

УДК 539.3

© 2002 г. В.Б. Зеленцов

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Предлагается асимптотический метод решения нестационарных динамических контактных задач теории упругости для полосы малой толщины. Решение задач с помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени) и Фурье (по продольной координате) сводится к интегральному уравнению (ИУ) типа свертки первого рода относительно неизвестной трансформанты Лапласа контактных напряжений под штампом. Нулевой член асимптотики решения ИУ для больших значений параметра Лапласа строится в виде суперпозиции решений соответствующих ИУ Винера–Хопфа за минусом решения соответствующего ИУ на всей оси. При решении ИУ Винера–Хопфа символ ядра ИУ в комплексной плоскости представляется в специальной форме – в виде равномерного разложения по экспонентам. Последнее дает возможность получить ИУ второго рода для определения трансформанты Лапласа–Фурье искомых контактных напряжений, которое, в свою очередь, эффективно решается методом последовательных приближений. После обращения по Лапласу нулевого члена асимптотики решения ИУ определяется асимптотическое решение нестационарной динамической контактной задачи. В качестве примера приводится асимптотическое решение задачи о внедрении плоского штампа в упругую полосу, лежащую без трения на жестком основании. Приводятся формулы для действующей на штамп силы упругого сопротивления среды, препятствующей внедрению штампа, получен закон внедрения штампа в упругую полосу с учетом отраженной от противоположной к штампу грани полосы и пришедшей под штамп упругой волны напряжений.

**1. Интегральные уравнения.** Нестационарные динамические контактные задачи (НДКЗ) теории упругости о внедрении жесткого штампа в упругую полосу с помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени  $t$ ) и Фурье (по продольной координате  $x$ ) [1]

$$u^L(x, y, p) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) e^{-pt} dt \quad (1.1)$$

$$u^{LF}(\alpha, y, p) = \int_{-\infty}^{\infty} u^L(x, y, p) e^{i\alpha x} dx \quad (1.2)$$

последовательно применяющихся к дифференциальным уравнениям теории упругости и граничным условиям с учетом нулевых начальных условий, приводятся к решению интегрального уравнения (ИУ) первого рода в безразмерной форме [2–5]

$$\int_{-1}^1 \varphi^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}, p\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad |x| \leq 1 \quad (1.3)$$

$$k(t, p) = \int_{\Gamma} K(\alpha, p) e^{i\alpha t} d\alpha, \quad f_0^L(x, p) = \mu a^{-1} \Delta f^L(x, p), \quad \Lambda = \frac{c_2}{ap}$$

где  $\varphi^L(\xi, p)$  – трансформанта Лапласа функции распределения искомых контактных напряжений под штампом,  $f^L(x, p)$  – изображение по Лапласу функции  $f(x, t)$ , опи-

сывающей форму штампа и закон его внедрения в упругую среду,  $\mu$  – коэффициент Ламе упругой среды,  $a$  – полуширина штампа,  $\Delta$  – некоторая постоянная, зависящая от параметра  $\beta = c_2/c_1$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  – скорости распространения продольной и поперечной упругих волн смещений и напряжений в упругой среде. Контур интегрирования  $\Gamma$  находится в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  и проходит от  $-\infty$  до  $+\infty$  под углом  $-\arg p$  к действительной оси ( $\tau = 0$ ).

Символ ядра ИУ (1.3) – функция  $K(\alpha, p)$ ; она четна по  $\alpha$  и мероморфна в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$ , где имеет по две серии счетного множества нулей и полюсов, зависящих от параметра  $p$ , при больших и малых значениях  $\alpha$  имеет следующее асимптотическое поведение:

$$K(\alpha, p) = |\alpha|^{-1} + O(|\alpha|^{-3} \exp(-2\gamma\Lambda^{-1}\sigma_2)), \quad \operatorname{Re}(\Lambda^{-1}\sigma_2) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

$$K(\alpha, p) = K(0, p) + O(\alpha^2) \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

$$\sigma^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \gamma = h/a$$

( $h$  – ширина упругой полосы).

В ИУ НДКЗ теории упругости функция  $K(\alpha, p)$  выражается отношением целых функций, являющихся линейными комбинациями экспонент

$$\exp(-\gamma\Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2)); \quad n + k = 2m; \quad m, n, k = 0, 1, 2, \dots, \quad \sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 + 1}$$

В таком случае  $K(\alpha, p)$  представляется двойным функциональным рядом

$$K(\alpha, p) = K(\alpha) + K(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} Q_{nk}(\alpha) \exp(-\gamma\Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2)) \quad (1.6)$$

$$\operatorname{Re}(\sigma_i) > 0, \quad i = 1, 2$$

где

$$Q_{00}(\alpha) \equiv 0, \quad Q_{nk}(\alpha) = 0; \quad n + k = 2m + 1; \quad m = 0, 1, 2$$

а функция  $K(\alpha)$  является символом ядра ИУ НДКЗ о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость [2, 3].

Ряд (1.6) равномерно сходится в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  с проведенными в ней разрезами от точек ветвления алгебраического типа  $\alpha = \pm i$ ,  $\alpha = \pm i\beta$  до бесконечно удаленной точки  $\pm i\infty$ . Коэффициенты этого ряда  $Q_{nk}(\alpha)$  – дробно-рациональные функции  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . При вычислении корней  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в комплексной плоскости выбор ветви определяется условием (1.6), при этом  $\sqrt{1} = 1$ .

**2. Асимптотическое решение ИУ (1.3) для больших  $p$ .** После деформации контура интегрирования  $\Gamma$  в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  в действительную ось ( $\tau = 0$ ) нулевой член асимптотики решения ИУ (1.3) для малых  $\Lambda$  (большие  $p$ ) представляется в виде суперпозиции функций [6]

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_-^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_\infty^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) \quad (2.1)$$

которые являются решениями следующих ИУ:

$$\int_{-1}^{\infty} \varphi_+^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}, p\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad -1 \leq x < \infty \quad (2.2)$$

$$\int_{-\infty}^1 \varphi_-^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}, p\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad -\infty < x \leq 1 \quad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\infty^L(\xi, p) k\left(\frac{\xi-x}{\Lambda}, p\right) d\xi = 2\pi f_0^L(x, p), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.4)$$

ИУ (2.2), (2.3) в результате замены переменных по формулам (знак плюс для (2.2), знак минус для (2.3))

$$\pm \xi = \Lambda \xi' - 1, \quad \pm x = \Lambda x' - 1, \quad \pm d\xi = \Lambda d\xi'$$

преобразуются в ИУ Винера–Хопфа [6–8] (штрихи опущены)

$$\int_0^{\infty} \varphi_{\pm}^L(\xi, p) k(\xi - x, p) d\xi = 2\pi \Lambda^{-1} f_0^L(\pm \Lambda x \mp 1, p), \quad 0 \leq x < \infty \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) после замены переменных

$$\xi = \Lambda \xi', \quad x = \Lambda x', \quad d\xi = \Lambda d\xi'$$

переходит в ИУ типа свертки на всей оси [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\infty}^L(\xi, p) k(\xi - x, p) d\xi = 2\pi \Lambda^{-1} f_0^L(\Lambda x, p), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.6)$$

Решение ИУ (2.6) получается с помощью интегрального преобразования Фурье (1.2) и дается формулой

$$\varphi_{\infty}^L(x, p) = \frac{1}{2\pi \Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0^{LF}(\alpha, p)}{K(\alpha, p)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.7)$$

Следуя общей схеме решения ИУ Винера–Хопфа (2.5) [7, 8], для определения его решения  $\varphi_{+}^L(x, p)$  на первом шаге ИУ (2.5) (для верхних знаков) доопределяется на всю действительную ось, а затем с помощью интегрального преобразования Фурье (1.2) сводится к решению функционального уравнения

$$K(\alpha, p) \varphi_{+}^{LF}(\alpha, p) = \Lambda^{-1} f_{+}^{LF}(\alpha, p) + (2\pi)^{-1} e_{-}^{LF}(\alpha, p) \quad (2.8)$$

справедливого в полосе  $\tau_{-} < \text{Im}(\alpha) < \tau_{+}$  комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$ . Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{+}^{LF}(\alpha, p) &= \int_0^{\infty} \varphi_{+}^L(\xi, p) e^{i\alpha \xi} d\xi, \quad f_{0,+}^{LF}(\alpha, p) = \int_0^{\infty} f_0^L(\Lambda x - 1, p) e^{i\alpha x} dx \\ e_{-}^{LF}(\alpha, p) &= \int_{-\infty}^0 e(x, p) e^{i\alpha x} dx \end{aligned}$$

Функция  $\varphi_{+}^{LF}(\alpha, p)$  регулярна в верхней полуплоскости ( $\text{Im}(\alpha) > \tau_{-}$ ,  $-\beta \leq \tau_{-} < 0$ ,  $\beta > 0$ ), а  $e_{-}^{LF}(\alpha, p)$  регулярна в нижней полуплоскости ( $\text{Im}(\alpha) < \tau_{+}$ ,  $0 < \tau_{+} \leq \beta$ ,  $\beta > 0$ ).

Следующим, ключевым, этапом решения функционального уравнения (2.8) является факторизация функции  $K(\alpha, p)$

$$K(\alpha, p) = K_{+}(\alpha, p) K_{-}(\alpha, p)$$

Функции  $K_{\pm}(\alpha, p)$  регулярны соответственно в верхней ( $\text{Im}(\alpha) > \tau_{-}$ ) и нижней ( $\text{Im}(\alpha) < \tau_{+}$ ,  $\tau_{+} > 0$ ) полуплоскостях. В общем случае определение  $K_{\pm}(\alpha, p)$  приводит к громоздким сингулярным квадратурам [8]. Более удобно и, как ниже будет показано, физически обоснованно функцию  $K(\alpha, p)$  в функциональном уравнении (2.8) представить в виде разложения (1.6) в полосе  $|\text{Im}(\alpha)| \leq \beta$ . Так как функции  $K(\alpha)$  [3–5] и  $Q_{nk}(\alpha) \exp(-\gamma \Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2))$  регулярны в полосе  $|\text{Im}(\alpha)| < \beta$ , то и функция  $K(\alpha, p)$  в соотношении (2.8) регулярна в этой же полосе комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$ .

Подставив ряд (1.6) в равенство (2.8), получим функциональное уравнение

$$K(\alpha)\varphi_+^{LF}(\alpha, p) = \Lambda^{-1}f_{0,+}^{LF}(\alpha, p) - K(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{nk}(\alpha, p)\varphi_+^{LF}(\alpha, p) + \frac{1}{2\pi}e_-^{LF}(\alpha, p) \quad (2.9)$$

$$M_{nk}(\alpha, p) = Q_{nk}(\alpha) \exp(-\gamma\Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2)), \quad n+k=2m, \quad m=1, 2, \dots$$

регулярное в полосе  $\tau_- < \text{Im}(\alpha) < \tau_+$ .

Так как  $K(\alpha)$  – символ ядра ИУ соответствующей НДКЗ для полуплоскости [2–5], был указан [2, 3] способ факторизации функции  $K(\alpha)$ , в основу которой положена специальная аппроксимация  $K(\alpha)$ , взятая в специальной элементарно факторизуемой форме, причем такая аппроксимация может быть осуществлена в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  с любой наперед заданной точностью [2].

Осуществив факторизацию функции  $K(\alpha)$  в уравнении (2.9)

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha) \quad (2.10)$$

и разделив затем на  $K_-(\alpha)$  левую и правую части уравнения (2.9), получим функциональное уравнение

$$K_+(\alpha)\varphi_+^{LF}(\alpha, p) = g(\alpha, p) - L(\alpha, p) + \chi_-(\alpha, p) \quad (2.11)$$

где

$$g(\alpha, p) = \frac{f_{0,+}^{LF}(\alpha, p)}{\Lambda K_-(\alpha)}, \quad L(\alpha, p) = K_+(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{nk}(\alpha, p)\varphi_+^{LF}(\alpha, p) \quad (2.12)$$

$$\chi_-(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi} \frac{e_-^{LF}(\alpha, p)}{K_-(\alpha)}$$

На следующем шаге решения задачи представим первые две функции (2.12) в виде алгебраической суммы двух функций, одна из которых регулярна в верхней, а другая – в нижней полуплоскости комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$

$$g(\alpha, p) = g_+(\alpha, p) + g_-(\alpha, p), \quad L(\alpha, p) = L_+(\alpha, p) + L_-(\alpha, p) \quad (2.13)$$

и которые можно определить по общей теореме [8]

$$g_+(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{g(\zeta, p)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \quad g_-(\alpha, p) = g(\alpha, p) - g_+(\alpha, p) \quad (2.14)$$

$$L_+(\alpha, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{L(\zeta, p)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \quad L_-(\alpha, p) = L(\alpha, p) - L_+(\alpha, p) \quad (2.15)$$

Контуры интегрирования  $\Gamma_1, \Gamma_2$  находятся в полосе регулярности уравнения (2.9).

Подставив выражения (2.14), (2.15) в уравнение (2.11) и группируя в разных частях неравенства функции, регулярные в нижней и верхней полуплоскостях, получим новое равенство

$$K_+(\alpha)\varphi_+^{LF}(\alpha, p) - g_+(\alpha, p) + L_+(\alpha, p) = g_-(\alpha, p) - L_-(\alpha, p) + \chi_-(\alpha, p) = F(\alpha, p) \quad (2.16)$$

Левая часть двойного равенства (2.16) определяет функцию, регулярную в верхней полуплоскости ( $\text{Im}(\alpha) > \tau_-$ ), средняя часть – функцию, регулярную в нижней полуплоскости ( $\text{Im}(\alpha) < \tau_+$ ). Вместе они определяют некоторую функцию  $F(\alpha, p)$ , регулярную в полосе  $\tau_- < \text{Im}(\alpha) < \tau_+$ . Предполагая, что  $\varphi_+^{LF}(\alpha, p) \approx \alpha^{-1/2}$  ( $|\alpha| \rightarrow \infty$ ) и учитывая, что функции  $K_{\pm}(\alpha)$ ,  $g_{\pm}(\alpha, p)$ ,  $L_{\pm}(\alpha, p)$  – убывающие при  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , заключаем, что по теореме Лиувилля [9] рассматриваемая функция  $F(\alpha, p)$  в комплексной плоскости

тождественно равна нулю. В этом случае из двойного равенства (2.16) получаем два уравнения для определения трансформант  $\varphi_+^{LF}(\alpha, p)$  и  $e_-^{LF}(\alpha, p)$

$$\varphi_+^{LF}(\alpha, p) = \frac{g_+(\alpha, p)}{K_+(\alpha)} - \frac{L_+(\alpha, p)}{K_+(\alpha)}, \quad g_-(\alpha, p) - L_-(\alpha, p) + \frac{1}{2\pi} \frac{e_-^{LF}(\alpha, p)}{K_-(\alpha)} = 0 \quad (2.17)$$

Учитывая после этого формулы (2.15), для определения  $\varphi_+^{LF}(\alpha, p)$  получим ИУ второго рода

$$\varphi_+^{LF}(\alpha, p) = \frac{g_+(\alpha, p)}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i K_+(\alpha)} \int_{\Gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{nk}(\zeta, p) K_+(\zeta) \frac{\varphi_+^{LF}(\zeta, p)}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (2.18)$$

в котором контур интегрирования  $\Gamma$  находится в полосе регулярности функционального уравнения (2.16),  $\alpha$  лежит в верхней полуплоскости. Если  $\alpha \in \Gamma$ , то (2.18) – сингулярное ИУ второго рода [8, 10], в котором интеграл в правой части понимается в смысле главной части по Коши. Введя обозначения

$$\Omega(\alpha, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} M_{nk}(\alpha, p), \quad \varphi_{0+}^{LF}(\alpha, p) = K_+(\alpha) \varphi_+^{LF}(\alpha, p) \quad (2.19)$$

получим ИУ вида

$$\varphi_{0+}^{LF}(\alpha, p) = g_+(\alpha, p) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(\zeta, p) \frac{\varphi_{0+}^{LF}(\zeta, p)}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (2.20)$$

Ряд в правой части первого равенства (2.19) равномерно сходится в комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  с проведенными в ней разрезами, описанными в разд. 1, его сумма  $\Omega(\alpha, p)$  является функцией, непрерывной в области сходимости ряда, и для нее справедлива оценка

$$|\Omega(u, p)| \leq M e^{-2\gamma\Lambda^{-1}\beta}, \quad M > 0, \quad u \in \Gamma \quad (2.21)$$

В этом случае при  $\varphi_{0+}^{LF}(\alpha, p) \in L_q(\Gamma)$  ( $1 < q < \infty$ ) для сингулярного оператора из правой части ИУ (2.20)

$$S(\Omega\varphi_{0+}^{LF}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega(\zeta, p) \frac{\varphi_{0+}^{LF}(\zeta, p)}{\zeta - \alpha} d\zeta \quad (2.22)$$

получим оценку

$$\|S(\Omega\varphi_{0+}^{LF})\| \leq A_q e^{-2\gamma\Lambda^{-1}\beta} \|\varphi_{0+}^{LF}\|, \quad A_q > 0 \quad (2.23)$$

из которой следует, что оператор  $S$  является ограниченным и отображает  $L_q(\Gamma)$  ( $1 < q < \infty$ ) на себя [8, 10]; через  $\|\cdot\|$  обозначена норма в пространстве  $L_q(\Gamma)$  ( $1 < q < \infty$ ).

На основании оценки (2.23) можно подобрать такие  $\gamma, \Lambda$ , что при больших  $p$

$$\|S\|_{L_q} < 1 \quad (2.24)$$

а решение  $\varphi_{0+}^{LF}(\alpha, p)$  из ИУ (2.20) может быть получено методом последовательных приближений [11], причем полученное таким образом решение будет единственным.

Возвращаясь к ИУ (2.20), образуем итерационную схему метода последовательных приближений решения этого ИУ для определения  $\varphi_+^{LF}(\alpha, p)$

$$\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p) = \varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) - \frac{1}{2\pi i K_+(\alpha)} \int_{\Gamma} \omega(\zeta, p) \frac{\varphi_{+,m}^{LF}(\zeta, p)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

$$\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) = \frac{g_+(\alpha, p)}{K_+(\alpha)}, \quad \omega(\zeta, p) = \Omega(\zeta, p) K_+(\zeta)$$

Для выяснения структуры решения ИУ (2.20) или (2.18), получающейся в результате применения метода последовательных приближений, положим в выражении (2.25)  $m = 0$ . Получим

$$\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p) = \varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) + \Delta\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) \quad (2.26)$$

$$\Delta\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) = -\frac{1}{2\pi i K_+(\alpha)} \int_{\Gamma_1} \omega(\zeta_1, p) \frac{\varphi_{+,0}^{LF}(\zeta_1, p)}{\zeta_1 - \alpha} d\zeta_1$$

причем  $\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p)$  не содержит экспонент вида

$$\exp(-\gamma\Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2)), \quad n + k = 2m, \quad m, n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

тогда как подынтегральная функция в  $\Delta\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p)$  содержит бесконечный функциональный ряд по экспонентам (2.27)  $\omega(\zeta_1, p)$  при  $n + k = 2, 4, 6, \dots$ . Контур  $\Gamma_1$  расположен в полосе регулярности уравнения (2.16).

Полагая теперь  $m = 1$ , при учете первого выражения (2.26) получим

$$\varphi_{+,2}^{LF}(\alpha, p) = \varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p) + \Delta\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p) \quad (2.28)$$

$$\Delta\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p) = \frac{1}{(2\pi i)^2 K_+(\alpha)} \int_{\Gamma_1} \frac{\omega(\zeta_1, p)}{\zeta_1 - \alpha} d\zeta_1 \int_{\Gamma_2} \frac{\omega(\zeta_2, p)}{\zeta_2 - \zeta_1} \Delta\varphi_{+,0}^{LF}(\zeta_2, p) d\zeta_2,$$

причем  $\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$  содержит экспоненты вида (2.27), тогда как  $\Delta\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$  также содержит бесконечное множество таких экспонент за счет произведения двойных рядов  $\omega(\zeta_1, p)$  и  $\omega(\zeta_2, p)$ . Это означает, что члены ряда с  $\exp(-\gamma\Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2))$  при  $n + k = 2$ , содержащиеся в  $\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$ , не будут уточняться экспонентами, содержащимися в  $\Delta\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$ , так как для них  $n + k = 4, 6, \dots$ . Все члены ряда с экспонентами в  $\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$ , для которых  $n + k = 4, 6, \dots$ , будут уточнены членами ряда с экспонентами, содержащимися в  $\Delta\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$ . Контур  $\Gamma_1, \Gamma_2$  лежат в полосе регулярности (2.16).

Продолжая процесс итераций (2.25), получим на  $m$ -м шаге

$$\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p) = \varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p) + \Delta\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p) \quad (2.29)$$

$$\Delta\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p) = \frac{(-1)^{m+1}}{K_+(\alpha)(2\pi i)^{m+1}} \int_{\Gamma_1} \frac{\omega(\zeta_1, p)}{\zeta_1 - \alpha} d\zeta_1 \int_{\Gamma_2} \frac{\omega(\zeta_2, p)}{\zeta_2 - \zeta_1} d\zeta_2 \dots \int_{\Gamma_{m+1}} \frac{\omega(\zeta_{m+1}, p)}{\zeta_{m+1} - \zeta_m} \times \\ \times \Delta\varphi_{+,0}^{LF}(\zeta_{m+1}, p) d\zeta_{m+1}$$

причем  $\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p)$  содержит члены ряда с экспонентами вида (2.27) при условии  $n + k = 2, 4, 6, \dots, 2m, 2m + 2$ , а  $\Delta\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p)$  содержит бесконечное количество членов с экспонентами (2.27) за счет произведения двойных рядов  $\omega(\zeta_1, p), \omega(\zeta_2, p) \dots \omega(\zeta_{m+1}, p)$  в  $(m + 1)$ -кратном интеграле, для которых  $n + k = 2m + 4, 2m + 6, \dots$ . Это означает, что члены ряда с экспонентами вида (2.27) с  $n + k = 2, 4, 6, \dots, 2m, 2m + 2$  не будут уточняться членами ряда с экспонентами, содержащимися в  $\Delta\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p)$ , для которых  $n + k = 2m + 4, 2m + 6, \dots$ . Все члены ряда с экспонентами в  $\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p)$ , для которых  $n + k = 2m + 2, 2m + 4, \dots$ , будут уточнены членами ряда с экспонентами, содержащимися в  $\Delta\varphi_{+,m}^{LF}(\alpha, p)$ . Контур  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{m+1}$  находятся в полосе регулярности (2.16).

Из сказанного следует, что  $(m + 1)$ -е приближение  $\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p)$  к решению  $\varphi_+^{LF}(\alpha, p)$  уравнения (2.16) содержит члены с экспонентами (2.27), где  $n + k = 2, 4, \dots, 2m, 2m + 2$ , не изменяющиеся вместе с коэффициентами при них при дальнейших итерациях.

Последнее обстоятельство приводит к тому, что при определении решения  $\varphi_{+,m+1}^L(x, p)$  в разложении  $K(\alpha, p)$  (1.6) можно ограничиться тем количеством экспонент, для которых  $n + k \leq 2m + 2$ , т.е.

$$K(\alpha, p) = K(\alpha) + K(\alpha) \sum_{n=0}^{2m+2} \sum_{k=0}^{2m+2-n} Q_{nk}(\alpha) \exp(-\gamma \Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2)) \quad (2.30)$$

$$Q_{00}(\alpha) = 0, \quad Q_{nk}(\alpha) = 0 \quad \text{для} \quad n + k = 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Кроме этого, нетрудно показать, что коэффициенты при такого типа экспонентах в решении  $\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p)$  будут того же порядка точности по  $\alpha$ , что и нулевой член решения  $\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p)$ . Забегая вперед, можно сказать, что, с физической точки зрения, решение  $\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p)$ , содержащее члены с экспонентами (2.27) при  $n + k = 2, 4, \dots, 2m, 2m + 2$ , является математическим описанием в изображениях Лапласа–Фурье  $m + 1$  переотражений упругой волны напряжений, порожденной внедрением штампа и отраженной  $m + 1$  раз противоположной (по отношению к штампу) гранью упругой полосы и пришедшей под штамп.

За приближенное решение ИУ (2.5)  $\varphi_+^L(x, p)$  берется  $(m + 1)$ -е приближение  $\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p)$  метода последовательных приближений решения уравнения (2.18), после его обращения по Фурье

$$\varphi_{+,m+1}^L(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

причем  $\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p)$  дается формулой (2.29).

В качестве приближенного решения  $\varphi_-^L(x, p)$  ИУ (2.5) берется функция  $\varphi_{-,m+1}^{LF}(\alpha, p)$ , определенная по той же схеме, что и  $\varphi_{+,m+1}^{LF}(\alpha, p)$ , при реализации которой  $f_{0,+}(\alpha, p)$  в уравнении (2.8) определяется формулой

$$f_{0,+}(\alpha, p) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^L(-\Lambda x + 1, p) e^{i\alpha x} dx$$

после обращения ее по Фурье (2.31), где вместо индекса плюс нужно поставить индекс минус.

Нулевой член асимптотического решения ИУ (1.3)  $\varphi^L(x, p)$  для больших  $p$ , содержащий описание  $m + 1$  переотражений упругой волны напряжений, пришедшей под штамп, строится по формуле (2.1) с указанием количества  $m + 1$  переотражений в виде индекса

$$\varphi_{m+1}^L(x, p) = \varphi_{+,m+1}^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_{-,m+1}^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_{\infty,m+1}^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right) \quad (2.32)$$

причем функция  $\varphi_{\pm,m+1}^L(x, p)$  дается формулой (2.29), а  $\varphi_{\infty,m+1}^L(x, p)$  – формулой (2.7).

**3. Решение нестационарных динамических контактных задач.** Для определения асимптотического решения НДКЗ для упругой полосы достаточно получить обратное преобразование Лапласа от полученного в предыдущем разделе решения ИУ НДКЗ

(1.3) функции  $\varphi_{m+1}^L(x, p)$ , данное формулой (2.32). В результате получим функцию, определяющую контактные напряжения, возникшие под штампом при  $0 < t < 2(m+2)h/c_1$ , в виде

$$\varphi_{m+1}(x, t) = \varphi_{+,m+1}\left(\frac{a(1+x)}{c_2}, t\right) + \varphi_{-,m+1}\left(\frac{a(1-x)}{c_2}, t\right) - \varphi_{\infty,m+1}\left(\frac{ax}{c_2}, t\right) \quad (3.1)$$

Функции в правой части этого выражения являются оригиналами соответствующих функций, стоящих в правой части равенства (2.32).

**4. Решение одной НДКЗ для упругой полосы.** Для демонстрации вышеизложенного метода решения нестационарных динамических контактных задач рассматривается НДКЗ о внедрении жесткого штампа ширины  $2a$  ( $|x| \leq a, y = 0$ ) в упругую полосу толщины  $h$  ( $-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq h$ ), опирающуюся на гладкое жесткое основание ( $-\infty < x < \infty, h \leq y < \infty$ ). В начальный момент времени  $t = 0$  скорость внедрения штампа  $v_0$ , погонная масса штампа  $m$ , силы трения в зоне контакта отсутствуют. Форма штампа и закон его движения в упругой среде определяются функцией  $f(x, t)$  ( $t > 0, x \leq a$ ) (фигура).

В начальный момент времени упругая полоса находится в покое и потому смещения упругой среды  $u = u(x, y, t)$  и  $v = v(x, y, t)$  при  $t = 0$  и их скорости принимаются равными нулю. Граничные условия такой задачи в общепринятых обозначениях теории упругости [12] имеют вид ( $t > 0$ )

$$v(x, 0, t) = f(x, t) \quad (|x| \leq a), \quad \sigma_{yy}(x, 0, t) = 0 \quad (a < |x| < \infty) \quad (4.1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0, t) = v(x, h, t) = \tau_{xy}(x, h, t) = 0 \quad (|x| < \infty)$$

где  $\sigma_{yy}, \tau_{xy}$  – нормальные и касательные напряжения.

С помощью интегральных преобразований Лапласа (1.1) и Фурье (1.2), последовательно применяемых к уравнениям теории упругости в перемещениях [12] и к смешанным граничным условиям (4.1) при учете нулевых начальных условий, решение поставленной НДКЗ сводится к ИУ (1.3), где

$$\Delta = 2(1 - \beta^2) \quad (4.2)$$

$$K(\alpha, p) = 2(1 - \beta^2)\sigma_2 R^{-1}(\alpha, p)$$

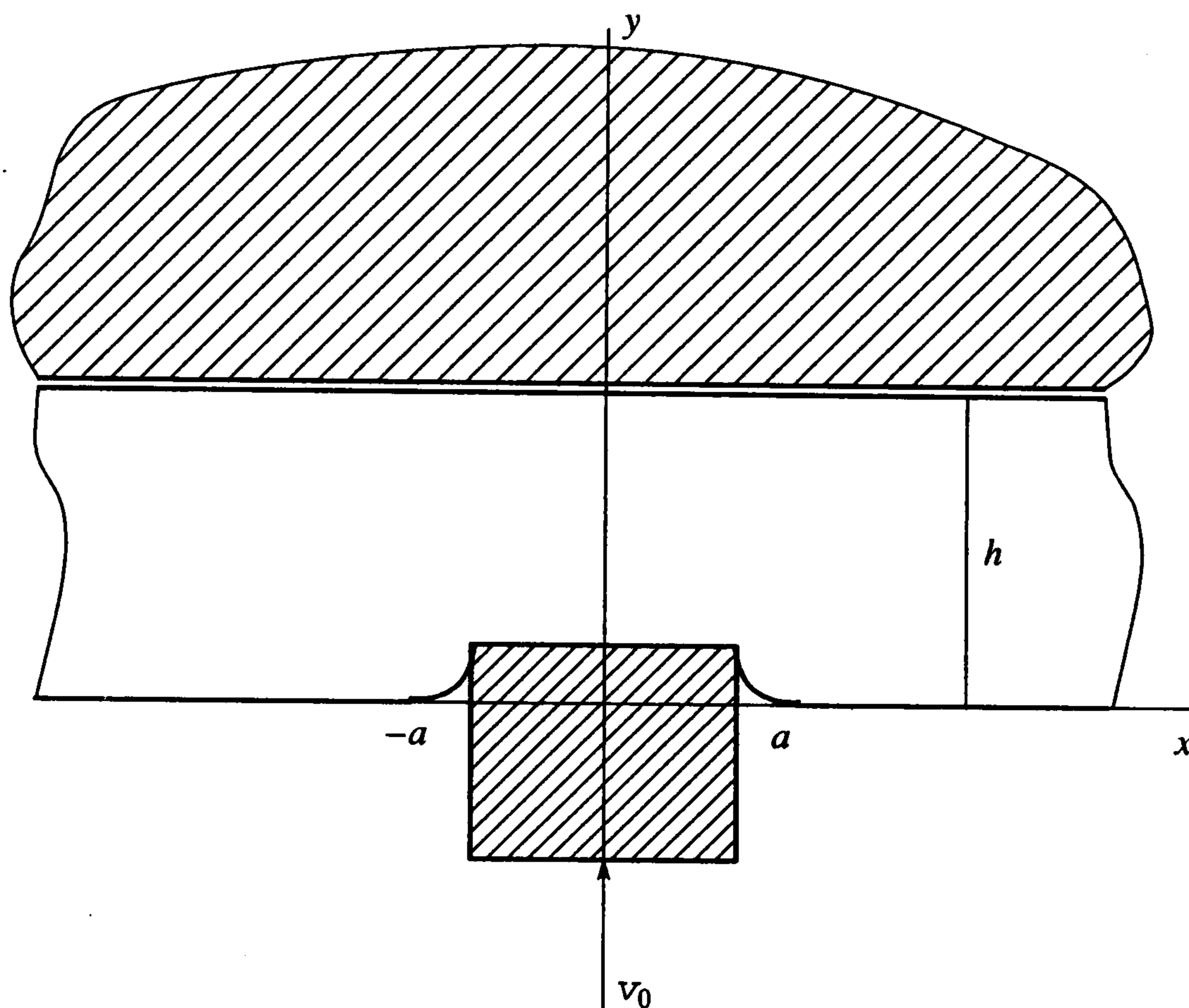
$$R(\alpha, p) = (2\alpha^2 + 1)^2 \operatorname{ctg}(\gamma\Lambda^{-1}\sigma_2) - 4\alpha^2\sigma_1\sigma_2 \operatorname{ctg}h(\gamma\Lambda^{-1}\sigma_1)$$

Функция  $K(\alpha, p)$  вида (4.2) обладает всеми свойствами, перечисленными в разд. 1, и представляется в виде разложения (1.6), а с гарантированным присутствием в разложении  $K(\alpha, p)$  конечного числа членов, показатели экспонент  $n + k$  которых не превышали бы заранее указанной величины  $2(m+1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), в виде (2.33), используемом при реализации метода решения ИУ (1.3) (здесь и в дальнейшем число  $n + k$  для удобства изложения будем называть показателем экспонент:  $\exp(-\gamma\Lambda^{-1}(n\sigma_1 + k\sigma_2))$ ).

Для функции  $K(\alpha, p)$  из (4.2) коэффициенты  $Q_{nk}(\alpha)$  ( $n, k = 0, 1, 2, \dots$ ) разложения (1.6), (2.30) для четных  $n + k = 2(m+1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) определяются следующими формулами:

для  $n + k = 2$

$$Q_{02}(\alpha) = -2R_1 R^{-1}, \quad Q_{20}(\alpha) = 2R_2 R^{-1}, \quad Q_{11}(\alpha) = 0 \quad (4.3)$$



для  $n + k = 4$

$$Q_{04}(\alpha) = 2R_1(R_1 + R_2)R^{-2}, \quad Q_{40}(\alpha) = 2R_2(R_1 + R_2)R^{-2} \quad (4.4)$$

$$Q_{22}(\alpha) = -8R_1R_2R^{-2}, \quad Q_{31}(\alpha) = Q_{13}(\alpha) = 0$$

где

$$R_1 = (2\alpha^2 + 1)^2, \quad R_2 = 4\alpha^2\sigma_1\sigma_2, \quad R = R_1 - R_2, \quad \sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (4.5)$$

При этом в разложении (1.6), (2.30) для  $K(\alpha, p)$  из (4.2)  $Q_{00}(\alpha) = 0$ ,  $Q_{nk}(\alpha) = 0$  для  $n + k = 2m - 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ).

Для получения разложения функции  $K(\alpha, p)$  вида (2.30) можно использовать различные приемы. Укажем один из наиболее простых с технической стороны прием. Для простоты дальнейшего изложения введем новые обозначения

$$A = K(\alpha, p), \quad B = K(\alpha), \quad D = g(\alpha, p)$$

Функция  $K(\alpha, p)$  вида (4.2) представляется в виде соотношения

$$A = B - DA \quad (4.6)$$

$$B = \Delta\sigma_2R^{-1}(\alpha), \quad \Delta = 2(1 - \beta^2)$$

$$D = R_1R^{-1}(\text{ctg } \sigma_2^0 - 1) - R_2R^{-1}(\text{ctg } \sigma_1^0 - 1), \quad \sigma_i^0 = \gamma\Lambda^{-1}\sigma_i, \quad i = 1, 2$$

которое легко проверяется, а  $R_1, R_2, R$  определены формулами (4.5).

В правую часть равенства (4.6) подставим вместо  $A$  его выражение из (4.6), получим

$$A = B - D(B - DA) = B - BD + D^2A$$

Подставляя затем в правую часть последнего равенства вместо  $A$  его выражение из (4.6) и продолжая далее такие итерации, получим на  $m$ -м шаге процесса следующее соотношение:

$$A = B - B \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j+1} D^j + (-1)^{m+2} D^{m+2} A, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Экспоненты  $\exp(-(n\sigma_1^0 + k\sigma_2^0))$  в (4.7) содержатся только в  $D$  и  $A$ , причем последнее слагаемое в правой части (4.7) содержит экспоненты, показатели которых  $n + k \geq 2(m + 2)$ , что нетрудно показать, если воспользоваться формулой

$$(\operatorname{cth} z - 1)^l = 2^l \sum_{j=l}^{\infty} C_{j-l}^{l-1} \exp(-2jz), \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (4.8)$$

при возведении в степень  $m + 2$  выражения для  $D$  в (4.7). На этом основании указанное последнее слагаемое необходимо отбросить, так как в разложении  $K(\alpha, p)$  вида (2.30) требуется сохранить члены с экспонентами, показатели которых  $n + k \leq 2(m + 1)$ , тем более что при дальнейших итерациях в этом случае последнее слагаемое уже не может уточнить члены разложения с показателем экспонент  $n + k \leq 2(m + 1)$ . Произведение  $B$  на выражение со знаком суммы в (4.7) содержит как члены разложения, показатели экспонент которых  $n + k \leq 2(m + 1)$ , так и экспоненты с показателями  $n + k \geq 2(m + 2)$ , получающиеся после возведения в степень  $(\operatorname{cth} \sigma_i^0 - 1)^l$  по формуле (4.8) в  $D$ . Экспоненты с показателем  $n + k \geq 2(m + 2)$  отбрасываются и в указанном произведении в связи с тем, что коэффициенты при экспонентах в этом произведении с показателем  $n + k \geq 2(m + 2)$  не могут быть уточнены при  $m$  итерациях процесса в (4.7) экспонентами из последнего слагаемого, показатели экспонент которого  $n + k \geq 2(m + 2)$ . Для их уточнения необходимо увеличить количество итераций  $m$ .

Рассмотрим описанный процесс представления  $K(\alpha, p)$  в виде разложения (2.30) более детально.

В случае  $m = 0$  формула (4.7) приобретает вид

$$A = B - B \sum_{j=1}^1 (-1)^{j+1} D^j + D^2 A$$

Для сохранения в разложении  $K(\alpha, p)$  вида (2.30) членов с экспонентами, показатели которых  $n + k \leq 2$ , последнее слагаемое  $D^2 A$  отбрасывается, так как содержит экспоненты с показателем  $n + k \geq 4$ . В результате получаем соотношение

$$A = B - BD$$

которое в обозначениях ИУ имеет вид

$$K(\alpha, p) = K(\alpha) - K(\alpha)[R_1 R^{-1} S_2 - R_2 R^{-1} S_1], \quad S_i = \operatorname{cth} \sigma_i^0 - 1, \quad i = 1, 2$$

Заменяя  $S_i$  по формуле (4.8) при  $l = 1$ , сохраняя в разложениях экспоненты с показателем  $n + k \leq 2$ , т.е. заменяя  $S_i \Rightarrow 2 \exp(-2\sigma_i^0)$ , записываем разложение (2.30) для  $K(\alpha, p)$  при  $n + k \leq 2$  в виде соотношения, коэффициенты при экспонентах в котором совпадают с соответствующими коэффициентами  $Q_{nk}(\alpha)$  при экспонентах в разложении (2.30), представленными формулами (4.3).

В случае  $m = 1$  соотношение (4.7) представляется в виде

$$A = B - B(D^1 - D^2) + D^3 A$$

На том же основании, что и в предыдущем случае, отбрасывается последнее слагаемое и после перехода к обозначениям ИУ, получается в развернутой форме

$$K(\alpha, p) = K(\alpha) - K(\alpha) \left[ (R_1 R^{-1} S_2 - R_2 R^{-1} S_1)^1 - (R_1 R^{-1} S_2 - R_2 R^{-1} S_1)^2 \right]$$

Заменяя в последнем равенстве

$$S_i \Rightarrow 2 \exp(-2\sigma_i^0) + 2 \exp(-4\sigma_i^0), \quad S_i^2 \Rightarrow 4 \exp(-4\sigma_i^0)$$

что требуется для выполнения условия  $n + k \leq 4$ , получим, что  $K(\alpha, p)$  при  $m = 1$  принимает вид разложения (2.30), коэффициенты при экспонентах которого совпадают с соответствующими  $Q_{nk}(\alpha)$  разложения (2.30) и представленными формулами (4.4) при  $n + k = 4$ .

Отметим, что для получения разложения вида (2.30) функции  $K(\alpha, p)$  с помощью методики, основанной на итерировании соотношения (4.6) с гарантированным присутствием в этом разложении членов с экспонентами, показатель которых  $n + k \leq 2(m + 1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), необходимо для получения ключевого соотношения (4.7) произвести ровно  $m$  итераций в (4.6).

Полученные выше формулы представления функции  $K(\alpha, p)$  (4.2) в виде (2.30) обобщаются формулой

$$K(\alpha, p) = K(\alpha) + K(\alpha) \sum_{j=1}^{m+1} \left[ 2 \sum_{k=1}^{m_*} q_k(\alpha, p) \right]^j, \quad m_* = \left[ \frac{m+1}{j} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

где

$$q_k(\alpha, p) = R_2 R^{-1} \exp(-b_k \sigma_1) - R_1 R^{-1} \exp(-b_k \sigma_2), \quad \operatorname{Re}(\Lambda^{-1} \sigma_i) > 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.10)$$

$$b_k = 2k\gamma\Lambda^{-1}$$

указывающей правило получения представления  $K(\alpha, p)$  в виде (2.30) для любого наперед заданного числа членов с гарантированным присутствием в нем членов с экспонентами, показатель которых  $n + k \leq 2(m + 1)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Теперь выпишем решение ИУ (1.3) рассматриваемой НДКЗ для случая одного переотражения упругой волны от верхней грани и пришедшей под штамп. Символ ядра ИУ (1.3) функция  $K(\alpha, p)$  в этом случае дается формулой (4.8). Нулевой член асимптотического решения ИУ (1.3) выписывается по формуле (2.32) при  $m = 0$ .

Для случая плоского штампа, когда  $f(x, t) = f(t)$  ( $t > 0$ ), функция  $\varphi_{-,1}^L(x, p) = \varphi_{+,1}^L(x, p)$  определяется по формуле (2.31) при  $m = 0$  как обратное преобразование Фурье от функции  $\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p)$ , которая дается формулой (2.26) и после вычисления содержащихся там квадратур в рассматриваемом случае принимает вид

$$\varphi_{+,1}^{LF}(\alpha, p) = \varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) + \sum_{k=1}^1 2\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) \exp(-b_k \beta) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty L_k(\xi, p) \psi_{+,0}^{LF}(\xi, \alpha, p) d\xi \quad (4.11)$$

$$\varphi_{+,0}^{LF}(\alpha, p) = -\frac{\xi^2 - \alpha^2}{2i} \psi_{+,0}^{LF}(\xi, \alpha, p) = -\frac{1}{\Lambda} \frac{f^L(p)}{K_-(0)i\alpha K_+(\alpha)}$$

$$L_k(\xi, p) = q_k(\xi, p) + \exp(-b_k \beta)$$

причем  $q_k(\xi, p)$ ,  $b_k$  даются формулами (4.10),  $f^L(p)$  – трансформанта Лапласа функции  $f(t)$ , знак суммы по существу символически отделяет структуру новой волны под штампом, образовавшейся в результате прихода под штамп отраженной от противоположной грани полосы упругой волны напряжений.

Обратное преобразование Фурье функции  $\Phi_{+1}^{LF}(\alpha, p)$  (4.11) имеет вид

$$\Phi_{+1}^{LF}(x, p) = \Phi_{+0}^{LF}(x, p) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\Phi_{+0}^{LF}(x, p) \exp(-b_k \beta) - \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} L_k(\xi, p) \Psi_{+0}^{LF}(x, p, \xi) d\xi \quad (4.12)$$

$$\Phi_{+0}^{LF}(x, p) = \theta_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_1(\xi, x) d\xi}{\xi} + \theta_1 \int_{\beta}^{\infty} \frac{X_2(\xi, x) d\xi}{\xi} + \frac{K_+(0)}{\pi} \right]$$

$$\Psi_{+0}^{LF}(x, p, \xi) = -\theta_0 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_1(\xi, x)}{\xi_2 + \xi_2} d\xi + \theta_1 \int_{\beta}^{\infty} \frac{X_2(\xi, x)}{\xi_2 + \xi_2} d\xi \right]$$

$$X_1(\xi, x) = r(\xi) \exp \left( \frac{1}{2} d_0 (\sqrt{\xi} - \beta - \sqrt{\xi - 1})^2 \right) \exp(-x\xi)$$

$$X_2(\xi, x) = r(\xi) \exp(d_0 \xi) \cos(d_0 (\sqrt{\xi} - \beta \sqrt{1 - \xi}) \exp(-x\xi))$$

$$\theta_0 = \frac{1}{\pi} \frac{f_L(p)}{K_-(0)}, \quad \theta_1 = \exp \left( -\frac{1}{2} d_0 (1 + \beta) \right), \quad r(\xi) = \frac{\xi - \eta_0}{\sqrt{\xi} - \beta}$$

При получении формул (4.11) использовалась аппроксимация функции  $K(\alpha)$  из соотношения (4.6) наиболее простого вида [2, 3]

$$K(\alpha) = \frac{\alpha^2 + \eta_0^2}{2} \exp \left[ \frac{1}{2} d_0 (M_+(\alpha) + M_-(\alpha)) \right], \quad M_{\pm}(\alpha) = (\sqrt{\beta \pm i\alpha} - \sqrt{1 \pm i\alpha})^2$$

в которой постоянная  $d_0$  определяется из условия совпадения этой аппроксимации и символа ядра  $K(\alpha)$  при  $\alpha = 0$

$$d_0 = (1 - \sqrt{\beta})^{-2} \ln[K(0)\eta_0^2 \beta^{-1}]$$

а  $\pm i\eta_0$  — полюсы Релея, определяемые из уравнения  $R(\alpha) = 0$ , функция  $R(\alpha)$  определена формулами (4.5). В условиях такой аппроксимации имеем

$$K_{\pm}(\alpha) = \frac{\sqrt{\beta \pm i\alpha}}{2} \exp \left[ \frac{1}{2} d_0 \pm M(\alpha) \right]$$

примем  $K_+(\alpha) = K_-(-\alpha)$ . Другие свойства  $K_{\pm}(\alpha)$  указаны ранее [2, 3].

Функция  $\Phi_{+1}^{LF}(x, p)$  является решением ИУ (2.6), в котором удерживаются стационарные, описывающие одно отражение упругой волны от верхней грани полосы, и в рассматриваемом случае плоского штампа дается формулой, полученной из выражения (2.7),

$$\Phi_{+1}^{LF}(x, p) = \pi \theta_0 \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-b_k \beta) \right) \quad (4.13)$$

Эту формулу можно получить из решения ИУ (2.6) методом последовательных приближений по схеме, близкой к описанной при решении ИУ (2.5).

Определив, таким образом, асимптотическое решение ИУ (1.3) формулами (2.32) при  $m = 0$ , (4.12), (4.13), для определения решения рассматриваемой ИДКЗ достаточно взять обратное преобразование Лапласа от функции (2.32) при  $m = 0$  с учетом выражений (4.12), (4.13), которое записывается в виде

$$\Phi(x, t) = \Phi_{+1}(x, t) \left( \frac{a(1+x)}{c_2} \right)^t + \Phi_{-1}(x, t) \left( \frac{a(1-x)}{c_2} \right)^t - \Phi_{\infty} \left( \frac{ax}{c_2}, t \right), \quad |x| \leq 1, \quad 0 < t < 4h/c_1 \quad (4.14)$$

$$\Phi_{\pm 1}(u, t) = \Phi_{\pm 0}(u, t) H(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [2\Phi_{\pm 0}(u, t - t_{k1}) - \Psi_{\pm 0}(u, t)] H(t - t_{k1}) \quad (4.15)$$

$$\varphi_{\pm,0}(u,t) = \mu\Delta_0 \left[ \frac{d}{dt} \int_{t_{x1}}^t f_1(u,\tau) f(t-\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_{t_{x1}}^{t_{x2}} f_2(u,\tau) f(t-\tau) d\tau + \frac{1}{K_+(0)} (f'(t) + f(0)) \right]$$

$$f_1(u,t) = m(u,t) \exp\left( \frac{d_0(1-\beta)^2 u}{2(\sqrt{t-\beta u} + \sqrt{t-u})^2} \right) \quad (4.16)$$

$$f_2(u,t) = m(u,t) \exp\left( -\frac{1}{2} d_0(1+\beta) + d_0 \frac{t}{u} \right) \cos\left( d_0 \frac{\sqrt{t-\beta u} \sqrt{u-t}}{u} \right)$$

$$m(u,t) = \frac{t - \eta_0 u}{\pi t \sqrt{u(t-\beta u)}}$$

$$\psi_{\pm,0}(u,t) = \mu\Delta_0 \frac{d}{dt} \int_{t_{k1}}^t \left[ G(u,\tau) + g\left( \frac{\tau - t_{k1}}{u} \right) \right] f(t-\tau) d\tau \quad (4.17)$$

$$G(u,t) = \frac{1}{\pi^2 u} \left[ H(\xi_{12}^* - 1) \int_0^{\xi_{12}} T_{211}(t,\xi) d\xi - H(\xi_{11}^* - 1) \int_0^{\xi_{11}} T_{112}(t,\xi) d\xi + \right. \\ \left. + (H(\xi_{12}^* - 1) - H(\xi_{22}^* - 1)) \int_{\xi_{22}}^{\xi_{12}} T_{221}(t,\xi) d\xi - (H(\xi_{11}^* - 1) - H(\xi_{21}^* - 1)) \int_{\xi_{21}}^{\xi_{11}} T_{122}(t,\xi) d\xi \right]$$

$$\xi_{ij} = \frac{\sqrt{(t - uc_2/c_i)^2 - t_{kj}^2}}{t_{k2}}, \quad \xi_{ij}^* = \frac{t - uc_2/c_i}{t_{kj}}, \quad i, j = 1, 2$$

$$T_{ijn}(t,\xi) = \frac{R_i(\xi)}{R(\xi)} F_j(\theta_n(t,\xi), \xi), \quad \theta_n(t,\xi) = \frac{t - \sigma_n t_{k2}}{t_{k2}}, \quad i, j, n = 1, 2$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\xi^2 + 1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\xi^2 + \beta^2}$$

$$F_1(\zeta, \xi) = \frac{\zeta g_1(\zeta)}{\zeta^2 + \xi^2}, \quad F_2(\zeta, \xi) = \frac{\zeta g_2(\zeta)}{\zeta^2 + \xi^2}$$

$$2\pi g(\zeta) = H(\zeta - 1)g_1(\zeta) + (H(\zeta - \beta) - H(\zeta - 1))g_2(\zeta)$$

$$g_1(\zeta) = \frac{r(\zeta)}{\zeta} \exp\left( \frac{1}{2} d_0 (\sqrt{\zeta - \beta} - \sqrt{\zeta - 1})^2 \right)$$

$$g_2(\zeta) = \frac{r(\zeta)}{\zeta} q(\zeta) \cos\left( d_0 \sqrt{\zeta - \beta} \sqrt{1 - \zeta} \right)$$

$$q(\zeta) = \exp\left( -\frac{1}{2} d_0(1+\beta) + d_0 \zeta \right)$$

$$\varphi_{\infty,1}(u,t) = \mu\Delta_1 \left[ f'(t) + f(0) + 2 \sum_{k=1}^1 (f'(t - t_{k1}) + f(t_{k1})) \right] \quad (4.18)$$

$$\Delta_0 = \Delta / (c_2 K_-(0)), \quad \Delta_1 = \Delta / (c_2 K(0)), \quad \Delta = 2(1 - \beta^2)$$

$$K_-(0) = \sqrt{K(0)}, \quad K(0) = 2\beta(1 - \beta^2), \quad t_{xi} = a(1+x)/c_i, \quad t_{ki} = 2kh/c_i, \quad i = 1, 2$$

Функции  $R_1(\xi)$ ,  $R_2(\xi)$ ,  $R(\xi)$  даны формулами (4.5), функция  $r(\zeta)$  определена последней формулой (4.12).

В наиболее простом случае, когда перемещение штампа задается формулой  $f(t) = f_0 H(t)$ , где  $H(t)$  — функция Хевисайда, что соответствует мгновенному внедрению

плоского штампа в полосу, решение рассматриваемой НДКЗ (4.14)–(4.18) принимает наиболее простой вид, где

$$\varphi_{\pm,0}(u,t) = \mu\Delta_0 f_0 \left[ f_1(u,t)H(t-t_{x1}) + f_2(u,t)(H(t-t_{x1}) - H(t-t_{x2})) + \frac{\delta(t)}{K_+(0)} \right]$$

$$\psi_{\pm,0}(u,t) = \mu\Delta_0 f_0 [G(u,t) + g(u,t-t_{k1})]H(t-t_{k1})$$

$$\varphi_{\infty,1}(x,t) = \mu\Delta_1 f_0 \left[ \delta(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t-t_{k1}) \right]$$

а  $\varphi_{\pm,1}(x,t)$  вычисляется по формуле (4.15);  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.

Формулы (4.14)–(4.18) позволяют проанализировать характер волнового поля напряжений под штампом, в том числе и в момент прихода ( $t = 2h/c_1$ ) под штамп фронта первой отраженной от верхней грани полосы продольной волны напряжений. При  $0 < t < 2h/c_1$  (т.е. до прихода первой отраженной волны) поле контактных напряжений под штампом  $\sigma_{yy}(x, 0, t) = -\varphi_1(x, t)$  ( $|x| \leq a$ ) полностью совпадает с полем контактных напряжений для соответствующей НДКЗ для упругой полуплоскости [2, 3]. При  $2h/c_1 < t < 4h/c_1$  пришедшая под штамп отраженная от верхней грани полосы продольная упругая волна напряжений в момент времени  $t = 2h/c_1$  на краях штампа ( $x = \pm a$ ) порождает новые волны контактных напряжений, распространяющиеся от краев штампа, как от источников со скоростью продольной волны  $c_1$ . На фронте продольной волны, распространяющейся от краев штампа, контактные напряжения терпят разрыв с интегрируемой особенностью корневого типа, а также имеют постоянную (не зависящую от времени) особенность корневого типа в краях штампа ( $x = \pm a$ ).

**5. Величина силы, действующей на штамп.** Действующая на штамп сила  $P(t)$ , когда штамп смещается в упругой среде по закону  $f(t)$ , служит интегральной характеристикой НДКЗ и определяется формулой

$$P(t) = a \int_{-1}^1 \varphi(x,t) dx, \quad t > 0 \quad (5.1)$$

где  $\varphi(x, t)$  – контактные напряжения под штампом. При сохранении в решении НДКЗ  $\varphi(x, t)$  одной переотраженной от верхней грани полосы упругой волны имеем

$$P_1(t) = a \int_{-1}^1 \varphi_1(x,t) dx, \quad 0 < t < \frac{4h}{c_1} \quad (5.2)$$

причем  $\varphi_1(x, t)$  определяется формулой (4.14). Трансформанта Лапласа функции  $P_1(t)$  после вычисления квадратуры [13] принимает вид

$$P_1^L(p) = a \int_{-1}^1 \varphi_1^L(x,p) dx = \mu\Delta f^L(p) \left\{ 2q_1 + q_2 p + \sum_{k=1}^{\infty} [(5q_1 + q_2 p) \exp(-t_{k1} p) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} I_2(p) - \frac{\beta^2}{\pi} I_1(p)] \right\} \quad (5.3)$$

$$I_i(p) = \int_1^{\infty} M_i(\beta^{2-i} \sqrt{\xi^2 - 1}) \xi \exp(-t_{k1} \xi p) d\xi, \quad M_i(u) = p_*(u) \frac{R_i(u)}{uR(u)}, \quad i = 1, 2$$

$$p_*(u) = \frac{1}{\pi K_-(0)} \left[ \int_1^{\infty} \frac{g_1(\zeta)}{\zeta^2 + \xi^2} d\xi + \int_{\beta}^1 \frac{g_2(\zeta)}{\zeta^2 + \xi^2} d\xi \right]$$

$$q_1 = \int_1^{\infty} \frac{g_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \int_{\beta}^1 \frac{g_2(\zeta)}{\zeta} d\zeta, \quad q_2 = \frac{2}{K(0)} \frac{a}{c_2}$$

функции  $g_1(\zeta)$ ,  $g_2(\zeta)$  даны формулами (4.17).

После применения обратного преобразования Лапласа [13] получим

$$P_1(t) = \mu \Delta \{ 2q_1 f(t) + q_2 (f'(t) + f(0)) + \sum_{k=1}^1 [5q_1(t - t_{k1}) + 2q_2(f'(t - t_{k1}) + f(t_{k1})) + J_2(t) - J_1(t)] \}, \quad 0 < t < 4h/c_1 < 2a/c_1 \quad (5.4)$$

$$J_i(t) = \frac{2}{\pi t_{k2}^2} H(t - t_{ki}) \int_{t_{ki}}^t M_i \left( \frac{\sqrt{\tau^2 - t_{ki}^2}}{t_{k2}} \right) \tau f(t - \tau) d\tau, \quad i = 1, 2$$

Слагаемые вне знака суммы в выражении (5.4) соответствуют формуле для силы, действующей на штамп, в соответствующей НДКЗ для упругой полуплоскости; эту формулу можно получить из предыдущих результатов [5] при  $0 < t < 2h/c_1$ . Под знаком суммы находятся выражения, соответствующие дополнению к силе, действующей на штамп, после прихода под штамп первой волны напряжений, отраженной от верхней грани упругой полосы при  $2h/c_1 < t < 4h/c_1$ .

В простейшем случае, когда  $f(t) = f_0 H(t)$ , соответствующем мгновенному внедрению штампа в упругую среду, имеем

$$P_1(t) = \mu \Delta f_0 \left\{ 2q_1 H(t) + q_2 \delta(t) + \sum_{k=1}^1 [5q_1 H(t - t_{k1}) + 2q_2 \delta(t - t_{k1}) + J_{2*}(t) - J_{1*}(t)] \right\}$$

$$J_{i*} = J_i \mid f(t) \equiv 1, \quad i = 1, 2$$

**6. О движении штампа в упругой среде.** Для установления закона движения штампа в упругой среде  $f(t)$  предполагается, что известна погонная масса штампа  $m$  и его скорость в начальный момент  $\dot{f}(0) = v_0$ . В этом случае дифференциальное уравнение движения жесткого штампа как материальной точки и начальные условия имеют вид

$$m\ddot{f}(t) = Q(t), \quad t > 0; \quad \dot{f}(0) = v_0, \quad f(0) = f_0 \quad (6.1)$$

где  $f_0$  — начальное до момента времени  $t = 0$  смещение штампа в упругую среду. Сила упругого сопротивления среды  $Q(t) = -P(t)$ , обусловленная контактными напряжениями между штампом и упругой полосой, равна  $-P_1(t)$  для промежутка времени  $0 < t < 4h/c_1$  и определена формулой (5.4).

Применяя при решении задачи Коши (6.1) методы операционного исчисления [14] для определения трансформанты Лапласа  $f^L(p)$  искомой функции  $f(t)$ , получим

$$f^L(p) = \frac{mpf_0 + mv_0}{mp^2 + w^L(p)}, \quad f^L(p)w^L(p) = P_1^L(p) \quad (6.2)$$

Функция  $P_1^L(p)$  дается формулой (5.3).

Переходя в (6.2) к асимптотическому выражению для  $f^L(p)$  при больших  $p$ , а затем к оригиналам Лапласа, получим приближенное выражение

$$f(t) = v_0 E_1(t) - v_0 \sum_{k=1}^1 [u_*(t - t_{k1}) E_1(t - t_{k1}) + (v_* - 2u_*^2) E_2(t) + \int_{t_{k1}}^t \left( w_2(\tau) - \frac{1}{\beta} w_1(\tau) \right) E_2(t - \tau) d\tau], \quad 0 < t < \frac{4h}{c_1} \quad (6.3)$$

$$E_1(t) = H(t) e^{-u_* t} \begin{cases} \sin \omega t / \omega, & \delta_* > 0 \\ \text{sh } \omega t / \omega, & \delta_* < 0 \\ t, & \delta_* = 0 \end{cases}$$

$$E_2(t) = H(t)e^{-u_*t} \begin{cases} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)/(2\omega^3), & \delta_* > 0 \\ (\operatorname{sh} \omega t - \omega t \operatorname{ch} \omega t)/(2\omega^3), & \delta_* < 0 \\ t^3/6, & \delta_* = 0 \end{cases}$$

$$w_i(t) = \frac{\mu t}{\pi t_{k2}^2} H(t - t_{k2}) M_i \left( \frac{\sqrt{t^2 - t_{ki}^2}}{t_{k2}} \right), \quad i = 1, 2$$

$$u_* = \frac{\mu q_2}{2m}, \quad \delta_* = \frac{2\mu q_1}{m} - \left( \frac{\mu q_2}{2m} \right)^2, \quad v_* = \frac{5\mu q_1}{2m}, \quad \omega = \sqrt{|\delta_*|}$$

Формулы (6.3) для  $f(t)$  показывают, что закон движения штампа будет затухающим при  $\delta_* \leq 0$  и колебательно затухающим при  $\delta_* > 0$ .

Автор благодарит В.М. Александрова за внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00428).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Beteman H., Erdelyi A. Tables of Integral Transforms. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1954 = Бейтман Г., Эрдейи А. Таблица интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969. 343 с.*
2. *Зеленцов В.Б. Об одном асимптотическом методе решения нестационарных динамических контактных задач // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 303–311.*
3. *Зеленцов В.Б. Нестационарная динамическая контактная задача о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 34–44.*
4. *Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.*
5. *Коваленко Е.В., Зеленцов В.Б. Асимптотические методы в нестационарных динамических контактных задачах для упругого полупространства // ПМТФ. 1997. Т. 38. № 1. С. 111–119.*
6. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешков В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.*
7. *Noble B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L. etc.: Pergamon Press, 1958 = Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.*
8. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.*
9. *Titchmarsh E.Ch. The Theory of Functions. L.: Oxford Univ. Press, 1947 = Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.*
10. *Prössdorf S. Einige Klassen singulärer Gleichungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1974 = Прёсдорф М.А. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979. 493 с.*
11. *Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.*
12. *Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.*
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798 с.*
14. *Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1966. 405 с.*