

УДК 624.042.8:534.1

© 2002 г. С.Н. Гаврилов, Д.А. Индейцев

### ОБ ЭВОЛЮЦИИ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ "СТРУНА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ – ПОДВИЖНОЕ ИНЕРЦИОННОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ"

Показано, что в системе "бесконечная струна на упругом основании – сосредоточенное инерционное включение, движущееся с постоянной докритической скоростью" возможны локализованные около включения собственные колебания. Для медленно ускоряющегося включения аналитически описана эволюция локализованной моды колебаний, т.е. найдена зависимость амплитуды колебаний от частоты. Построенное решение справедливо на интервале времен, когда скорость включения не близка к критической (нерезонансный случай). Предлагается подход к решению подобных задач, основанный на методе многих масштабов, позволяющий свести решение задачи к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения с медленно меняющимися коэффициентами.

Рассматриваемая задача о динамике струны на упругом основании, находящейся под действием инерционной сосредоточенной подвижной нагрузки, может представлять интерес по двум причинам.

Во-первых, известно [1], что в системе "бесконечная струна на упругом основании – сосредоточенное неподвижное инерционное включение" возможны локализованные около включения собственные колебания. Как показано ниже, если инерционное включение движется с постоянной докритической скоростью, то локализованные колебания также возможны. Если же рассмотреть включение, движущееся вдоль струны с малым ускорением, то естественным образом возникает задача об описании эволюции локализованной моды колебаний в системе с медленно меняющимися во времени параметрами. Разработка подхода к решению подобных задач – одна из целей данной работы.

Во-вторых, известно, что преодоление критической скорости безынерционной сосредоточенной разгоняющейся нагрузкой, движущейся вдоль струны, невозможно. Решение задачи в линейной постановке показывает, что в момент преодоления критической скорости пространственная производная перемещений струны перед нагрузкой обращается в бесконечность [2–4] и, как следствие, на нагрузку действует бесконечно большая продольная сила волнового сопротивления движению [5]. Рассмотрение задачи в нелинейной постановке также не вполне разрешает этот парадокс [6]. Выдвигалась гипотеза [7], что парадокс может быть устранен, если рассмотреть инерционную нагрузку. Тогда сила, действующая на струну со стороны включения в момент преодоления критической скорости, могла бы оказаться равной нулю при наличии ненулевой внешней силы, действующей на нагрузку. В этом случае преодоление критической скорости стало бы возможным. Получить асимптотику решения задачи о преодолении критической скорости инерционной нагрузкой для случая ускорения, стремящегося к нулю, – другая цель этой работы. Следует заметить, что решение для ускоряющейся нагрузки, полученное ниже, справедливо только на интервале времен, когда скорость нагрузки не близка к критической (нерезонансный случай). Тем не менее выполнен этап, необходимый для построения решения в резонансном случае.

**1. Постановка задачи.** Введем обозначения:  $u(x, t)$  – перемещение точки струны с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $T_0$  – сила натяжения невозмущенной струны,  $\rho$  – погонная плотность струны,  $c = \sqrt{T_0 / \rho}$  – скорость звука (критическая скорость),  $l(t)$  –

координата нагрузки (заданная функция),  $u(t) = \dot{l}(t)$ ,  $a(t) = \ddot{l}(t)$  – скорость и ускорение нагрузки соответственно,  $\beta = v/c$ ,  $k_0 = T_0 k > 0$  – коэффициент упругости основания,  $\chi_0(t) = T_0 \chi(t)$  – поперечная сила, действующая на струну со стороны нагрузки,  $f_0(t) = T_0 f(t)$  – внешняя поперечная сила, действующая на нагрузку,  $m_0 = T_0 m$  – масса нагрузки,  $u_0$  – прогиб струны в точке приложения нагрузки,  $\theta$  – функция Хевисайда.

Уравнения динамики струны и нагрузки имеют вид

$$u'' - \frac{1}{c^2} \ddot{u} - ku = -\chi(t) \delta(x - l(t)), \quad m \ddot{u}_0 = -\chi(t) + f(t) \quad (1.1)$$

Справедливо кинематическое соотношение

$$u_0(t) = u(l(t), t) \quad (1.2)$$

Относительно нагрузки предполагаем, что она внезапно возникает при  $t = 0$ , причем до этого струна находится в состоянии покоя, поэтому положим, что  $\chi(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ . Соответственно для первого уравнения (1.1) ставится обобщенная задача Коши [8] с условиями

$$u(x, t)|_{t < 0} \equiv 0, \quad \dot{u}(x, t)|_{t < 0} \equiv 0 \quad (1.3)$$

Будем полагать, что  $l(0) = 0$ ,  $u(0) = u_0$ , причем  $|u_0| < c$ .

Рассмотрим первое уравнение (1.1) в движущейся вместе с нагрузкой системе координат  $\xi = x - l(t)$ ,  $\tau = t$ . Учитывая второе уравнение (1.1) и соотношение (1.2), имеем

$$(1 - \beta^2) u''_{\xi\xi} + \frac{2\beta}{c^2} u''_{\xi\tau} + \frac{a}{c^2} u'_\xi - \frac{1}{c^2} u''_{\tau\tau} - ku = (m u''_{0\tau\tau} - f) \delta(\xi) \quad (1.4)$$

**2. Интегральное уравнение для функции  $\chi$ .** Первое уравнение (1.1) – неоднородное уравнение Клейна–Гордона. Его решение может быть представлено в виде свертки фундаментального решения [8] с правой частью. Учитывая условия (1.3), получим [4, 9]

$$u = \frac{c}{2} \int_0^t \chi(\tau) \theta \left( c - \frac{|x - l(\tau)|}{t - \tau} \right) J_0(\Psi(t, \tau, x)) d\tau \quad (2.1)$$

$$\Psi(t, \tau, x) = \sqrt{k(c^2(t - \tau)^2 - (x - l(\tau))^2)}$$

Для докритического движения нагрузки первое уравнение (2.1) дает

$$u_0 = \frac{c}{2} \int_0^t \chi(\tau) J_0(\Psi(t, \tau, l(t))) d\tau \quad (2.2)$$

С другой стороны, в силу второго уравнения (1.1)

$$u_0 = \frac{1}{m} \int_0^t (f(\tau) - \chi(\tau))(t - \tau) d\tau \quad (2.3)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.2) и (2.3), получим интегральное уравнение первого рода, решением которого является  $\chi(t)$ . Продифференцировав полученное уравнение по  $t$ , получим интегральное уравнение второго рода

$$\chi(t) = - \int_0^t \left( \frac{dJ_0(\Psi(t, \tau, l(t)))}{dt} + \frac{2}{mc} \right) \chi(\tau) d\tau + \frac{2}{mc} \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

Интегральное уравнение (2.4) удобно для численного решения задачи.

3. Движение с постоянной скоростью. Положим  $a = 0$  и рассмотрим однородную ( $f = 0$ ) стационарную (забываем о начальных условиях (1.3)) задачу о собственных колебаниях системы, описываемой уравнением (1.4). Пусть

$$u = U(\xi) \exp(-i\Omega\tau), \quad u_0 = U_0 \exp(-i\Omega\tau) \quad (3.1)$$

Известно [1], что при  $v = 0$  данная система имеет смешанный спектр собственных колебаний. Частотам  $|\Omega| \geq c\sqrt{k}$  (где  $c\sqrt{k}$  – частота отсечки) отвечают синусоидальные бегущие волны. Эти частоты образуют непрерывный спектр. Специфическая особенность систем с инерционными включениями состоит в том, что может существовать дискретный спектр собственных частот колебаний, для которых  $|\Omega| < c\sqrt{k}$ , а формы локализованы в окрестности включений. В таких случаях говорят о локализованных модах колебаний. В данном случае существует единственная частота  $\pm \Omega_0$ , для которой рассматриваемая спектральная задача имеет нетривиальное решение; ей соответствует форма колебаний, экспоненциально убывающая на бесконечности.

Покажем, что аналогичная ситуация имеет место и в случае  $|v| = \text{const} < c$ . Так как интерес представляют локализованные моды колебаний, сформулируем граничные условия на бесконечности в виде

$$u \rightarrow 0, \text{ при } \xi \rightarrow \pm \infty \quad (3.2)$$

Подставляя выражения (3.1) в уравнение (1.4), получаем

$$U_{\xi\xi} - 2iB(\Omega)U_{\xi} - A^2(\Omega)U = -\frac{m\Omega^2}{1-\beta^2}U_0\delta(\xi) \quad (3.3)$$

где

$$A^2(\Omega) = \frac{kc^2 - \Omega^2}{c^2 - v^2}, \quad B(\Omega) = \frac{v\Omega}{c^2 - v^2} \quad (3.4)$$

Дисперсионное соотношение для оператора левой части уравнения (3.3) имеет вид

$$\omega^2 - 2B(\Omega)\omega + A^2(\Omega) = 0 \quad (3.5)$$

откуда

$$\omega = B(\Omega) \pm iS(\Omega) \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.3) при  $v < c$  может быть записано в виде

$$U(\xi) = U_0 \frac{m\Omega_0^2 \exp(-S(\Omega_0)|\xi| + iB(\Omega_0)\xi)}{2(1-\beta^2)S(\Omega_0)} \quad (3.7)$$

где

$$S^2(\Omega) = A^2(\Omega) - B^2(\Omega) = \frac{c^2(\Omega_*^2 - \Omega^2)}{(c^2 - v^2)^2}, \quad \Omega_* = \sqrt{k(c^2 - v^2)} \quad (3.8)$$

Здесь  $\Omega_*$  – частота отсечки для движущегося вдоль струны включения, причем  $S(\Omega) > 0$  при  $\Omega < \Omega_*$ .

Заметив, что  $U(0) = U_0$ , получим частотное уравнение

$$m\Omega_0^2 = 2(1-\beta^2)S(\Omega_0) \quad (3.9)$$

из которого находим значение частоты, отвечающей локализованной моде колебаний,

$$\Omega_0^2 = 2m^{-2}c^{-2}(\sqrt{1 + m^2c^2k(c^2 - v^2)} - 1) \quad (3.10)$$

Составляя линейную комбинацию решений, соответствующих частотам  $\pm \Omega_0$ , получим выражение для вещественного решения уравнения (1.4), отвечающего локализованным в окрестности нагрузки колебаниям,

$$u = C \exp(-S(\Omega_0)|\xi|) \cos(\Omega_0 \tau - B(\Omega_0)\xi + D) \quad (3.11)$$

где  $C, D$  – произвольные постоянные.

*Замечание 1.* При  $v \rightarrow c - 0$  имеем

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= \Omega_*^2 - \frac{k^2 m^2 c^2}{4} (c^2 - v^2)^2 + o((c^2 - v^2)^2) \\ S^2(\Omega_0) &= \frac{k^2 m^2 c^4}{4}, \quad |B(\Omega_0)| \sim \sqrt{\frac{k}{1-\beta^2}} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим теперь неоднородную задачу. Полагаем, что внешняя сила  $f$  постоянна. Применяя обобщенное преобразование Фурье по времени к уравнению (1.4) при  $a = 0$ , получим с учетом нулевых начальных условий

$$F[u](\xi, \Omega) = \frac{(m\Omega^2 F[u_0])(\Omega) + fF[\theta] \exp(-S(\Omega)|\xi| + iB(\Omega)\xi)}{2(1-\beta^2)S(\Omega)} \quad (3.13)$$

где  $F$  – оператор преобразования Фурье. Отсюда

$$F[u_0] = \frac{fF[\theta]}{2(1-\beta^2)S(\Omega) - m\Omega^2} \quad (3.14)$$

Для больших  $\tau$  асимптотическую оценку для  $U_0$  можно получить, исходя из соотношения (3.14), методом стационарной фазы. Известно [10], что движение включения при  $\tau \rightarrow \infty$  имеет вид

$$u_0(\tau) = \sum_{\Omega \in \sigma_0} U_0^{(\Omega)}(\tau) \exp(-i\Omega\tau) + O(\tau^{-5/2}) \quad (3.15)$$

где суммирование ведется по набору частот  $\sigma_0 = \{0, \pm\Omega_0, \pm\Omega_*\}$  (которые при  $|v| < c$  различны). Для "амплитуд"  $U_0^{(\Omega)}$  можно получить выражения

$$U_0^{(0)} = \frac{f}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}}, \quad 2U_0^{(\pm\Omega_0)} = -\frac{mc^2 f}{m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2}, \quad U_0^{(\pm\Omega_*)} = O(\tau^{-3/2}) \quad (3.16)$$

Таким образом, решение  $u_0$  асимптотически представляет собой сумму неубывающих вкладов от частоты локализованных колебаний  $\Omega_0$  и нулевой частоты. Вклад в решение от непрерывного спектра асимптотически определяется убывающим вкладом от частоты отсечки  $\Omega_*$ .

**4. Движение с малым ускорением.** Ниже будем полагать, что ускорение  $a = O(\epsilon)$  нагрузки мало. Будем разыскивать асимптотику решения задачи при

$$\tau \rightarrow \infty, \quad |v| = \left| \int_0^\tau a(t) dt \right| < c \quad (4.1)$$

В аналогичной постановке ранее рассматривались задачи о безынерционной нагрузке на струне [4] и на балке Тимошенко [11] на деформируемом основании. Решение получено для волновых фронтов при помощи оценки интеграла свертки функции Грина оператора Клейна–Гордона с правой частью первого уравнения (1.1).

Если ускорение  $a$  нагрузки мало, коэффициенты левой части уравнения (1.4) – медленно меняющиеся функции времени. Идея предлагаемого ниже подхода состоит в следующем. На больших временах система (при отсутствии внешней силы) ведет себя по существу как система с одной степенью свободы, поэтому естественно ожидать, что эволюция локализованной моды колебаний может быть описана при помощи обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами. Предпочтительно получить это уравнение без определения эволюции решения уравнения (1.4) по пространственной переменной  $\xi$ , так как последняя задача весьма сложна. Оказывается, что это возможно.

Частные решения уравнения (1.4) для  $\xi < 0$  и  $\xi > 0$  будем искать в виде

$$u_\gamma(\xi, \tau) = W_\gamma(X, T) \exp(\varphi_\gamma(\xi, \tau)), \quad X = \epsilon \chi, \quad T = \epsilon \tau \quad (4.2)$$

$$\varphi'_\xi = i\omega(X, T), \quad \varphi'_\tau = -i\Omega(X, T)$$

Здесь  $W(X, T)$ ,  $\omega(X, T)$  и  $\Omega(X, T)$  – неизвестные функции, подлежащие определению при помощи уравнения (1.4);  $W \equiv W_\gamma$  и  $\varphi \equiv \varphi_\gamma$ , если  $\text{sign } \xi = \gamma$ . Потребуем, чтобы частоты  $\omega(X, T)$  и  $\Omega(X, T)$  удовлетворяли дисперсионному соотношению (3.5) и уравнению

$$\Omega'_X + \omega'_T = 0 \quad (4.3)$$

вытекающему из последних двух соотношений (4.2). Фаза  $\varphi(\xi, \tau)$  определяется по формуле

$$\varphi = i \int (\omega d\xi - \Omega d\tau) \quad (4.4)$$

Решение уравнения (1.4) непрерывно при  $\xi = 0$ , поэтому потребуем непрерывности  $W(X, T)$  и  $\varphi(\xi, \tau)$  в точке под нагрузкой. Для  $u_0$  имеем

$$u_0(\tau) = W(0, T) \exp(\varphi_0(\tau)), \quad \varphi_0(\tau) = \varphi(0, \tau) \quad (4.5)$$

Будем рассматривать только нерезонансный случай. Он имеет место, если величина  $|c - \nu(T)|$  отлична от нуля и все частоты из набора, по которому ведется суммирование в правой части равенства (3.15), можно считать различными.

Предположим, что характерное время, за которое скорость  $\nu$  претерпевает существенные изменения, значительно больше характерного времени, за которое происходит установление волновых процессов в случае  $a = 0$  (так что асимптотика (3.15) хорошо описывает решение). В этом случае решение задачи о движении нагрузки с постоянной скоростью показывает, что естественно принять некоторые априорные предположения о структуре решения в случае малого ускорения  $a$ . Предположим, что при больших временах решение задачи имеет вид

$$u_0(\tau) = \sum_{\Omega \in \sigma(T)} U_0^{(\Omega)}(T) \exp(\varphi_0^{(\Omega)}(\tau)) \equiv \sum_{\Omega \in \sigma(T)} u_0^{(\Omega)} \quad (4.6)$$

$$\frac{d\varphi_0^{(\Omega)}}{d\tau} = -i\Omega(T)$$

где суммирование ведется по набору частот  $\sigma(T) = \{0, \pm\Omega_0(T)\}$  (частота  $\Omega_0$  зависит от медленного времени  $T$  в соответствии с формулой (3.10)). В действительности решение, очевидно, будет содержать моды колебаний и с другими частотами; в частности, учет моды с частотой  $\Omega_*(T)$  может быть важен, особенно в резонансном случае.

Таким образом, возникает задача нахождения частного решения уравнения (1.4), удовлетворяющего условию (4.6). В нерезонансном случае моды колебаний, соответствующие частотам из набора  $\sigma$ , можно рассматривать как независимые и определять вклад от каждой из частот независимо, поэтому искомое частное решение можно искать в виде суперпозиции трех решений  $u^{(\Omega)}$ , имеющих при  $\text{sign } \xi = \gamma$  вид (4.2), для которых  $\Omega(0, T) \in \sigma(T)$ .

Формально интегрируя уравнение (1.4) по бесконечно малой окрестности точки  $\xi = 0$ , находим, что решение (4.6) обязано подчиняться уравнению

$$mu''_{0\tau\tau} - f = (1 - \beta^2)[u'_\xi] \quad (4.7)$$

Здесь и далее квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при  $\varepsilon = 0$ .

Уравнение (4.7) можно разбить на три уравнения для каждой из функций  $u^{(\Omega)}$ , воспользовавшись линейной независимостью слагаемых, соответствующих различным частотам из набора  $\sigma$ .

Ниже предлагается подход, основанный на методе многих масштабов (МММ) [12], который позволяет определить неизвестные функции  $U_0^{(\Omega)}(T)$ .

**5. Вклад от собственной частоты  $\pm\Omega_0$ .** Пусть  $\Omega = \delta\Omega_0$ ,  $\delta = \pm 1$ ,  $\Omega_0 > 0$ . Далее для краткости будем опускать индекс  $(\delta\Omega_0)$  у функций  $u_0$ ,  $\omega$  и  $\varphi_0$ . Для моды колебаний с частотой  $\delta\Omega_0$  имеем в силу соотношений (4.2)

$$mu''_{0\tau\tau} = (1 - \beta^2)(u_0[i\omega(0, T)] + \varepsilon[W'_X] \exp(\varphi_0(\tau))) \quad (5.1)$$

Величина  $\omega(0, T) = \omega_\gamma$  вычислена по формуле (3.6) при  $\Omega = \delta\Omega_0$  (выбран корень, соответствующий убывающему при  $\xi \rightarrow \infty$  решению).

Воспользуемся модификацией метода многих масштабов для линейных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами ([12], гл. 7). Функцию  $U_0$  ищем в виде асимптотического ряда

$$U_0(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j U_0^j(T) \quad (5.2)$$

Как и обычно при использовании МММ, переменные  $\varphi_0$  и  $T$  считаем независимыми. Производные по  $\tau$  преобразуются по правилам

$$(\cdot)'_{\tau} = -i\delta\Omega_0\partial_{\varphi_0} + \varepsilon\partial_T \quad (5.3)$$

$$(\cdot)'_{\tau\tau} = -\Omega_0^2\partial_{\varphi_0\varphi_0}^2 - 2\varepsilon i\delta\Omega_0\partial_{\varphi_0 T}^2 - \varepsilon i\delta\Omega_0'\partial_{\varphi_0} + \varepsilon^2\partial_{TT}^2$$

учитывая которые и равенство (5.1), можно проверить, что уравнение нулевого приближения выполняется тождественно в силу частотного уравнения (3.9). Для определения неизвестной функции  $U_0^0(T)$  следует рассмотреть уравнение первого приближения

$$2\Omega_0 U_{0T}^{0'} + \Omega_{0T}' U_0^0 = im^{-1}\delta(1 - \beta^2)[W'_X] \quad (5.4)$$

в которое, в силу частотного уравнения (3.9), не попадает слагаемое, связанное с первым приближением  $U_0^1$ . Уравнение (5.4) содержит неизвестную величину  $[W'_X]$ . Определим ее, рассмотрев уравнение (1.4) при  $\xi = \pm 0$ .

Снова используем МММ. Для краткости ниже будем опускать индекс  $\gamma$  у функций  $W$  и  $\omega$ . Будем использовать подход, аналогичный использованному выше для уравнения (5.1) и обобщенный для случая уравнения в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами. Положим

$$W(X, T) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j W^j(X, T) \quad (5.5)$$

Переменные  $\varphi$ ,  $X$  и  $T$  считаем независимыми. Производные по времени в (1.4) преобразуются по формулам (5.3), где вместо  $\varphi_0$  следует брать  $\varphi$ . Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \partial_\xi &= i\omega\partial_\varphi + \varepsilon\partial_X \\ \partial_{\xi\xi}^2 &= -\omega^2\partial_{\varphi\varphi}^2 + 2\varepsilon i\omega\partial_{\varphi X}^2 + \varepsilon i\omega'_X\partial_\varphi + \varepsilon^2\partial_{XX}^2 \\ \partial_{\xi\tau}^2 &= \omega\Omega_0\partial_{\varphi\varphi} + \varepsilon i\omega\partial_{\varphi T}^2 - \varepsilon i\delta\Omega_0\partial_{\varphi X}^2 + \varepsilon i\omega'_T\partial_\varphi + \varepsilon^2\partial_{XT}^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя выражения для производных и асимптотический ряд (5.5) в уравнение (1.4), получим, что уравнения нулевого приближения выполняются тождественно в силу дисперсионного соотношения (3.5).

Для определения первого члена  $W^0$  ряда (5.5) следует рассмотреть уравнение первого приближения

$$(1 - \beta^2)(2\omega W_X^{0'} + \omega'_X W^0) + 2\omega c^{-2}(\omega W_T^{0'} - \delta\Omega_0 W_X^{0'} + \omega'_T W^0) + ac^{-2}\omega W^0 + c^{-2}\delta(2\Omega_0 W_T^{0'} + \Omega'_{0T} W^0) = 0 \quad (5.7)$$

Имеем

$$\omega'_X = \omega'_\Omega \Omega'_X = -\omega'_\Omega \omega'_T \quad (5.8)$$

в силу уравнения (4.3). Преобразовав уравнение (5.7), получим

$$W_X^{0'} = -\frac{1}{2i\gamma S(\delta\Omega_0)(c^2 - v^2)} \sum_{j=0}^2 F_j \quad (5.9)$$

$$F_0 = a\omega W^0, \quad F_1 = 2(v\omega + \delta\Omega_0)W_T^{0'}$$

$$F_2 = -(c^2 - v^2)\omega'_\Omega \omega'_T + 2v\omega'_T + \delta\Omega'_{0T} W^0$$

Вычисляя отсюда скачок при  $X = 0$ , находим, учитывая, что  $W^0(0, T) = U^0(T)$ ,

$$[W_X^{0'}] = -\frac{(\Phi_0 + \Phi_2)U_0^0 + \Phi_1 U_{0T}^{0'}}{iS(\delta\Omega_0)(c^2 - v^2)} \quad (5.10)$$

$$\Phi_0 = aB(\delta\Omega_0), \quad \Phi_1 = 2(vB(\delta\Omega_0) + \delta\Omega_0)$$

$$\Phi_2 = -(c^2 - v^2)(B'_\Omega(\delta\Omega_0)B'_T(\delta\Omega_0) - S'_\Omega(\delta\Omega_0)S'_T(\delta\Omega_0)) + 2vB'_T(\delta\Omega_0) + \delta\Omega'_{0T} = \Phi_3 + \Phi_4$$

$$\Phi_3 = (c^2 - v^2)S'_\Omega(\delta\Omega_0)S'_T(\delta\Omega_0), \quad \Phi_4 = vB'_T(\delta\Omega_0) + \delta\Omega'_{0T}$$

Подставляя первое уравнение (5.10) в уравнение (5.4) и используя частотное уравнение (3.9), получим

$$2\Omega_0 U_{0T}^{0'} + \Omega'_{0T} U_0^0 = -\frac{2(1 - \beta^2)((\Phi_0 + \Phi_2)U_0^0 + \Phi_1 U_{0T}^{0'})}{m^2 c^2 \Omega_0^2} \Big|_{\delta=1} \quad (5.11)$$

Уравнение (5.11) позволяет определить неизвестную функцию  $U_0^0(T)$ . Коэффициент при  $U_{0T}^{0'}$  равен

$$2\Omega_0 + \frac{2(1 - \beta^2)\Phi_1}{m^2 c^2 \Omega_0^2} \Big|_{\delta=1} = 2 \frac{m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2}{m^2 c^2 \Omega_0} \quad (5.12)$$

Обозначим

$$z = m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2, \quad \lambda = 1 + m^2 c^2 k(c^2 - v^2) = z^2 / 4 \quad (5.13)$$

Решение уравнения (5.11) имеет вид

$$U_0^0 = \frac{C_0}{2} J_1 \exp\left(-\int \frac{(1 - \beta^2)(\Phi_0 + \Phi_2)|_{\delta=1}}{\Omega_0 z} dT\right) \quad (5.14)$$

$$J_1 = \exp\left(-\int \frac{m^2 c^2 \Omega_0}{2z} d\Omega_0\right) = z^{-1/4}$$

где  $C_0$  – произвольная постоянная. Остается вычислить интеграл в правой части первого уравнения (5.14). Имеем

$$S'_T = \frac{m\Omega_0\Omega'_0}{1-\beta^2} + \frac{mc^2\nu a\Omega_0^2}{(c^2-\nu^2)^2}, \quad \Phi_4|_{\delta=1} = \frac{av\Omega_0}{c^2-\nu^2} + \frac{\Omega'_0}{1-\beta^2} + \frac{2av^3\Omega_0}{(c^2-\nu^2)^2}$$

$$J_2 = \exp\left(-\int \frac{(1-\beta^2)\Phi_0|_{\delta=1}}{\Omega_0 z} dT\right)$$

$$J_3 = \exp\left(-\int \frac{(1-\beta^2)\Phi_3|_{\delta=1}}{\Omega_0 z} dT\right) = J_1^2 J_8$$

$$J_8 = \exp\left(-\int \frac{m^2 \Omega_0^2 \nu}{(1-\beta^2)z} d\nu\right) = J_9 J_{10}$$

$$J_9 = \exp\left(-\int \frac{d\nu^2}{2(c^2-\nu^2)}\right) = \sqrt{c^2-\nu^2}$$

$$J_{10} = \exp\left(\int \frac{d\nu^2}{2(c^2-\nu^2)\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$J_4 = \exp\left(-\int \frac{(1-\beta^2)\Phi_4|_{\delta=1}}{\Omega_0 z} dT\right) = J_2 J_5 J_6 = J_2^{-1} J_5 J_{10}^{-1}$$

$$J_5 = \exp\left(-\int \frac{d\Omega_0}{2\Omega_0}\right) \exp\left(\int \frac{m^2 c^2 \Omega_0 d\Omega_0}{2z}\right) = \frac{1}{J_1 \sqrt{\Omega_0}}$$

$$J_6 = \exp\left(\int \frac{d\lambda}{2(\lambda-1)\sqrt{\lambda}}\right) \exp\left(-\frac{1}{m^2 c^4 k} \int \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\right) = J_{10}^{-1} J_2^{-2}$$

В итоге находим

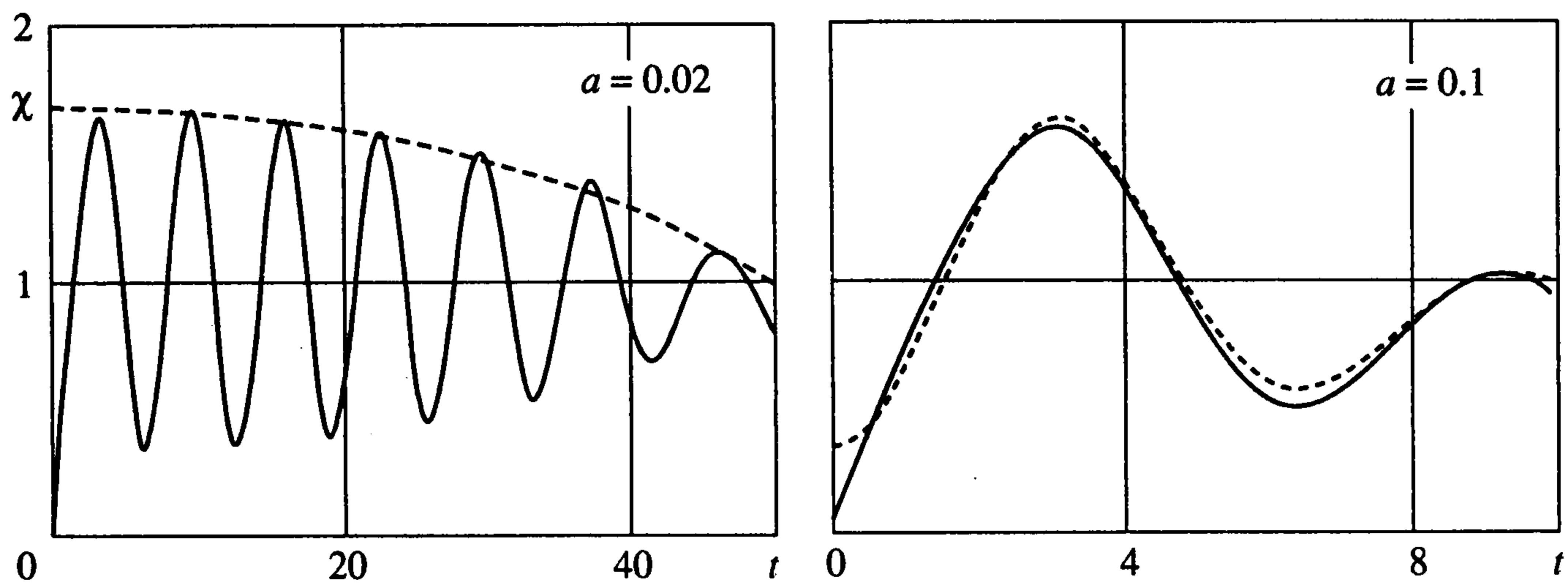
$$U_0^0 = \frac{C_0}{2} \frac{J_1^2 J_{10}}{\Omega_0^{1/2}} = \frac{C_0}{2} \sqrt{\frac{c^2 - \nu^2}{\Omega_0 (m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2)}} \quad (5.15)$$

*Замечание 2.* При  $\nu \rightarrow c - 0$  имеем  $U_0^0 = O((c^2 - \nu^2)^{1/4})$  в силу второго выражения (3.8) и асимптотических формул (3.12).

**6. Вклад от частоты  $\Omega = 0$ .** Наличие в решении вклада с нулевой частотой обусловлено тем, что на систему действует постоянная внешняя сила. Уравнение (4.7) дает с учетом дисперсионного соотношения (3.5) и краевых условий на бесконечности (3.2)

$$u_0^{(0)} = \frac{f}{2S(0)(1-\beta^2)} = \frac{f}{2\sqrt{k(1-\beta^2)}} \quad (6.1)$$

Правая часть этого равенства совпадает с правой частью первого равенства (3.16), а также с докритическим решением задачи о медленном разгоне безынерционной нагрузки [4].



В итоге получили

$$u_0 \approx C_0 \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{\Omega_0(m^2 c^2 \Omega_0^2 + 2)}} \cos\left(\int_0^t \Omega_0(T) dT\right) + \frac{f}{2\sqrt{k(1 - \beta^2)}} \quad (6.2)$$

Для определения неизвестной постоянной  $C_0$  необходимо воспользоваться начальными условиями. Положим, что  $U_0^{(\Omega_0)}$  при  $t = 0$  равно выражению в правой части второго равенства (3.16), вычисленному при  $v = v_0$ .

**7. Сравнение с численными результатами. Выводы.** Для проверки построенного асимптотического решения были проведены численные расчеты, основанные на уравнении (2.4). Вычисления проводились для следующих значений параметров:  $c = 1$ ,  $k = 2$ ,  $m = 2$ ,  $f = 1$ ,  $v_0 = 0$  при  $a = 0.02$  и  $a = 0.1$  (фигура). Сплошные линии – численные результаты, штриховые – аналитические (в левой части фигуры дан график огибающей аналитического решения). Видно, что, даже если ускорение нагрузки достаточно велико, так что на интервале времени от начала разгона до момента преодоления критической скорости укладывается только полтора периода собственных колебаний включения, построенное асимптотическое решение хорошо согласуется с расчетом. Как и следовало ожидать, это решение неадекватно описывает динамический процесс на малых временах и при  $v$ , близких к  $c$ . Заметим, что результаты исследования задачи даже в нерезонансном случае, а также численные результаты для резонансного случая позволяют считать, что при приближении скорости к критической система с инерционной нагрузкой ведет себя качественно аналогично системе с безынерционной нагрузкой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00693, 01-01-06094).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян А.К., Андреев В.Л., Индейцев Д.А. Особенности колебаний динамических систем, имеющих несущую конструкцию бесконечной протяженности // Моделирование в механике. 1992. Т. 6. № 2. С. 3–12.
2. Flaherty F.T., Jr. Transient resonance of an ideal string under a load moving with varying speed // Intern. J. Solids Structures. 1968. V. 4. № 12. P. 1221–1231.
3. Stronge W.J. An accelerating force on a string // J. Acoust. Soc. America. 1971. V. 50. № 5. P. 1382–1383.
4. Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б. Колебания бесконечной струны на деформируемом основании при действии равноускоренно движущейся нагрузки. Переход через критическую скорость // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 155–160.

5. *Гаврилов С.Н.* О преодолении критической скорости подвижной нагрузкой в упругом волноводе // Журн. техн. физики. 2000. Т. 70. № 4. С. 138–140.
6. *Gavrilov S.* Nonlinear investigation of the possibility to exceed the critical speed by a load on a string // *Acta Mechanica*. 2002. V. 154. P. 47–60.
7. *Весницкий А.И., Бурханов М.Р.* Сила давления и мощность излучения волн при неравномерном разгоне постоянной нагрузки вдоль упругой направляющей // Нелинейная акустика твердого тела. Сб. тр. 8-й сессии Рос. акуст. о-ва / Под ред. В.И. Ерофеева. Нижний Новгород: Изд-во о-ва "Интелсервис", 1998. С. 52–54.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
9. *Gavrilov S.* Non-stationary problems in dynamics of a string on an elastic foundation subjected to a moving load // *J. Sound and Vibration*. 1999. V. 222. № 3. P. 345–361.
10. *Каплунов Ю.Д.* Крутильные колебания стержня на деформируемом основании при действии движущейся инерционной нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 174–177.
11. *Каплунов Ю.Д., Муравский Г.Б.* Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 475–482.
12. *Nayfeh A.H.* Perturbation Methods. N.Y., etc.: Wiley, 1973 = *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.

Санкт-Петербург  
e-mail: serge@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию  
27.XI.2001