

УДК 539.3

© 2002 г. В.М. Александров

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ

Рассматривается типичное интегральное уравнение, возникающее при решении линейных плоских контактных задач для полуограниченных тел. На основе специального представления ядра этого уравнения развит приближенный метод решения, эффективный в широком диапазоне изменения входящего в ядро безразмерного геометрического параметра. Метод апробирован на задаче о симметричном сжатии упругой полосы по ее граням двумя одинаковыми штампами.

1. Интегральное уравнение плоских контактных задач. Широкий круг плоских контактных задач для линейно деформируемых полуограниченных тел сводится к решению следующего интегрального уравнения (ИУ) первого рода с разностным ядром [1–3]:

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \quad |x| \leq 1, \quad \lambda \in (0, \infty) \quad (1.1)$$

$$K(y) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos uy \, du$$

где $\varphi(x)$ – безразмерное контактное давление, $f(x)$ – безразмерная осадка штампа, λ – безразмерный геометрический параметр. Функция $L(u)$, входящая в выражение ядра $K(y)$, обладает следующими свойствами: 1) она непрерывна, нечетна и не обращается в нуль при всех $0 \leq u < \infty$, 2) справедливы асимптотические выражения

$$L(u) = 1 + O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty; \quad L(u) = Au + O(u^3), \quad u \rightarrow 0, \quad A = \text{const} \quad (1.2)$$

На функцию $f(x)$ накладываем следующее ограничение: ее первая производная при $|x| \leq 1$ должна удовлетворять условию Гёльдера.

Ранее [1–3] для приближенного решения ИУ (1.1) были разработаны асимптотические методы "больших λ " ($\lambda \geq 2$) и "малых λ " ($\lambda \leq 2$), а также метод ортогональных многочленов и метод коллокации по узлам Чебышева, эффективные тоже только при больших или малых λ . Был предложен [2] (гл. 5, § 2, п. 2) метод, который одинаково эффективен как при больших, так и при малых λ , однако он весьма громоздкий. Ниже предлагается другой, более простой метод, одинаково эффективный, по крайней мере, при значениях параметра $\lambda \in [6, 1/3]$, т.е. для всего практически важного диапазона изменения λ .

В силу условий (1.2) функцию $L(u)$ можно представить в форме

$$L(u) = \text{th} Au + g(u) \quad (1.3)$$

$$g(u) = O(u^{-2}), \quad u \rightarrow \infty; \quad g(u) = O(u^3), \quad u \rightarrow 0$$

$$|g(u)| \leq \delta, \quad 0 \leq u < \infty$$

причем величина δ в реальных задачах, как правило, мала по сравнению с единицей.

С помощью представления (1.3) и интеграла [4] (4.116(2))

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} Au}{u} \cos uy \, du = -\ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi y}{4A} \right|$$

придадим ИУ (1.1) вид

$$-\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln \left| \operatorname{th} \frac{\mu(\xi-x)}{2} \right| d\xi = \pi f(x) - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (1.4)$$

$$F(y) = \int_0^{\infty} \frac{g(u)}{u} \cos uy \, du, \quad \mu = \frac{\pi}{2A\lambda}$$

Продифференцируем ИУ (1.4) по x . Получим

$$\mu \int_{-1}^1 \varphi(\xi) \frac{d\xi}{\operatorname{sh}[\mu(\xi-x)]} = \pi f'(x) - \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) G\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (1.5)$$

$$G(y) = -F'(y) = \int_0^{\infty} g(u) \sin uy \, du$$

На основании свойств (1.3) функции $g(u)$ можно показать, что функция $G(y)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $|y| \leq R$, $R < \infty$. Кроме того, заметим, что решение сингулярного ИУ первого рода (1.5) при дополнительном условии

$$-\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln \left| \operatorname{th} \frac{\mu\xi}{2} \right| d\xi = \pi f(0) - \int_{-1}^1 \varphi(\xi) F\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi \quad (1.6)$$

эквивалентно решению ИУ (1.4).

2. Преобразование ИУ, структура решения. ИУ (1.5) можно переписать в виде

$$\mu \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\xi)}{\operatorname{ch} \mu\xi (\operatorname{th} \mu\xi - \operatorname{th} \mu x)} d\xi = \pi f'(x) \operatorname{ch} \mu x - \frac{\operatorname{ch} \mu x}{\lambda} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) G\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (2.1)$$

Теперь произведем в ИУ (2.1) и условии (1.6) следующие замены:

$$t = \operatorname{th} \mu x, \quad \tau = \operatorname{th} \mu\xi, \quad \psi(\tau) = \varphi(\xi) \operatorname{ch} \mu\xi, \quad h(t) = f'(x) \operatorname{ch} \mu x \quad (2.2)$$

В результате получим

$$\int_{-a}^a \frac{\psi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \pi h(t) - \int_{-a}^a \psi(\tau) H(\tau, t) d\tau, \quad |t| \leq a \quad (2.3)$$

$$a = \operatorname{th} \mu, \quad H(\tau, t) = \frac{2A}{\pi \sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} G\left[\frac{A}{\pi} \ln \frac{(1+\tau)(1-t)}{(1-\tau)(1+t)}\right] \\ - \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} \ln \frac{1-\sqrt{1-\tau^2}}{1+\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \pi \mu f(0) - \int_{-a}^a \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} F\left(\frac{A}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}\right) d\tau \quad (2.4)$$

Важно отметить, что корневые особенности в формулах (2.3) и (2.4) лежат вне интервалов определения и интегрирования, ибо $a < 1$.

Для решения сингулярного ИУ первого рода (2.3) могут быть использованы любые известные приближенные методы [1-3, 5-8]. А поскольку все они так или иначе основаны на точном обращении главного сингулярного оператора, стоящего в левой части ИУ (2.3), то при малом δ (см. (1.3)) и, как следствие, малых

$$\max |G(y)|, \quad \max |F(y)|, \quad 0 \leq y < \infty \quad (2.5)$$

эффективность их будет весьма высока при любых значениях параметра λ (практически при $\lambda \in [6, 1/3]$).

С учетом указанных выше свойств функций $f(x)$ и $G(y)$ можно доказать [2], что если решение уравнения (2.3) при заданном значении λ существует в классе функций

$$\int_{-a}^a |\psi(\tau)|^p d\tau < \infty, \quad 0 < p < 2 \quad (2.6)$$

то это решение в общем случае представимо в форме

$$\psi(t) = \Psi(t)(a^2 - t^2)^{-1/2} \quad (2.7)$$

причем функция $\Psi(t)$ удовлетворяет при $|t| \leq a$ условию Гёльдера.

Заметим, что функция $\psi(t)$ находится из сингулярного ИУ (2.3) с точностью до слагаемого

$$\pi^{-1} C(a^2 - t^2)^{-1/2} \quad (2.8)$$

Здесь постоянная C затем определяется из дополнительного условия (2.4).

В ряде задач функция $f(x)$ в (1.1) определена лишь с точностью до линейной части $c_0 + c_1 x$. Для нахождения c_0 и c_1 нужны дополнительные условия, в качестве которых обычно используют

$$\varphi(\pm 1) = 0 \quad (2.9)$$

3. Точное решение в частном случае. Если в выражении (1.3) функция $g(u) \equiv 0$, то уравнение (2.3) вырождается ($H(\tau, t) \equiv 0$) в классическое сингулярное ИУ первого рода с ядром Коши, решаемое в замкнутом виде (см., например, [2]). Возвращаясь в этом решении к старым переменным и обозначениям по формулам (2.2), имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi X(x)} \left[C - \mu \int_{-1}^1 \frac{f'(\xi) Y(\xi)}{\operatorname{th} \mu \xi - \operatorname{th} \mu x} d\xi \right] \quad (3.1)$$

$$X(x) = \operatorname{ch} \mu x \sqrt{a^2 - \operatorname{th}^2 \mu x}, \quad Y(x) = (\operatorname{ch} \mu x)^{-1} \sqrt{a^2 - \operatorname{th}^2 \mu x}$$

причем постоянную C надо определить из условия

$$-\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \ln \left| \operatorname{th} \frac{\mu \xi}{2} \right| d\xi = \pi f(0) \quad (3.2)$$

При условиях (2.9) имеем

$$\varphi(x) = -\frac{\mu}{\pi} Y(x) \int_{-1}^1 \frac{f'(\xi)}{(\operatorname{th} \mu \xi - \operatorname{th} \mu x) X(\xi)} d\xi \quad (3.3)$$

а сами условия (2.9) принимают вид

$$C + \mu \int_{-1}^1 \frac{f'(\xi) \operatorname{th} \mu \xi}{X(\xi)} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^1 \frac{f'(\xi)}{X(\xi)} d\xi = 0 \quad (3.4)$$

Условие (3.2) здесь также сохраняет силу.

В частном случае, когда $f(x) \equiv f = \text{const}$, из формул (3.1) и (3.2) найдем

$$\varphi(x) = \frac{\mu f}{K(\sqrt{1-a^2}) X(x)}, \quad P = \frac{2fK(a)}{K(\sqrt{1-a^2})}; \quad P = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi \quad (3.5)$$

где P – интегральная характеристика, определяемая по последней формуле (3.5), $K(a)$ – полный эллиптический интеграл. При выводе формул (3.5) использован интеграл [9] (2.6.16(18))

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1 + \sqrt{1-a^2 x^2}}{1 - \sqrt{1-a^2 x^2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-a^2 x^2)}} = 2\pi K(\sqrt{1-a^2}) \quad (3.6)$$

4. Приближенное решение в общем случае. Для приближенного решения ИУ (2.3) с условием (2.4) в случае, когда функция $g(u)$ в выражении (1.3) не равна тождественно нулю, удобно воспользоваться методом Мультотпа–Каландии [2, 3, 7]. Далее кратко изложим его в несколько нетрадиционной форме.

Подставим выражение (2.7) в соотношения (2.3), (2.4) и перейдем к новым переменным

$$\tau = a \cos \omega, \quad t = a \cos \theta \quad (4.1)$$

В результате получим

$$\frac{1}{a} \int_0^\pi \frac{\Omega(\omega) d\omega}{\cos \omega - \cos \theta} d\omega = \pi k(\theta) - \int_0^\pi \Omega(\omega) H(a \cos \omega, a \cos \theta) d\omega, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.2)$$

$$-\int_0^\pi \Omega(\omega) \ln |a \cos \omega| d\omega = \pi \mu f(0) - \int_0^\pi \Omega(\omega) M(a \cos \omega) d\omega \quad (4.3)$$

$$M(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \left[(\sqrt{1-\tau^2} - 1) \ln |\tau| + \ln(1 + \sqrt{1-\tau^2}) + F\left(\frac{A}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \right]$$

где $\Omega(\theta) = \Psi(a \cos \theta)$, $k(\theta) = h(a \cos \theta)$.

Построим для функции $\Psi(t)$ интерполяционный многочлен Лагранжа по узлам

$$t_n = a \cos \theta_n, \quad \theta_n = \pi(2n-1)/(2N), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

которые являются нулями полинома Чебышева первого рода $T_N(t/a)$. В частных случаях, когда $\Psi(t)$ – четная или нечетная функция и $N = 2r + 1$ ($r \geq 1$), такие многочлены соответственно имеют вид [3]

$$\Omega(\theta) \approx \frac{1}{r + 1/2} \sum_{n=1}^{r+1} \Omega(\theta_n) \delta_n \left(1 + 2 \sum_{m=1}^r \cos 2m\theta_n \cos 2m\theta \right) \quad n = 1, 2, \dots, r+1, \quad (4.5)$$

$$\Omega(\theta) \approx \frac{2}{r + 1/2} \sum_{n=1}^r \Omega(\theta_n) \sum_{m=1}^r \cos(2m-1)\theta_n \cos(2m-1)\theta, \quad n = 1, 2, \dots, r$$

где $\delta_n = 1$ ($n \neq r+1$), $\delta_n = 1/2$ ($n = r+1$).

Подставив в уравнение (4.2) приближенное выражение $\Omega(\theta)$ в одной из форм (4.5) и используя соотношение [4] (7.344(1))

$$\int_0^\pi \frac{\cos l\omega}{\cos \omega - \cos \theta} d\omega = \pi \frac{\sin l\theta}{\sin \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad l = 0, 1, \dots \quad (4.6)$$

вычислим точно интеграл в левой части уравнения (4.2). Для приближенного вычисления интеграла в правой части этого уравнения используем квадратурную формулу Гаусса [3, 7]

$$\int_0^\pi f(\omega) d\omega = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N f(\theta_n) \quad (4.7)$$

После вычисления интегралов в (4.2) в полученном соотношении положим $\theta = \theta_s$ и придем к системе r линейных алгебраических уравнений относительно значений $\Omega(\theta_n)$

$$\sum_{n=1}^{r+1-x} \Omega(\theta_n) \delta_n \left\{ \frac{1}{a \sin \theta_s} \chi_r^{(x)}(\theta_n \theta_s) + \frac{1}{2} [H(a \cos \theta_n, a \cos \theta_s) - (-1)^x H(a \cos \theta_n, -a \cos \theta_s)] \right\} = \left(r + \frac{1}{2} \right) k(\theta_s), \quad s = 1, 2, \dots, r \quad (4.8)$$

$$\chi_r^{(\kappa)}(\omega, \theta) = 2 \sum_{m=1}^r \cos(2m - \kappa)\omega \sin(2m - \kappa)\theta$$

где $\kappa = 0$ для четного варианта, $\kappa = 1$ для нечетного варианта.

Для замыкания системы уравнений (4.8) для четного варианта подставим $\Omega(\theta)$ в первой форме (4.5) в добавочное условие (4.3). Используя соотношение [2, 8]

$$-\int_0^\pi \cos 2m\omega \ln |a \cos \omega| d\omega = \begin{cases} \pi \ln(2/a), & m = 0 \\ \pi(-1)^m / (2m), & m \neq 0 \end{cases}$$

вычислим точно интеграл в левой части соотношения (4.3). Для приближенного вычисления интеграла в правой части этого соотношения (4.3) вновь воспользуемся квадратурной формулой (4.7). В результате найдем еще одно уравнение

$$\sum_{n=1}^{r+1} \Omega(\theta_n) \delta_n \left[\ln \frac{2}{a} + \sum_{m=1}^r (-1)^m \frac{\cos 2m\theta_n}{m} + M(a \cos \theta_n) \right] = \left(r + \frac{1}{2} \right) \mu f(0) \quad (4.9)$$

дополняющее систему (4.8) для четного варианта.

После решения системы (4.8), (4.9) для четного варианта и системы (4.8) для нечетного варианта относительно $\Omega(\theta_n)$ по формулам (4.5) могут быть найдены приближенные выражения функций $\Omega(\theta)$, а следовательно, и функций $\Psi(t) \rightarrow \psi(t) \rightarrow \rightarrow \varphi(x)$.

Получим еще формулу для вычисления интегральной характеристики, определяемой последней формулой (3.5). Проведем в подынтегральном выражении в этой формуле последовательно переход $\varphi(\xi) \rightarrow \psi(t) \rightarrow \Psi(t) \rightarrow \Omega(\omega)$ и подставим в него затем $\Omega(\omega)$ в форме, определяемой первой формулой (4.5). Будем иметь

$$P = \frac{2}{\mu(r+1/2)} \sum_{n=1}^{r+1} \Omega(\theta_n) \delta_n \left[J_0 + 2 \sum_{m=1}^r (-1)^m \cos 2m\theta_n J_{2m} \right] \quad (4.10)$$

$$J_{2m} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2m\omega}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \omega}} d\omega$$

Все интегралы J_{2m} могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого $K(a)$ и второго $E(a)$ рода. Приведем формулы для первых четырех интегралов

$$\begin{aligned} J_0 &= K(a), \quad J_2 = [(-2 + a^2)K(a) + 2E(a)]a^{-2} \\ J_4 &= [(16 - 16a^2 + 3a^4)K(a) + (-16 + 8a^2)E(a)](3a^4)^{-1} \\ J_6 &= [(-256 + 384a^2 - 158a^4 + 15a^6)K(a) + (256 - 256a^2 + 46a^4)E(a)](15a^6)^{-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

5. Пример. В качестве примера рассмотрим известную задачу [1] о сжатии упругой полосы ($|x| < \infty$, $-h \leq y \leq h$) по граням двумя одинаковыми штампами, так чтобы осуществлялась симметрия относительно оси $y = 0$. Такая задача в предположении отсутствия сил трения на линиях контакта штампов с полосой приводится к решению ИУ (1.1), в котором функция $\varphi(x)$ характеризует безразмерное контактное давление, функция $f(x)$ связана с осадкой штампов и их формой основания, параметр λ — отношение толщины полосы $2h$ к длине линии контакта, функция $L(u)$ имеет вид

$$L(u) = \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{\operatorname{sh} 2u + 2u} \quad (5.1)$$

Для безразмерных значений сил P , вдавливающих штампы в полосу, будет иметь место последняя формула (3.5). Во втором соотношении (1.2) величина $A = 1/2$, и тогда $a = \operatorname{th}(\pi/\lambda)$. В выражении (1.3) величина $\delta \approx 0.08$, а в (2.5) $\max|G(y)| \approx 0.18$ и $\max|F(y)| \approx 0.10$.

λ	$\Omega(\theta_n)/f$				P/f			
	$n = 1$	2	3	4	(4.10)	$\lambda \geq 2$	$\lambda \leq 2$	(3.5)
$\frac{1}{3}$	5.8731	5.5828	5.7068	5.6136	12.71			12.88
$\frac{1}{2}$	3.9154	3.7218	3.8045	3.7424	8.71		8.76	8.88
1	1.9541	1.8585	1.8912	1.8626	4.72		4.74	4.88
2	0.9338	0.9024	0.8908	0.8845	2.74	2.75	2.70	2.88
4	0.3949	0.3903	0.3860	0.3844	1.79	1.82		1.88
6	0.2301	0.2289	0.2275	0.2269	1.46			1.53

Приведем результаты использования изложенного метода для решения задачи в частном случае плоского штампа $f(x) \equiv f = \text{const}$. Расчеты проводились при $r = 3$ с десятью значащими цифрами.

В левой части таблицы приведены значения $\Omega(\theta_n)/f$ ($n = 1, 2, 3, 4$), рассчитанные для разных λ и необходимые для вычисления безразмерного контактного давления по формуле

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{(r + \frac{1}{2}) \text{ch} \mu x \sqrt{a^2 - \text{th}^2 \mu x}} \sum_{n=1}^{r+1} \Omega(\theta_n) \delta_n \left[1 + 2 \sum_{m=1}^r \cos 2m\theta_n T_{2m} \left(\frac{\text{th} \mu x}{a} \right) \right] \quad (5.2)$$

где $T_{2m}(t)$ – полиномы Чебышева.

В правой части таблицы приведены результаты вычисления величины P/f по формуле (4.10), найденные асимптотическими методами "больших λ " [1] (табл. 7) и "малых λ " [1] (табл. 11) (соответствующие столбцы в таблице обозначены как $\lambda \geq 2$ и $\lambda \leq 2$) и найденные по второй формуле (3.5) (т.е. в предположении, что добавкой $g(u)$ в формуле (1.3) можно пренебречь).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
3. Александров В.М., Ромалис Б.Л. Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
5. Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев: Наук. думка, 1968. 287 с.
6. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
8. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.III.2002