинает скатываться обратно со все увеличивающейся угловой скоростью. На фиг. 1 направление обхода кривой отмечено стрелкой. В крайней правой точке этой кривой расстояние $C_1C_2 = 2R$, и шар продолжит обкатывать скрещающиеся опорные прямые, но уже снизу. После достижения крайней левой точки кривой фиг. 1, в которой расстояние между опорными точками равно диаметру, шар "выныривает" наверх и, замедляясь, начинает приближаться к началу координат. При $X = -0.89$ шар останавливается, а затем начинает скатываться в обратном направлении, пока не достигнет исходного положения A . Движение шара в соответствии с уравнениями (2.2) и полученной формулой для обобщенной реакции периодическое. Однако физически оно нереально, так как связи (3.1) и (3.2) неудерживающие.

Система S_2 (неголономная система с двумя степенями свободы). Уравнений связей (3.1) и (3.2) для $i = 1$ пять. Формула (2.5) с соответствующими матрицами A и b для системы S_2 дает явное выражение обобщенной реакции (3.3). В левой части этой формулы $R_2 = \mu_2 \rho_2$. Шар не покидает обеих опор, пока выполняются неравенства

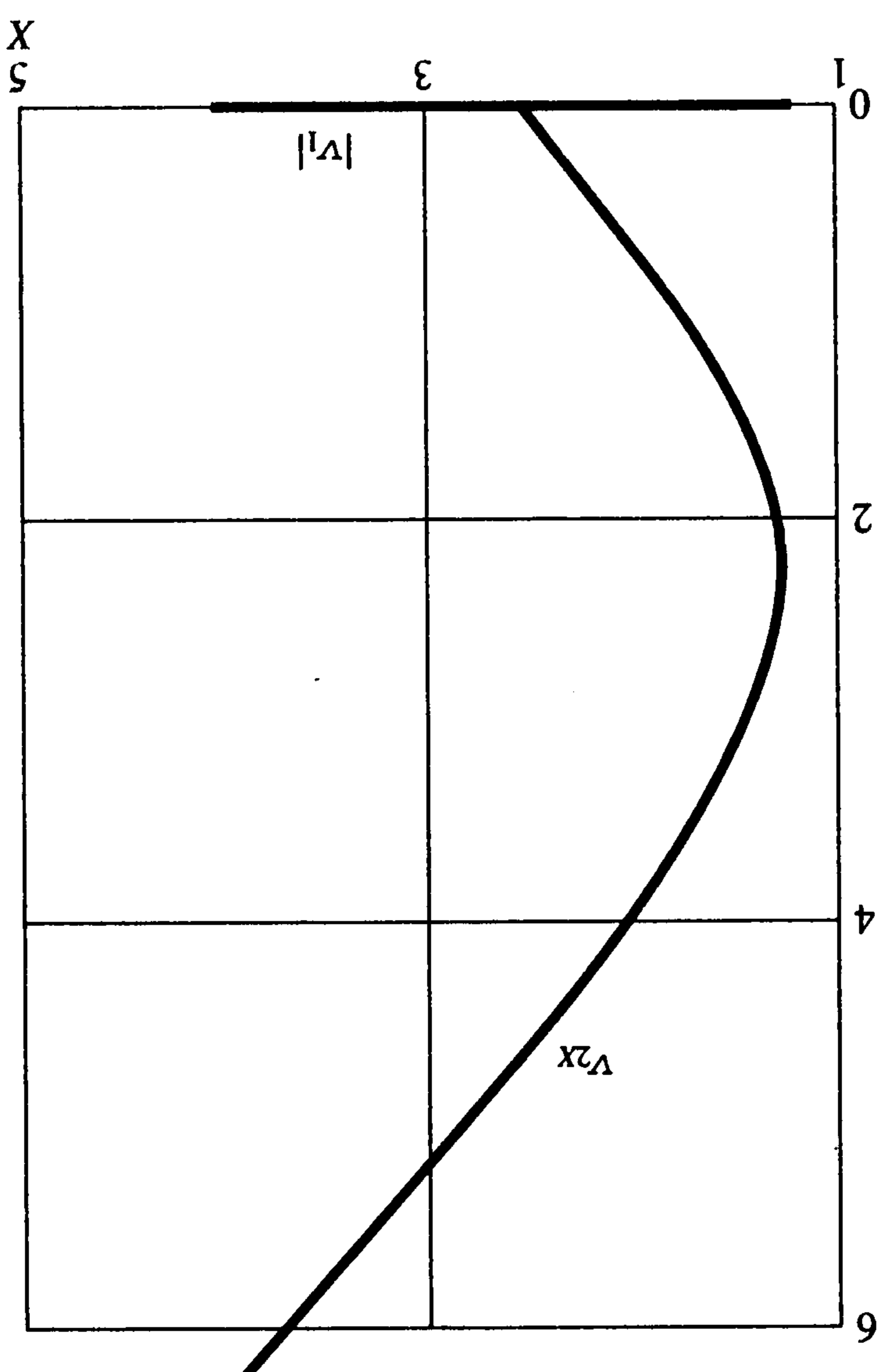
$$\rho_1 \cdot R_1 \leq 0, \quad \mu_2 \leq 0 \quad (3.5)$$

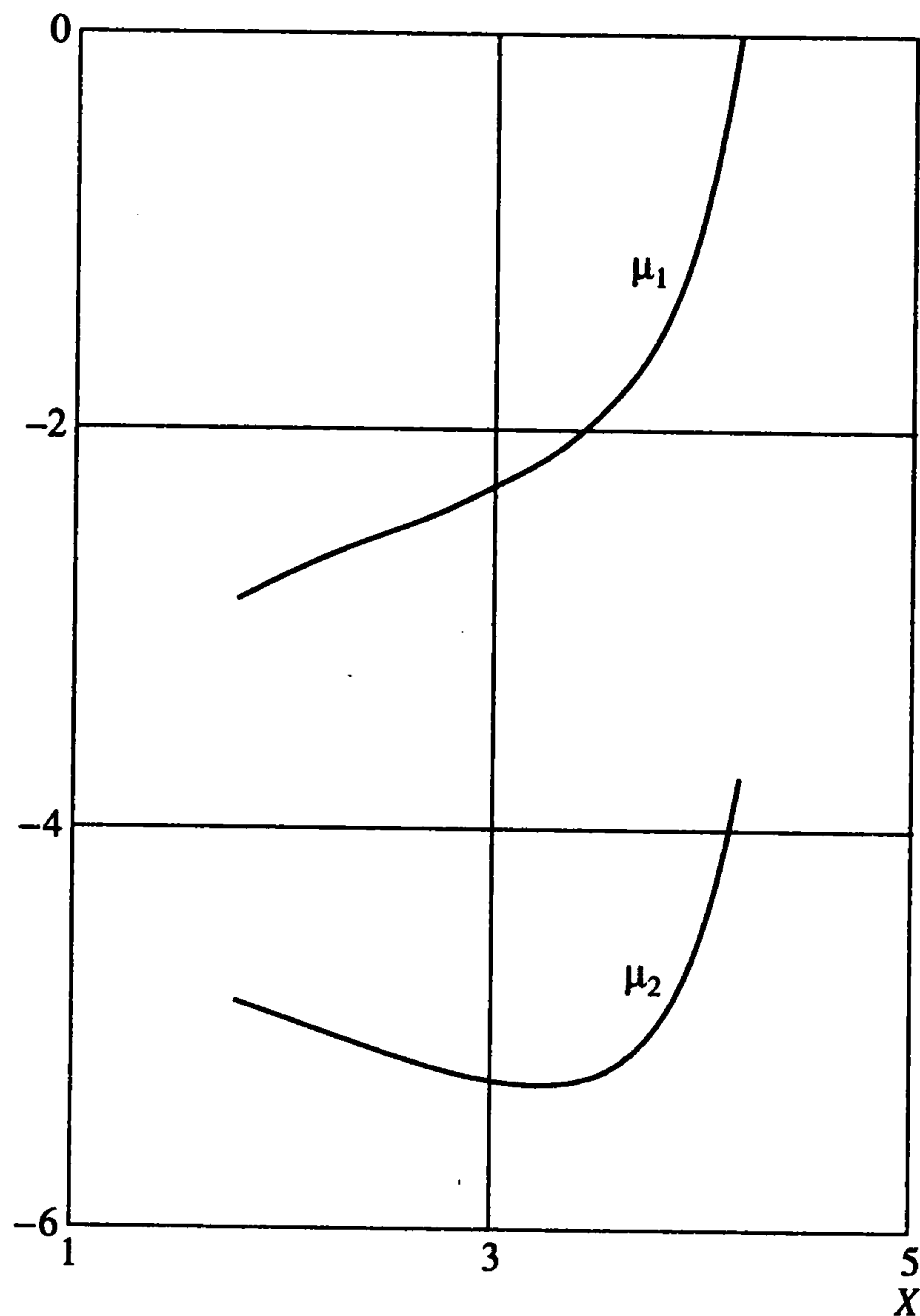
Неизвестные R_1 и μ_2 определяются из уравнений (3.3).

На фиг. 2 изображены графики, характеризующие значения скоростей точек C_1 и C_2 шара. Модуль мгновенной скорости точки C_1 равен нулю во все время движения ($|v_1| = 0$, утолщенный отрезок оси X), а проекция мгновенной скорости точки C_2 шара на ось OX (кривая $v_2 X$) быстро растет, когда шар удаляется от крайнего положения $X = 1.25$.



Фиг. 2





Фиг. 4

Фиг. 3 дает представление о силах реакции, действующих на шар. В рассматриваемом движении сначала ослабевает контакт с первой опорной прямой (график достигает оси $\rho_1 \cdot R_1 = 0$).

Система S_4 (интегрируемая в квадратурах голономная система с четырьмя степенями свободы). Уравнения ее связей (3.1) независимы, обобщенная реакция вычисляется по формуле (2.6). При этом обе силы $R_1 = \mu_1 \rho_1$ и $R_2 = \mu_2 \rho_2$ определяются из уравнений (3.3), а условия сохранения обоих контактов шара с опорами принимают вид $\mu_1 \leq 0$, $\mu_2 \leq 0$.

На фиг. 4 изображены графики функций $\mu_1(X)$ и $\mu_2(X)$. Шар перестает давить также на первую опорную прямую, но при значении X , несколько большем, чем в аналогичной ситуации в системе S_2 .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00196, 00-15-96150) и Федеральной целевой программы "ИНТЕГРАЦИЯ".

ЛИТЕРАТУРА

1. Новоселов В.С. Вариационные методы механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. 66 с.
2. Udwadia F.E., Kalaba R.E. Analytical Dynamics. A New Approach: Cambridge: Univ. Press, 1995. 275 p.

3. *Kalaba R.E., Udwadia F.E., Xu R.* Constrained motion revisited // *Appl. Math. and Comput.* 1995. V. 70. № 1. P. 67–76.
4. *Суслов Г.К.* Об уравнениях с частными производными для несвободного движения. СПб., 1888, 64 с.
5. *Четаев Н.Г.* Об уравнениях Пуанкаре // *ПММ.* 1941. Т. 5. Вып. 2. С. 253–262.
6. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
7. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
8. *Graybill F.* Matrices and Applications. Belmont: Wadsworth Intern., 1983. 461 p.
9. *Horn R., Johnson C.* Matrix Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1985. 561 p.
10. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
11. *Udwadia F.E., Kalaba R.E.* On the foundations of analytical dynamics // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2002. V. 37. P. 1079–1090.

Москва
e-mail: sumbatov@ccas.ru

Поступила в редакцию
28.V.2002