

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. Г.С. Кит, В.В. Михаськив, О.М. Хай

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОГО АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Посредством интегральных уравнений с особенностью потенциала Гельмгольца рассматривается трехмерная задача о вовлечении в поле гармонической волны, распространяющейся в бесконечном упругом теле, плоского абсолютно жесткого включения заданной массы. Предлагается гранично-элементный алгоритм построения дискретного аналога уравнений, учитывающий принадлежность решений к классу возрастающих на контуре области интегрирования (области дефекта) функций. Для двух случаев дифракции на дискообразном включении плоской продольной волны с параллельным и перпендикулярным к нему фронтом исследуются зависимости перемещений включения как жесткого целого, а также концентрации напряжений в его окрестности от волнового числа.

Наряду с трещинами, тонкие инородные включения являются объектами сосредоточения напряжений, для которых введены актуальные с точки зрения механики разрушения понятия коэффициентов их интенсивности [1]. Однако, если динамическим задачам теории трещин посвящены многочисленные публикации [2–6], инерционные эффекты в упругих телах с тонкими включениями изучены в значительно меньшей степени и касаются двумерных постановок задач для туннельных дефектов [7, 8]. В трехмерной постановке рассматривались только скалярные задачи динамического взаимодействия абсолютно жесткого диска с акустической средой [9].

1. Сведение задачи к граничным интегральным уравнениям. Пусть в бесконечном изотропном упругом теле (матрице) содержится плоское абсолютно жесткое включение массы M , занимающее область S в плоскости x_1Ox_2 . Система координат $Ox_1x_2x_3$ вводится таким образом, чтобы ее центр O совмещался с центром масс дефекта, а поверхностям размежевания $S^\pm$ включения и тела соответствовали значения $x_3 = \pm 0$. Напряженно-деформированное состояние возбуждается падающей гармонической волной с заданным распределением в пространстве $\mathbf{x}^*(x_1, x_2, x_3)$ и во времени t перемещений $U^{in}(\mathbf{x}^*, t) = \mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}^*) \exp(-i\omega t)$, где $\mathbf{u}^{in}(u_1^{in}, u_2^{in}, u_3^{in})$ – их амплитуда, ω – циклическая частота колебаний.

Исходя из принципа суперпозиции и опуская общий для величин установившегося процесса экспоненциальный временной множитель, полное дифракционное поле перемещений $\mathbf{u}^D$ в теле с включением можно представить в виде

$$\mathbf{u}^D(\mathbf{x}^*) = \mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}(\mathbf{x}^*) \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ – неизвестные перемещения отраженных от включения волн, удовлетворяющие условиям излучения на бесконечности. Ключевым для составляющих соотношения (1.1) является уравнение Ламе гармонических колебаний [10]

$$\omega_1^{-2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \omega_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

где ∇ – трехмерный набла-вектор, $\omega_j = \omega/c_j$ ($j = 1, 2$) – волновые числа, c_1, c_2 – скорости распространения в теле продольных и поперечных волн.

Граничными условиями моделируются свойства включения как жесткого тела, движение которого может быть лишь поступательным с малым перемещением $u^0(u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ его центра масс и вращательным вокруг осей координат с малым углом поворота $\Omega(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Отсюда следуют условия непрерывности перемещений в области S , причем покомпонентно

$$u_j(\mathbf{x}) = -u_j^{in}(\mathbf{x}) + u_j^0 - \Omega_3 x_{3-j}, \quad j = 1, 2; \quad u_3(\mathbf{x}) = -u_3^{in}(\mathbf{x}) + u_3^0 - \Omega_2 x_1 + \Omega_1 x_2 \quad (1.3)$$

$$\mathbf{x}(x_1, x_2) = \mathbf{x}^*(x_1, x_2, \pm 0) \in S$$

Реакция тела на присутствие в нем включения определяется главным вектором действующих на дефект усилий с проекциями P_j ($j = 1, 2, 3$) и моментами этих усилий Z_j ($j = 1, 2, 3$) относительно координатных осей. Дополнительные соотношения, связывающие величины P_j , Z_j и u_j^0 , Ω_j , следуют из хорошо известных уравнений установившихся колебаний включения (i_j – радиус инерции включения относительно оси Ox_j):

$$P_j + M\omega^2 u_j^0 = 0, \quad Z_j + M\omega^2 i_j^2 \Omega_j = 0; \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

С целью интегрального представления решения задачи (1.2)–(1.4) обратимся к формуле Сомилиано в форме [11]

$$u_j(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^3 \iint_{S^+ \cup S^-} [p_i(\xi) U_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*) - u_i(\xi) T_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*)] dS_\xi, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

где U_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – элементы матрицы фундаментальных решений стационарной динамической задачи теории упругости в перемещениях [10], T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – соответствующие этим решениям усилия на площадках с нормальми к поверхностям $S^\pm$, p_i ($i = 1, 2, 3$) – проекции неизвестных усилий, действующих на тело со стороны включения.

Для фундаментальных решений очевидны равенства

$$U_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*)|_{\xi \in S^+} = U_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*)|_{\xi \in S^-}, \quad T_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*)|_{\xi \in S^+} = -T_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*)|_{\xi \in S^-} \quad (1.6)$$

Тогда путем введения обозначений скачков компонент напряжений σ_{i3} на месте расположения дефекта

$$\Delta\sigma_i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} [\sigma_{i3}^+ - \sigma_{i3}^-] = \frac{1}{4\pi} [p_i|_{S^+} + p_i|_{S^-}], \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \quad (1.7)$$

$$\sigma_{i3}^\pm(\mathbf{x}) = \lim_{x_3 \rightarrow \pm 0} \sigma_{i3}(\mathbf{x}^*)$$

соотношения (1.5) преобразуются к виду (всюду далее, если не указано иное, интегрирование ведется по области S)

$$u_j(\mathbf{x}^*) = 4\pi \sum_{i=1}^3 \iint \Delta\sigma_i(\xi) U_{ij}(\xi - \mathbf{x}^*) dS_\xi, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.8)$$

или с учетом явных выражений для функций U_{ij}

$$u_j(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{G} \iint \left\{ \Delta\sigma_j(\xi) \frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}^* - \xi|)}{|\mathbf{x}^* - \xi|} - \frac{1}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Delta\sigma_1(\xi) \frac{\partial}{\partial x_1} + \Delta\sigma_2(\xi) \frac{\partial}{\partial x_2} + \right. \right. \quad (1.9)$$

$$\left. \left. + \Delta\sigma_3(\xi) \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \left[\frac{\exp(i\omega_1 |\mathbf{x}^* - \xi|)}{|\mathbf{x}^* - \xi|} - \frac{\exp(i\omega_2 |\mathbf{x}^* - \xi|)}{|\mathbf{x}^* - \xi|} \right] \right\} dS_\xi, \quad j = 1, 2, 3$$

Здесь G – модуль сдвига, $|\mathbf{x}^* - \xi|$ – расстояние между точкой $\mathbf{x}^*(x_1, x_2, x_3)$ и точкой интегрирования $\xi(\xi_1, \xi_2)$.

Таким образом, перемещения в произвольной точке тела с включением представляются свертками (1.9) скачков напряжений в области дефекта с регулярными ядрами потенциалов Гельмгольца. При помощи соотношений (1.4), (1.7) через функции $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) записываются также перемещения и повороты включения как жесткого целого, а именно

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \frac{4\pi}{\omega^2 M} \iint \Delta\sigma_j(\xi) dS_\xi, \quad j = 1, 2, 3 \\ \Omega_j &= \frac{(-1)^{j+1} 4\pi}{\omega^2 M i_j^2} \iint \xi_{3-j} \Delta\sigma_3(\xi) dS_\xi, \quad j = 1, 2 \\ \Omega_3 &= -\frac{4\pi}{\omega^2 M i_3^2} \iint [\xi_2 \Delta\sigma_1(\xi) - \xi_1 \Delta\sigma_2(\xi)] dS_\xi \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для определения скачков напряжений $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, 3$) воспользуемся условиями (1.3). Удовлетворив с помощью представлений (1.9), (1.10) этим условиям, получим следующую систему граничных интегральных уравнений (ГИУ) типа потенциала Гельмгольца относительно функций $\Delta\sigma_i$:

$$\iint \Delta\sigma_3(\xi) R_3(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi = -\omega_2^2 G u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \quad (1.11)$$

$$\iint [\Delta\sigma_j(\xi) R_j(\mathbf{x}, \xi) + \Delta\sigma_{3-j}(\xi) R_{j(3-j)}(\mathbf{x}, \xi)] dS_\xi = -\omega_2^2 G u_j^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S$$

Ядра R_j ($j = 1, 2, 3$), R_{12} , R_{21} после выполнения операций дифференцирования принимают форму

$$\begin{aligned} R_j(\mathbf{x}, \xi) &= L_1(|\mathbf{x} - \xi|) - \frac{(x_j - \xi_j)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} L_2(|\mathbf{x} - \xi|) - \frac{4\pi G}{c_2^2 M} \left(1 + \frac{\xi_{3-j} x_{3-j}}{i_3^2} \right), \quad j = 1, 2 \\ R_3(\mathbf{x}, \xi) &= L_1(|\mathbf{x} - \xi|) - \frac{4\pi G}{c_2^2 M} \left(1 + \frac{\xi_1 x_1}{i_2^2} + \frac{\xi_2 x_2}{i_1^2} \right) \\ R_{ij}(\mathbf{x}, \xi) &= -\frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^2} L_2(|\mathbf{x} - \xi|) + \frac{4\pi G}{c_2^2 M} \frac{\xi_i x_j}{i_3^2}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j \\ L_i(r) &= l_{i1}(r) \frac{\exp(i\omega_1 r)}{r^3} - l_{i2}(r) \frac{\exp(i\omega_2 r)}{r^3}, \quad i = 1, 2 \\ l_{11}(r) &= 1 - i\omega_1 r, \quad l_{12}(r) = 1 - i\omega_2 r - \omega_2^2 r^2, \quad l_{2j}(r) = 3 - 3i\omega_j r - \omega_j^2 r^2, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Первое уравнение (1.11) соответствует задаче поперечных колебаний включения в упругом теле (из него определяется функция $\Delta\sigma_3$, а затем по формулам (1.10) перемещение u_3^0 и повороты Ω_1 , Ω_2). Система двух остальных уравнений соответствует задаче продольных колебаний включения (из них определяются функции $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, а затем перемещения u_1^0 , u_2^0 и поворот Ω_3). Ядра ГИУ содержат полярную особенность, которая выделяется при помощи интегралов типа ньютоновского (статического) потенциала путем тождественного преобразования (1.11) в виде

$$\begin{aligned} A \iint \frac{\Delta\sigma_3(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dS_\xi + \iint \Delta\sigma_3(\xi) \left[\frac{1}{\omega_2^2} R_3(\mathbf{x}, \xi) - \frac{A}{|\mathbf{x} - \xi|} \right] dS_\xi &= -G u_3^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \\ \iint \frac{\Delta\sigma_j(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} \left[A - B \frac{(x_j - \xi_j)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} \right] dS_\xi - B \iint \Delta\sigma_{3-j}(\xi) \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} dS_\xi + \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$+ \iint \left\{ \Delta \sigma_j(\xi) \left[\frac{1}{\omega_2^2} R_j(\mathbf{x}, \xi) - \frac{A}{|\mathbf{x} - \xi|} + B \frac{(x_j - \xi_j)^2}{|\mathbf{x} - \xi|^3} \right] + \Delta \sigma_{3-j}(\xi) \left[\frac{1}{\omega_2^2} R_{j(3-j)}(\mathbf{x}, \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + B \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{|\mathbf{x} - \xi|^3} \right] \right\} dS_\xi = -Gu_j^{in}(\mathbf{x}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S$$

где

$$A = \frac{\gamma^2 + 1}{2}, \quad B = \frac{\gamma^2 - 1}{2}, \quad \gamma^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

ν – коэффициент Пуассона. Последние интегралы в левых частях уравнений (1.13) регулярны, в чем легко убедиться посредством разложения экспоненциальных функций, входящих в ядра R_j , R_{ij} , в ряды относительно величины $|\mathbf{x} - \xi|$. Отметим, что характеристическая часть (1.13) образует интегральный оператор уравнений трехмерной статической задачи о пластинчатом абсолютно жестком включении в бесконечном упругом теле [12].

2. Построение дискретного аналога ГИУ. Согласно известным результатам [12, 13], в случае дискообразного включения радиуса a непрерывность перемещений в окрестности его кромки будет обеспечиваться, если функции $\Delta \sigma_j$ представить как

$$\Delta \sigma_j(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_j(\mathbf{x})}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2}}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2) \in S \quad (2.1)$$

где $\alpha_j(\mathbf{x})$ ($j = 1, 2, 3$) – неизвестные функции. Подстановка выражений (2.1) в соотношении (1.11) либо (1.13) приводит к интегральным уравнениям, имеющим кроме полярной особенности в точке $\xi = \mathbf{x}$ корневую особенность на контуре области интегрирования. Во избежание перехода к полярной системе координат, первоначально воспользуемся следующей интерпретацией особых интегралов в области S :

$$\iint \alpha(\xi) \frac{dS_\xi}{\Delta_1(\mathbf{x}, \xi)} = \pi^2 \alpha(\mathbf{x}) + \iint [\alpha(\xi) - \alpha(\mathbf{x})] \frac{dS_\xi}{\Delta_1(\mathbf{x}, \xi)} \\ \iint \alpha(\xi) (x_j - \xi_j)^2 \frac{dS_\xi}{\Delta_3(\mathbf{x}, \xi)} = \frac{\pi^2}{2} \alpha(\mathbf{x}) + \iint [\alpha(\xi) - \alpha(\mathbf{x})] (x_j - \xi_j)^2 \frac{dS_\xi}{\Delta_3(\mathbf{x}, \xi)}, \quad j = 1, 2 \quad (2.2) \\ \iint \alpha(\xi) (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \frac{dS_\xi}{\Delta_3(\mathbf{x}, \xi)} = \iint [\alpha(\xi) - \alpha(\mathbf{x})] (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \frac{dS_\xi}{\Delta_3(\mathbf{x}, \xi)} \\ \Delta_i(\mathbf{x}, \xi) = \sqrt{a^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2} |\mathbf{x} - \xi|^i, \quad i = 1, 3$$

Здесь учтены точные значения интегралов

$$\iint \frac{dS_\xi}{\Delta_1(\mathbf{x}, \xi)} = \pi^2, \quad \iint (x_1 - \xi_1)^i (x_2 - \xi_2)^{2-i} \frac{dS_\xi}{\Delta_3(\mathbf{x}, \xi)} = \begin{cases} \pi^2 / 2, & \text{если } i = 0, 2; \\ 0, & \text{если } i = 1 \end{cases}; \quad \mathbf{x} \in S \quad (2.3)$$

Из очевидных соображений следует, что подынтегральные выражения в правых частях равенств (2.2) ограничены в точке $\xi = \mathbf{x}$, поэтому численное интегрирование в соответствующих интегралах производилось вдоль области S^0 , образующейся из S удалением малой окрестности этой точки.

Последующий шаг к регуляризации ГИУ состоит в преобразовании переменных

$$x_1 = a \sin y_1 \cos y_2, \quad x_2 = a \sin y_1 \sin y_2 \quad (2.4)$$

$$\xi_1 = a \sin \eta_1 \cos \eta_2, \quad \xi_2 = a \sin \eta_1 \sin \eta_2$$

где y (y_1, y_2), η (η_1, η_2) – новые переменные, изменяющиеся в прямоугольной области $\tilde{S}\{0 \leq y_1, \eta_1 \leq \pi/2; 0 \leq y_2, \eta_2 \leq 2\pi\}$. Заменой (2.4) устраняется особенность на контуре области интегрирования, когда $\eta_1 = \pi/2$.

Сочетая соотношения (2.1), (2.2), (2.4), получим регулярное представление ГИУ (1.11) (либо (1.13)) в форме

$$\begin{aligned}
 & A\tilde{\alpha}_3(\mathbf{y}) \left[\pi^2 - \iint_{\tilde{S}^0} \frac{\sin \eta_1}{R(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} dS_{\boldsymbol{\eta}} \right] + \frac{1}{\kappa^2} \iint_{\tilde{S}^0} \tilde{\alpha}_3(\boldsymbol{\eta}) \tilde{R}_3(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}} = -G\tilde{u}_3^{in}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(y_1, y_2) \in \tilde{S} \\
 & \tilde{\alpha}_j(\mathbf{y}) \left\{ A \left[\pi^2 - \iint_{\tilde{S}^0} \frac{\sin \eta_1}{R(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} dS_{\boldsymbol{\eta}} \right] - B \left[\frac{\pi^2}{2} - \iint_{\tilde{S}^0} \Phi_j(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}} \right] \right\} + \\
 & + B\tilde{\alpha}_{3-j}(\mathbf{y}) \iint_{\tilde{S}^0} \Psi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}} + \frac{1}{\kappa^2} \iint_{\tilde{S}^0} [\tilde{\alpha}_j(\boldsymbol{\eta}) \tilde{R}_j(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) + \\
 & + \tilde{\alpha}_{3-j}(\boldsymbol{\eta}) \tilde{R}_{j(3-j)}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})] \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}} = -G\tilde{u}_j^{in}(\mathbf{y}), \quad j = 1, 2, \quad \mathbf{y}(y_1, y_2) \in \tilde{S}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 R(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) &= [\sin^2 y_1 + \sin^2 \eta_1 - 2 \sin y_1 \sin \eta_1 \cos(y_2 - \eta_2)]^{1/2} \\
 \Phi_j(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{R^3(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} [\delta_{1j} (\sin y_1 \cos y_2 - \sin \eta_1 \cos \eta_2)^2 + \delta_{2j} (\sin y_1 \sin y_2 - \sin \eta_1 \sin \eta_2)^2] \\
 \Psi(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) &= \frac{1}{R^3(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})} (\sin y_1 \cos y_2 - \sin \eta_1 \cos \eta_2) (\sin y_1 \sin y_2 - \sin \eta_1 \sin \eta_2)
 \end{aligned}$$

δ_{ij} – символ Кронекера, $\kappa = \omega_2 a$ – нормализованное волновое число, $\tilde{S}^0$ – отображение области S^0 при замене (2.4) (в области $\tilde{S}^0$ точки $\mathbf{y}$ и $\boldsymbol{\eta}$ не совпадают), $\tilde{\alpha}_j, \tilde{u}_j^{in}, \tilde{R}_j (j = 1, 2, 3)$, $\tilde{R}_{12}, \tilde{R}_{21}$ – сложные функции, введенные как

$$\begin{aligned}
 \tilde{\alpha}_j(\mathbf{y}) &= \alpha_j(\hat{\mathbf{x}}), \quad \tilde{u}_j^{in}(\mathbf{y}) = u_j^{in}(\hat{\mathbf{x}}) \\
 \tilde{R}_j(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) &= a^3 R_j(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad \tilde{R}_{ij}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = a^3 R_{ij}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \\
 \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}(a \sin y_1 \cos y_2, a \sin y_1 \sin y_2), \quad \hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}(a \sin \eta_1 \cos \eta_2, a \sin \eta_1 \sin \eta_2)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Дискретизация уравнений (2.5) базируется на равномерном разбиении области $\tilde{S}$ сетью Q прямоугольных элементов $\tilde{S}_q$, причем $q = 1, \dots, Q$, $\tilde{S} = \bigcup_{q=1}^Q \tilde{S}_q$, $\tilde{S}_q \cap \tilde{S}_p = \emptyset$, $q \neq p$ и аппроксимации искомых функций $\tilde{\alpha}_j$ ($j = 1, 2, 3$) интерполяционными многочленами

$$\tilde{\alpha}_j(\mathbf{y}) = \sum_{q=1}^Q \tilde{\alpha}_{jq} \theta_q(\mathbf{y}), \quad j = 1, 2, 3 \tag{2.7}$$

Здесь $\tilde{\alpha}_{jq} = \tilde{\alpha}_j(\mathbf{y}_q)$ – значение искомой функции в узловой точке $\mathbf{y}_q(y_{1q}, y_{2q})$ посередине q -го элемента, θ_q ($q = 1, \dots, Q$) – весовые функции со свойствами $\theta_q(\mathbf{y}_p) = \delta_{qp}$.

Применяя коллокационную схему удовлетворения уравнениям (2.5), приходим к следующим системам линейных алгебраических уравнений размерности $Q \times Q$ для задачи поперечных колебаний включения и $2Q \times 2Q$ для задачи продольных колебаний включения относительно величин $\tilde{\alpha}_{jq}$:

$$\sum_{q=1}^Q h_{3iq} \tilde{\alpha}_{3q} = -G\tilde{u}_3^{in}(\mathbf{y}_i), \quad i = 1, \dots, Q \tag{2.8}$$

$$\sum_{q=1}^Q [h_{jiq} \tilde{\alpha}_{jq} + h_{j(3-j)iq} \tilde{\alpha}_{(3-j)q}] = -G \tilde{u}_j^{in}(\mathbf{y}_i), \quad i = 1, \dots, Q, \quad j = 1, 2$$

Коэффициенты $h_{jiq}, h_{j(3-j)iq}$ имеют вид

$$\begin{aligned} h_{3iq} &= A\pi^2 \delta_{iq} + \iint_{\tilde{S} \setminus \tilde{S}_i} \left[\frac{1}{\kappa^2} \theta_q(\boldsymbol{\eta}) \tilde{R}_3(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta}) - \frac{A\delta_{iq}}{R(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta})} \right] \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}} \\ h_{jiq} &= \pi^2 \delta_{iq} \left(A - \frac{1}{2} B \right) + \iint_{\tilde{S} \setminus \tilde{S}_i} \left[\frac{1}{\kappa^2} \theta_q(\boldsymbol{\eta}) \tilde{R}_j(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta}) - \frac{A\delta_{iq}}{R(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta})} + B\delta_{iq} \Phi_j(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta}) \right] \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}} \\ h_{j(3-j)iq} &= \iint_{\tilde{S} \setminus \tilde{S}_i} \left[\frac{1}{\kappa^2} \theta_q(\boldsymbol{\eta}) \tilde{R}_{j(3-j)}(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta}) + B\delta_{iq} \Psi(\mathbf{y}_i, \boldsymbol{\eta}) \right] \sin \eta_1 dS_{\boldsymbol{\eta}}; \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

После определения из систем (2.8) узловых значений функций $\tilde{\alpha}_j$ ($j = 1, 2, 3$) можно легко найти все важнейшие параметры колебательного процесса, касающиеся как напряженно-деформированного состояния тела (соотношения (1.9), (2.1), (2.6)), так и движения включения как жесткого целого (соотношения (1.10), (2.1), (2.6)). Особый интерес представляют коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) отрыва K_1 , поперечного K_2 и продольного K_3 сдвига в окрестности включения, которые, как функции угловой координаты φ точки его контура, даются формулами

$$K_1(\varphi) = -2\pi\sqrt{\pi/a} \tilde{\alpha}_3(\hat{\mathbf{y}}), \quad K_2(\varphi) = -2\pi\sqrt{\pi/a} [\tilde{\alpha}_1(\hat{\mathbf{y}}) \cos \varphi + \tilde{\alpha}_2(\hat{\mathbf{y}}) \sin \varphi] \quad (2.10)$$

$$K_3(\varphi) = -2\pi\sqrt{\pi/a} [\tilde{\alpha}_1(\hat{\mathbf{y}}) \sin \varphi - \tilde{\alpha}_2(\hat{\mathbf{y}}) \cos \varphi]; \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\pi/2, \varphi)$$

3. Численные результаты. Рассмотрим реакцию тела с дискообразным абсолютно жестким включением на распространение плоской продольной волны перемещений

$$\mathbf{u}^{in}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{e} U_0 \exp[i\omega_1(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}^*)] \quad (3.1)$$

где U_0 – постоянная амплитуда колебаний, $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\sin \psi, 0, \cos \psi)$, ψ – угол падения волны на включение.

Если возбуждающая волна распространяется вдоль оси Ox_3 , то есть имеет параллельный к включению фронт ($\psi = 0$), компоненты ее перемещений в области S принимают вид

$$u_1^{in} = u_2^{in} = 0, \quad u_3^{in}(\mathbf{x}) = U_0$$

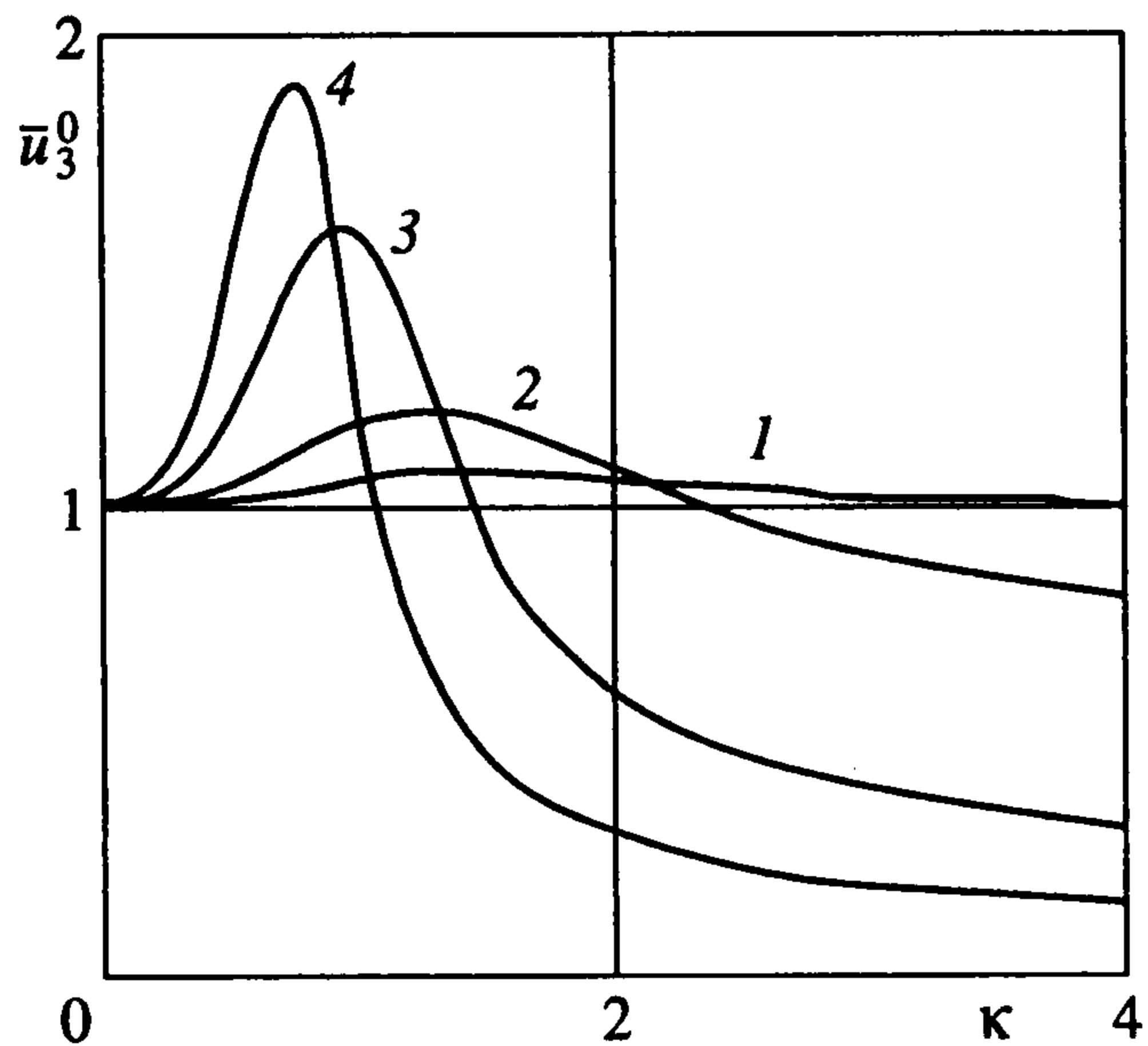
Если возбуждающая волна распространяется вдоль оси Ox_1 , т.е. имеет перпендикулярный к включению фронт ($\psi = \pi/2$), соответствующие компоненты принимают вид

$$u_1^{in}(\mathbf{x}) = U_0 \exp(i\omega_1 x_1), \quad u_2^{in} = u_3^{in} = 0$$

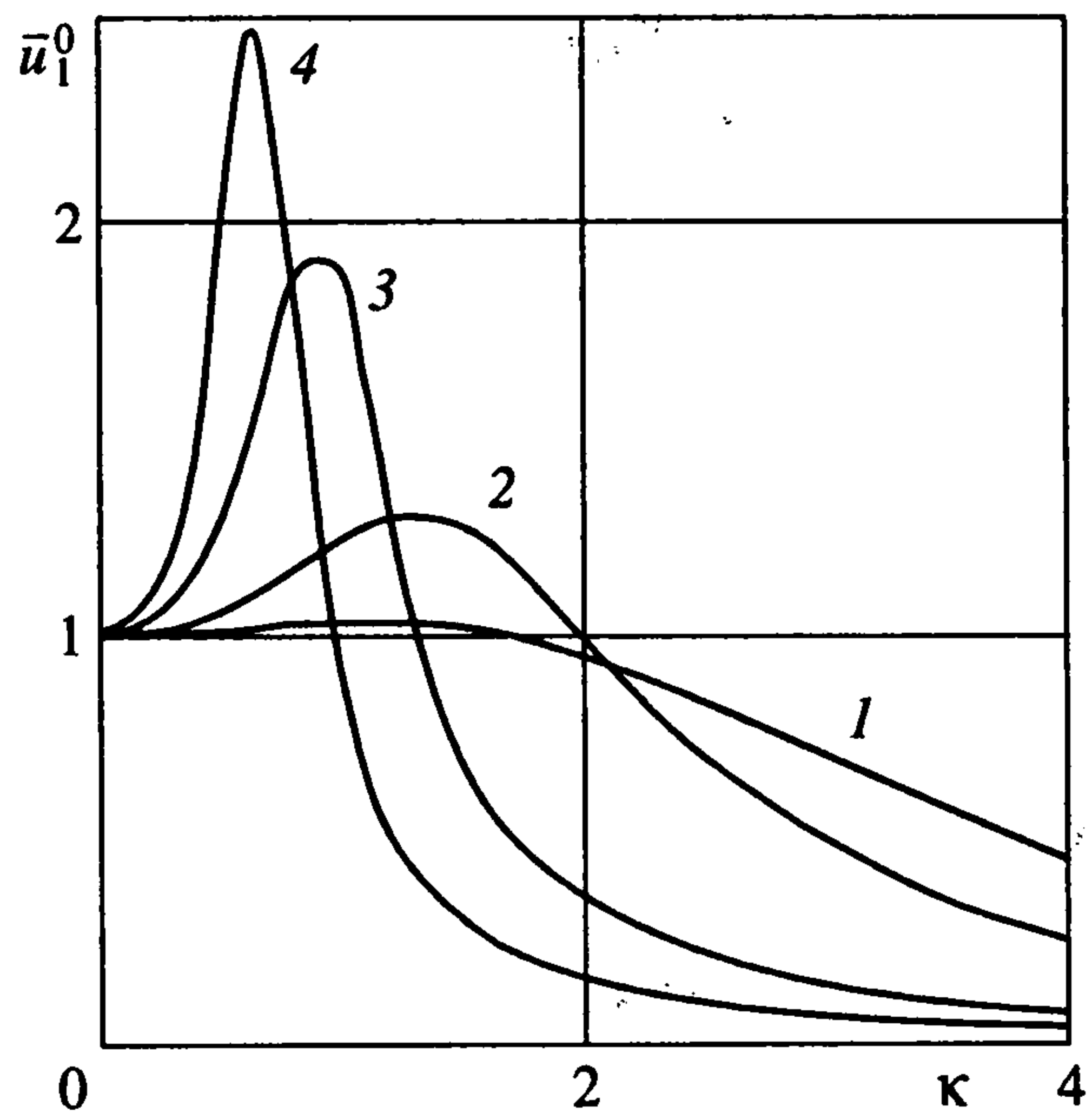
При расчетах использовалась дискретизация области $\tilde{S}$ 176 элементами (11 элементами вдоль оси Oy_1 и 16 элементами вдоль оси Oy_2), а также кусочно-постоянная аппроксимация искомых функций, задающаяся соотношениями

$$\theta_q(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{y} \in \tilde{S}_q \\ 0, & \text{если } \mathbf{y} \notin \tilde{S}_q \end{cases} \quad (3.2)$$

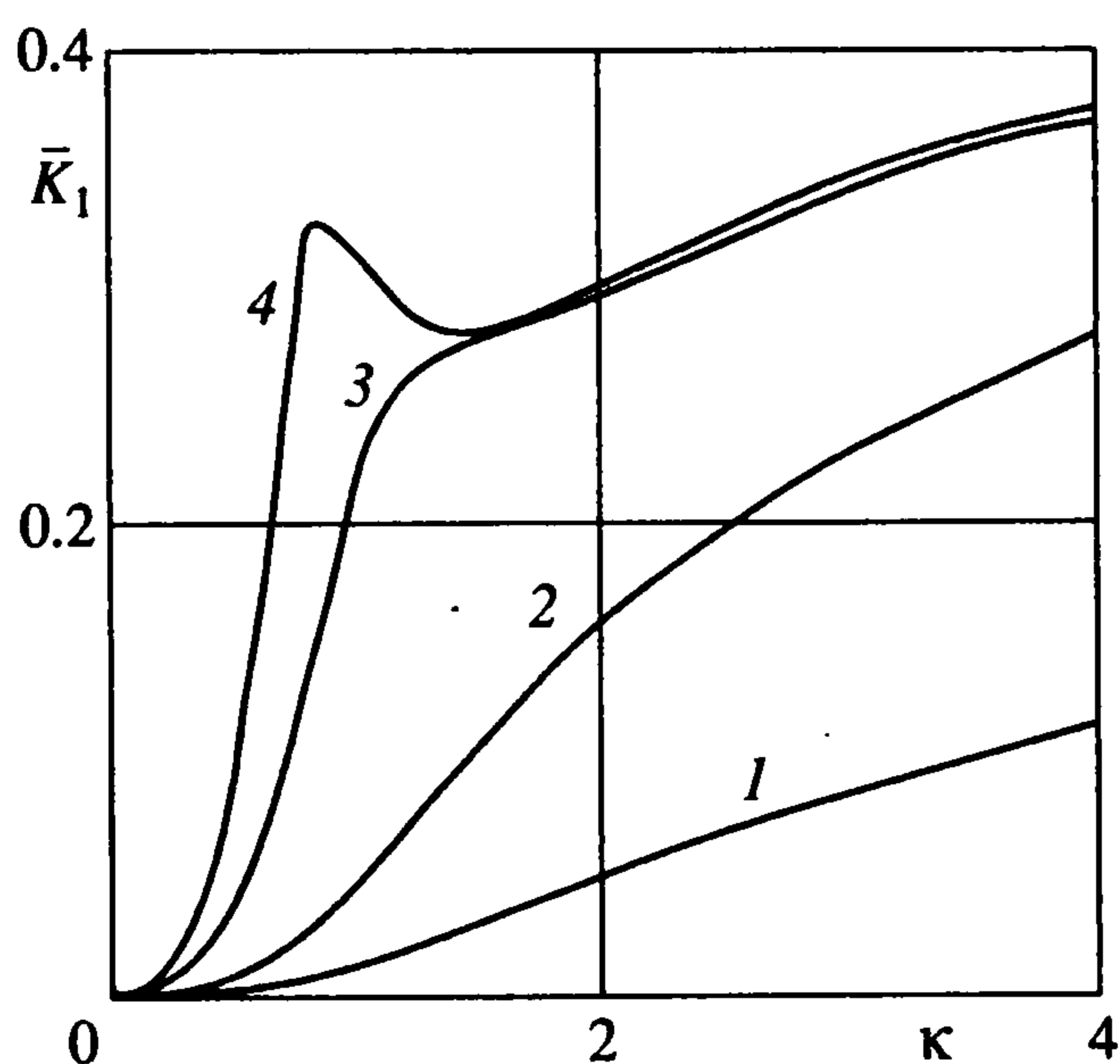
Коэффициент Пуассона полагался равным 0.3, для рассмотренной конфигурации включения $i_1 = i_2 = a/2$, $i_3 = a/\sqrt{2}$.



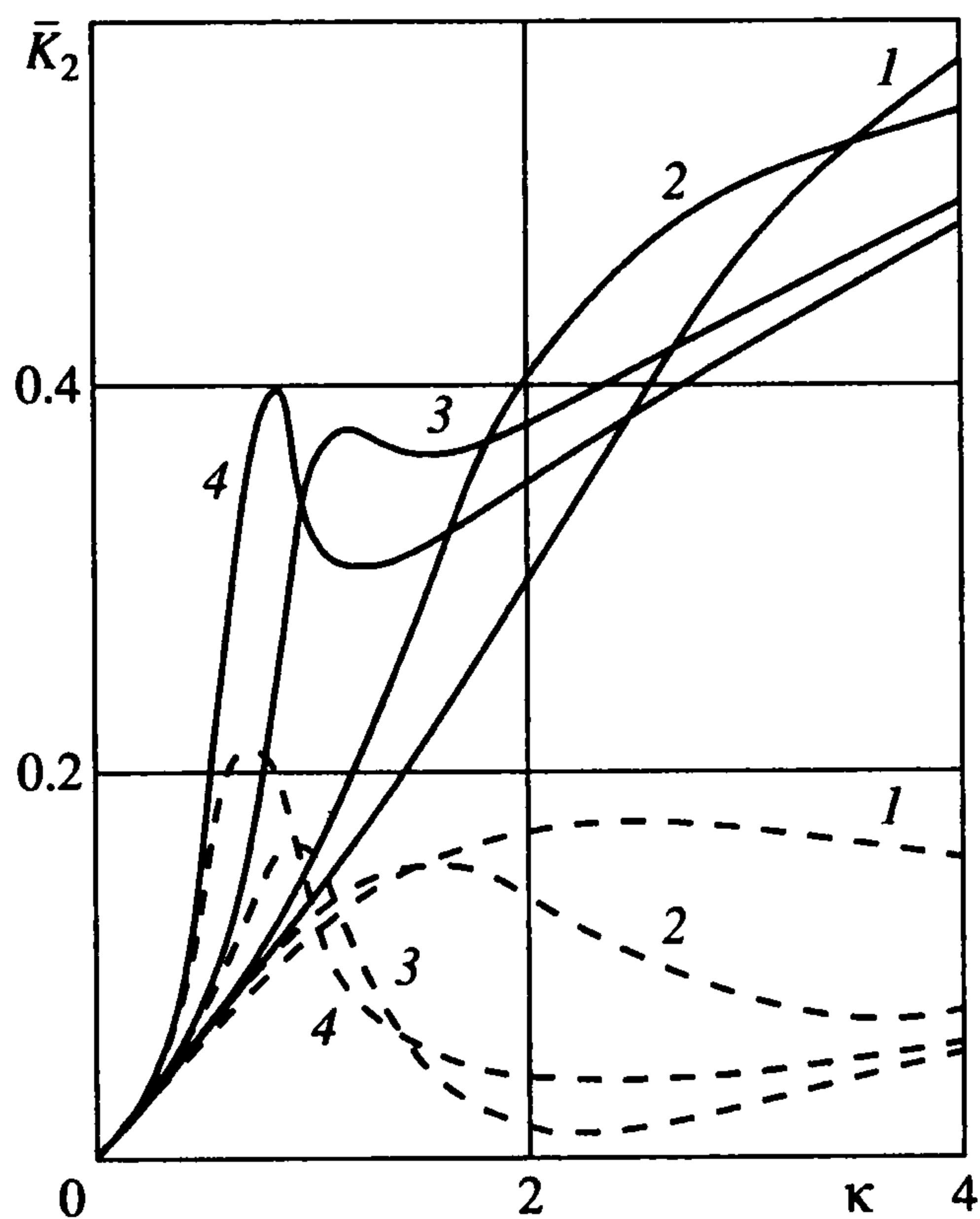
Фиг. 1



Фиг. 2

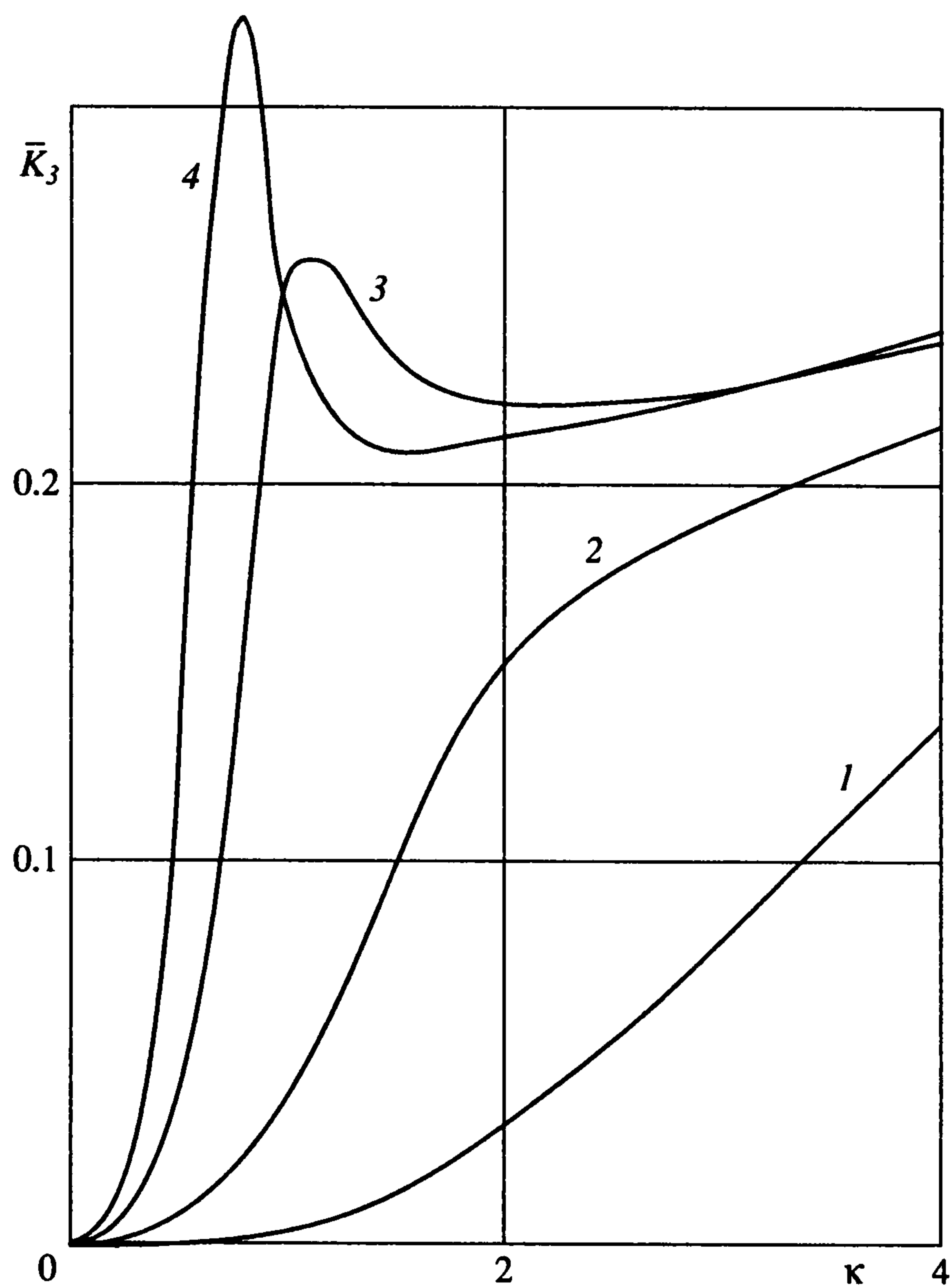


Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 1, 2 показаны зависимости относительных амплитуд поступательных перемещений включения как жесткого целого $\bar{u}_j^0 = |u_j^0|/U_0$ от нормализованного волнового числа $\kappa = \omega_2 a$. Фиг. 3–5 демонстрируют аналогичные зависимости относительных амплитуд КИН $\bar{K}_j = |K_j|/K_*$, где $K_* = 2\pi\sqrt{\pi/a}U_0G$. Кривые 1–4 соответствуют следующим значениям приведенных масс включения $\bar{M} = M/(\rho a^3)$ (ρ – плотность матрицы): 1, 3, 10, 20. Фиг. 1, 3 соответствуют случаю $\psi = 0$, тогда $u_1^0 = u_2^0 = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$, $K_2 = K_3 = 0$, а КИН отрыва K_1 не изменяются вдоль контура дефекта. Фиг. 2, 4, 5 соответствуют случаю $\psi = \pi/2$, тогда $u_2^0 = u_3^0 = 0$, $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$, $K_1 = 0$, а КИН сдвига K_2, K_3 зависят от угловой координаты φ точки



Фиг. 5

контура дефекта, отсчет которой производится от оси Ox_1 . Поэтому на фиг. 4 приведены значения $\bar{K}_2$ в наиболее показательных точках контура включения: сплошные кривые соответствуют точке набегания волны на дефект ($\varphi = \pi$), штриховые кривые – точке сбегания волны с дефекта ($\varphi = 0$). Так как $K_3(0) = K_3(\pi) = 0$, на фиг. 5 приведены значения $\bar{K}_3$ в промежуточной точке контура с координатой $\varphi = \pi/2$.

Из фиг. 1 следует, что при нормальном падении волны на включение с ростом волнового числа амплитуда перемещений $\bar{u}_3^0$ увеличивается от единицы при $k = 0$ (статическое значение) к абсолютному максимуму, а потом монотонно уменьшается к нулю. Указанная закономерность более выразительна для включений большей массы, когда возрастает абсолютный максимум $\bar{u}_3^0$, смещаясь при этом в область меньших волновых чисел. В начальном диапазоне волновых чисел амплитуда КИН $\bar{K}_1$ стремительно возрастает от нулевого значения (фиг. 3). Дальнейшее увеличение k в случае включений большой массы приводит к локальному максимуму $\bar{K}_1$. Для высших волновых чисел характерно сближение значений $\bar{K}_1$ для включений различных масс с последующим выходом на линейную зависимость $\bar{K}_1$ от k , что согласуется со степенью роста напряжений в генерирующей волне.

Аналогичное поведение (с разницей в количественных показателях) при касательном падении волны на включение наблюдается для амплитуд поступательных пере-

мещений $\bar{u}_1^0$ (фиг. 2), амплитуд КИН поперечного сдвига $\bar{K}_2$ в точке набегания волны (фиг. 4) и амплитуд КИН продольного сдвига $\bar{K}_3$ (фиг. 5). В точке схода волны фиксируются абсолютные максимумы $\bar{K}_2$ (фиг. 4), при этом $\bar{K}_2(\pi) > \bar{K}_2(0)$. Имеет место различие в характере сближения КИН в области больших волновых чисел: если для K_3 (как и для K_1 в предыдущем случае) при увеличении массы включения это сближение сверху, то для K_2 – снизу.

Работа выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (01.07.00133).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стащук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка, 1983. 288 с.
2. Александров А.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
3. Гольдштейн Р.В., Капцов А.В. О трещине нормального отрыва в упругой среде под действием гармонической волны // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 6. С. 93–100.
4. Kit H.S., Khaj M.V., Mykhas'kiv V.V. Analysis of dynamic stress concentration in an infinite body with parallel penny-shaped cracks by BIEM // Engng. Fract. Mech. 1996. V. 55. № 2. P. 191–207.
5. Zhang Ch., Gross D. On Wave Propagation in Elastic Solid with Cracks. Southampton: Computational Mechanics Publ., 1998. 248 p.
6. Wen P.H., Aliabadi M.H., Rooke D.P. A mass-matrix formulation for three-dimensional dynamic fracture mechanics // Comp. Methods Appl. Mech. Engng. 1999. V. 173. № 3–4. P. 365–374.
7. Kit H.S., Kunets Ya.I., Yemets V.F. Elastodynamic scattering from a thin-walled inclusion of low rigidity // Intern. J. Eng. Sci. 1999. V. 37. № 3. P. 331–345.
8. Попов В.Г. Дифракция плоских упругих волн на отслоившемся жестком включении в случае гладкого контакта в области отслоения // ПММ. 1998. Т. 62. № 2. С. 290–296.
9. Hirose S., Achenbach J.D. BEM method to analyze the interaction of an acoustic pulse with a rigid circular disk // Wave Motion. 1988. V. 10. № 3. P. 267–275.
10. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
11. Balas J., Sládek J., Sládek V. Stress Analysis by Boundary Element Methods. Amsterdam: Elsevier, 1989. 521 p.
12. Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения. Киев: Наук. думка, 1993. 252 с.
13. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.