

УДК 539.3

© 2002 г. В.К. Лащенко

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА, ОБЖАТОГО НЕПОДВИЖНОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Методом кусочно-однородных решений (КОР) [1] решается стационарная смешанная задача о движении трансверсально-изотропного упругого кругового цилиндра, обжатого конечной упругой оболочкой. Используется одно из полученных соотношений обобщенной ортогональности для однородных решений. Рассмотрены два частных случая: 1) полубесконечная оболочка надета на движущийся цилиндр с заданным натягом, край оболочки свободен от усилий, пригрузка отсутствует, 2) на оболочку действует сосредоточенная опоясывающая нагрузка. Решение задачи о полубесконечной оболочке и система КОР построены в квадратурах методом Винера – Хопфа.

Аналогичная задача исследовалась [2] в статической постановке. Стационарные смешанные контактные задачи изучались ранее [3–10].

1. Ортогональность однородных решений. Соотношения ортогональности для однородных решений [10] позволили эффективно применять метод КОР к динамическим задачам теории упругости о стационарном разнородном движении контактирующих бесконечных ортотропных цилиндров и слоев. Выведем соотношение обобщенной ортогональности для решения методом КОР осесимметричной задачи о стационарном движении трансверсально-изотропного упругого кругового цилиндра по неподвижной тонкой круговой цилиндрической оболочке.

В цилиндрической системе координат $Or\theta z$ в случае двух круговых трансверсально-изотропных цилиндров $0 \leq r \leq R_1$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $-\infty < z_1 < +\infty$ и $R_1 \leq r \leq R_2$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $-\infty < z_2 < +\infty$, движущихся относительно этой системы со скоростями w_1 и w_2 , $z_1 = z - w_1 t$, $z_2 = z - w_2 t$, где t – время, соотношение ортогональности [10] принимает вид

$$\left(\int_0^{R_1} + \int_{R_1}^{R_2} \right) [(\mathbf{u}^m, \mathbf{M}^n) - (\mathbf{M}^m, \mathbf{u}^n)] r dr = 0, \quad m \neq -n \quad (1.1)$$

В силу осевой симметрии вектор смещений $\mathbf{u}^m$ имеет только две ненулевые компоненты u_r^m и u_z^m – радиальное и осевое смещения, компоненты вектора $\mathbf{M}^m = \{M_1^m, M_2^m\}$ имеют вид

$$M_1^m = \mu \frac{c^2}{c_2^2} \frac{\partial u_z^m}{\partial r} + \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) \tau_{rz}^m, \quad M_2^m = \lambda \frac{c^2}{c_1^2} \left(\frac{\partial u_r^m}{\partial r} + \frac{u_r^m}{r} \right) + \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) \sigma_z^m \quad (1.2)$$

Здесь τ_{rz}^m, σ_z^m – касательные и нормальные напряжения; верхний индекс m указывает на то, что рассматриваемые составляющие однородного решения определяются m -м корнем p_m ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) дисперсионного уравнения, $p_{-m} = -p_m$;

$c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $c_2^2 = \mu/\rho$, c_1, c_2 – скорости волн сжатия и сдвига; λ, μ – коэффициенты Ламе, ρ – плотности, c – скорости, имеющие для первого и второго цилиндров значения $\lambda_1, \mu_1, \rho_1, w_1$ и $\lambda_2, \mu_2, \rho_2, w_2$ соответственно; $(\cdot)$ – скалярное произведение.

Уменьшая радиус R_2 , изменим толщину полого цилиндра до малой величины h , принимаемой за толщину оболочки радиуса $R = R_1 + h/2$. Представим второй интеграл в соотношении (1.1) в виде

$$\int_{R_1}^{R_2} [(\mathbf{u}^m, \mathbf{M}^n) - (\mathbf{M}^m, \mathbf{u}^n)] r dr = I_{mn} - I_{nm} \quad (1.3)$$

$$I_{mn} = \int_{R-h/2}^{R+h/2} (u_r^m M_1^n - M_2^m u_z^n) r dr$$

Согласно выражениям (1.2), с учетом того, что перемещения u_r и u_z в осесимметричных задачах зависят только от координаты z , т.е. полагаются постоянными по толщине оболочки, имеем

$$I_{mn} = \left(1 - \frac{w_2^2}{c_2^2}\right) R u_r^m P^n - \left(1 - \frac{w_2^2}{c_1^2}\right) M^m u_z^n - \lambda h \frac{w_2^2}{c_1^2} u_r^m u_z^n \quad (1.4)$$

где M^m, P^m – момент и перерезывающая сила. Подставив выражение (1.4) в формулу (1.3) и затем найденное выражение в равенство (1.1), получим обобщенное соотношение ортогональности с нагрузкой

$$\int_0^{R_1} [(\mathbf{u}^m, \mathbf{M}^n) - (\mathbf{M}^m, \mathbf{u}^n)] r dr + \left(1 - \frac{w_2^2}{c_2^2}\right) R (u_r^m P^n - P^m u_r^n) +$$

$$+ \left(1 - \frac{w_2^2}{c_1^2}\right) (u_z^m M^n - M^m u_z^n) - \lambda h \frac{w_2^2}{c_1^2} (u_r^m u_z^n - u_z^m u_r^n) = 0, \quad m \neq -n$$

Отсюда, повторив преобразования соотношений ортогональности [10], основанные на переходе к однородным решениям, составляющие которых зеркально симметричны относительно плоскости $z = 0$, получим

$$\int_0^{R_1} (u_r^m M_1^n - M_2^m u_z^n) r dr + I_{mn} = 0, \quad m^2 \neq n^2 \quad (1.5)$$

Величины u_r, u_z, h малы по сравнению с другими, поэтому соотношение (1.5) можно упростить, отбросив в нем выражение, содержащее произведение указанных величин. В цилиндрической системе координат, связанной с неподвижной оболочкой ($w_2 = 0$), соотношение (1.5) принимает вид

$$\int_0^{R_1} (u_r^m M_1^n - M_2^m u_z^n) r dr + R u_r^m P^n - M^m u_z^n = 0, \quad m^2 \neq n^2 \quad (1.6)$$

2. Постановка и решение неоднородной задачи о полубесконечной оболочке. В цилиндрической системе координат $Or\theta z$ рассмотрим задачу о контакте неподвижной полубесконечной круговой оболочки $r = R, -\pi < \theta \leq \pi, z \geq 0$ постоянной малой толщины h с упругим цилиндром $0 \leq r \leq 1, -\pi < \theta \leq \pi, -\infty < z_1 < +\infty$, движущимся с постоянной дорелеевской скоростью $c, z_1 = z - ct$. Нагрузка $g(z)$, действующая на оболочку, изгибающий момент P_1 и перерезывающая сила P_2 , приложенные к ее кромке, а также пригрузка $f(z)$ на свободной части цилиндра осесимметричны. Трения между оболочкой и цилиндром нет.

Граничные условия для упругого цилиндра при $r = 1$ имеют вид

$$\tau_{rz} = 0, \quad -\infty < z < +\infty \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = f(z), \quad z < 0; \quad \eta(z) = \frac{g(z)}{D} + \gamma \left(R - 1 - \frac{h}{2} \right), \quad z > 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^n u_r}{\partial z^n} = -\frac{P_{n-1}}{D}, \quad z = 0, \quad n = 2, 3 \quad (2.3)$$

где

$$\eta(z) \equiv \frac{\partial^4 u_r}{\partial z^4} + \gamma u_r + \frac{\sigma_r}{D}, \quad \gamma = \frac{E_0 h}{DR^2}$$

D, E_0 – изгибная жесткость и модуль упругости оболочки.

Решение задачи будем искать с помощью потенциалов Ламе, удовлетворяющих в осесимметричном случае в подвижной системе координат $O_1 r_1 \theta_1 z_1$, $r_1 = r$, $\theta_1 = \theta$, $z_1 = z - ct$ уравнениям

$$\Delta \phi_1 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}, \quad \Delta \psi_1 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{\psi_1}{r_1^2}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad (2.4)$$

Компоненты вектора смещений $\mathbf{u}_1$ и тензора напряжений определяются известными формулами [11]

$$u_r(z_1, r_1, t) = \frac{\partial \phi_1}{\partial r_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}, \quad u_z(z_1, r_1, t) = \frac{\partial \phi_1}{\partial z_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial(r_1 \psi_1)}{\partial r_1} \quad (2.5)$$

$$\sigma_r = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r_1^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1 \partial r_1} \right) + \lambda \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z_1^2}, \quad \tau_{rz} = 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r_1 \partial z_1} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1^2} \right) + \mu \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1^2}$$

λ, μ – коэффициенты Ламе.

В силу стационарности решения

$$\mathbf{u}_1(z_1, r_1, t) = \mathbf{u}_1(z_1 + ct, r_1, 0) = \mathbf{u}_1(z, r, 0) \quad (2.6)$$

Пусть

$$\mathbf{u}(z, r) = \mathbf{u}_1(z, r, 0) \quad (2.7)$$

Тогда из соотношений (2.6), (2.7) следует

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1(z_1, r_1, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}_1(z, r, 0)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = c \frac{\partial \mathbf{u}(z, r)}{\partial z} \quad (2.8)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1(z_1, r_1, t)}{\partial r_1} = \frac{\partial \mathbf{u}(z, r)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_1(z_1, r_1, t)}{\partial z_1} = \frac{\partial \mathbf{u}(z, r)}{\partial z} \quad (2.9)$$

В системе координат $Or\theta z$, связанной с оболочкой, соотношения (2.5) в силу равенств (2.9) сохраняют свой вид, а для уравнений (2.4), положив

$$\phi(z, r) = \phi_1(z_1 + ct, r_1, 0), \quad \psi(z, r) = \psi_1(z_1 + ct, r_1, 0)$$

согласно равенствам (2.8), имеем

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + a^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

$$a^2 = 1 - c^2 / c_1^2, \quad b^2 = 1 - c^2 / c_2^2$$

или в трансформантах Лапласа

$$\Phi(p, r) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z, r) e^{-pz} dz, \quad \Psi(p, r) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z, r) e^{-pz} dz \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + a^2 p^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + (b^2 p^2 - \frac{1}{r^2}) \Psi = 0 \quad (2.11)$$

Учитывая ограниченность искомых решений на оси цилиндра, возьмем решения уравнений (2.11) в виде функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно

$$\Phi(p, r) = A(p) J_0(apr), \quad \Psi(p, r) = B(p) J_1(bpr)$$

где $A(p), B(p)$ – функции, определяемые граничными условиями задачи.

Путем обращения формул (2.10) из соотношений (2.5) получим

$$u_r(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [\Phi'(p, r) - p\Psi(p, r)] e^{pz} dp \quad (2.12)$$

$$u_z(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [p\Phi(p, r) + \frac{\Psi(p, r)}{r} + \Psi'(p, r)] e^{pz} dp$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по r , L – прямая $\operatorname{Re} p = \epsilon$.

Подставив выражение

$$\tau_{rz}(z, r) = \frac{\mu}{2\pi i} \int_L p[2\Phi'(p, r) - (1 + b^2)p\Psi(p, r)] e^{pz} dp$$

(следствие закона Гука и формул (2.12)) в граничные условия (2.1), с точностью до произвольного множителя $C(p)$ найдем

$$A(p) = -\mu(1 + b^2) J_1(bp), \quad B(p) = 2a\mu J_1(ap)$$

Формулы (2.12) принимают вид

$$u_r(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) U_1(p, r) e^{pz} dp, \quad u_z(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) U_2(p, r) e^{pz} dp \quad (2.13)$$

$$U_1(p, r) = a\mu p[(1 + b^2) J_1(apr) J_1(bp) - 2J_1(ap) J_1(bpr)]$$

$$U_2(p, r) = \mu p[2ab J_0(bpr) J_1(ap) - (1 + b^2) J_0(apr) J_1(bp)] \quad (2.14)$$

Запишем смешанные граничные условия (2.2) в трансформантах Лапласа

$$\sigma^+(p) + \sigma^-(p) = C(p) p N_1(p), \quad \eta^+(p) + \eta^-(p) = C(p) p N_2(p), \quad p \in L \quad (2.15)$$

$$\sigma^+(p) = \int_0^{+\infty} \sigma_r(z, 1) e^{-pz} dz, \quad \sigma^-(p) = \int_{-\infty}^0 f(z) e^{-pz} dz$$

$$\eta^+(p) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{g(z)}{D} + \gamma \left(R - 1 - \frac{h}{2} \right) \right] e^{-pz} dz, \quad \eta^-(p) = \int_{-\infty}^0 \eta(z) e^{-pz} dz$$

$$N_1(p) = \mu^2 \{ [(1 + b^2)^2 J_0(ap) J_1(bp) - 4ab J_0(bp) J_1(ap)] p + 2a(1 - b^2) J_1(ap) J_1(bp) \}$$

$$N_2(p) = N_1(p) D^{-1} - a\mu c^2 c_2^{-2} (p^4 + \gamma) J_1(ap) J_1(bp)$$

Верхние индексы плюс и минус означают аналитичность функций в правой и левой полуплоскостях соответственно.

Поскольку $N_j(-p) = N_j(p)$ и $N_j(\bar{p}) = \overline{N_j(p)}$ ($j = 1, 2$), то нули этих функций расположены симметрично относительно координатных осей комплексной плоскости, их мнимые части ограничены [12]. Нули функций $N_1(p)$, $N_2(p)$, лежащие в правой полуплоскости и имеющие неотрицательные мнимые части, перенумеруем в порядке возрастания их вещественных частей и обозначим a_k и b_k ($k = 1, 2, \dots$). Известно, что функции Бесселя $J_n(ap)$ ($n = 0, 1$) имеют только вещественные нули, удовлетворяющие асимптотическим формулам $p_k = \pi(k + n/2 + 3/4)/a + O(1/k)$. Обозначим через d_k положительные нули произведения $J_1(ap)J_1(bp)$, перенумерованные в порядке возрастания. Тогда для больших номеров k справедливы формулы [12]

$$\operatorname{Re} a_k = \pi(k + k_0)/(a + b) \quad (|k_0| \leq 2), \quad \operatorname{Re} b_k = d_k + O(k^{-3}) \quad (2.16)$$

Исключив функцию $C(p)$ из уравнений (2.15), приходим к уравнению Винера – Хопфа

$$\eta^+(p) + \eta^-(p) = K(p)[\sigma^+(p) + \sigma^-(p)], \quad K(p) = N_2(p)/N_1(p), \quad p \in L \quad (2.17)$$

Найдем решение однородного уравнения

$$\eta_0^-(p) = K(p)\sigma_0^+(p), \quad p \in L \quad (2.18)$$

Разобьем уравнение (2.18) на две задачи Римана [13]

$$\eta_j^-(p) = K_j(p)\sigma_j^+(p), \quad p \in L, \quad j = 1, 2$$

$$\sigma_0^+(p) = \sigma_1^+(p)\sigma_2^+(p), \quad \eta_0^-(p) = \eta_1^-(p)\eta_2^-(p)$$

Заметив, что

$$K(0) = \lim_{p \rightarrow 0} K(p) = \frac{\Delta}{\delta D}, \quad K(i\beta) \sim A|\beta|^3, \quad \beta \rightarrow \pm\infty$$

$$\delta = a^2(1 - b^2) + (1 + b^2)^2 - 4a^2, \quad \Delta = \delta - \frac{a^2(1 - b^2)E_0 h}{2R^2 \mu}, \quad A = \frac{a(1 - b^2)}{\mu R(c)}$$

($R(c) = 4ab - (1 + b^2)^2$ – функция Релея), положим $K_1(p) = Ap^3 \operatorname{ctg}^3 \pi p$. Факторизация котангенса дает

$$\sigma_1^+(p) = A^{-1/2} \Gamma^3(1/2 + p) / \Gamma^3(1 + p)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_1^+(p) \sim A^{-1/2} p^{-3/2}, \quad p \rightarrow \infty$$

Функция $K_2(p) = K(p)/K_1(p)$ на мнимой оси вещественна, не имеет нулей и полюсов; кроме того,

$$K_2(0) = \Delta \pi^3 (AD\delta)^{-1}, \quad K_2(i\beta) = 1 + O(e^{-2\pi|\beta|}), \quad \beta \rightarrow \pm\infty$$

Поскольку функция $K_2(p)$ на мнимой оси не меняет своего знака, ее индекс равен нулю. Следовательно, решение второй задачи Римана имеет вид [13]

$$\sigma_2^+(p) = \exp \left\{ -\frac{p}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln K_2(it)}{t^2 + p^2} dt \right\}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$\sigma_2^+(i\beta) = K_2^{-1/2}(i\beta) \exp \left\{ \frac{\beta}{\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{\ln [K_2(it)/K_2(i\beta)]}{t^2 - \beta^2} dt \right\}$$

Из уравнений (2.17) и (2.18) следует

$$\frac{\eta^-(p)}{\eta_0^-(p)} + \frac{\eta^+(p)}{\eta_0^+(p)} = \frac{\sigma^+(p)}{\sigma_0^+(p)} + \frac{\sigma^-(p)}{\sigma_0^-(p)}, \quad p \in L \quad (2.19)$$

Частные случаи. 1°. Пусть тонкая оболочка надета на движущийся цилиндр с натягом l . Положим в условиях (2.2), (2.3)

$$f(z) = g(z) = 0, \quad R = 1 + h/2 - l, \quad P_1 = P_2 = 0$$

Данную задачу разобьем на основную

$$\tau_{rz} = 0, \quad \eta(z) = -\gamma l, \quad -\infty < z < +\infty, \quad r = 1$$

решение которой находится элементарно

$$u_r^l = \sigma_r^l \frac{1-\nu}{E} r, \quad u_z^l = -2\sigma_r^l \frac{\nu}{E} z, \quad \sigma_r^l = -l \left(\frac{1-\nu}{E} + \frac{R^2}{E_0 h} \right)^{-1} \quad (2.20)$$

(E, ν – упругие характеристики цилиндра), и смешанную

$$\tau_{rz} = 0, \quad -\infty < z < +\infty, \quad r = 1$$

$$\sigma_r = -\sigma_r^l, \quad z < 0, \quad r = 1; \quad \eta(z) = 0, \quad z > 0 \quad (2.21)$$

$$P_1 = P_2 = 0, \quad z = 0, \quad r = 1$$

Согласно условиям (2.21),

$$\sigma^-(p) = -\sigma_r^l \int_{-\infty}^0 e^{-pz} dz = \frac{\sigma_r^l}{p}, \quad \eta^+(p) = 0$$

Из соотношения (2.19) на основании асимптотических оценок

$$\sigma_0^+(p) = O(p^{-3/2}), \quad \frac{\sigma^+(p)}{\sigma_0^+(p)} = O(p), \quad p \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

найденных по теореме абелева типа [14] при учете ограниченности локальной энергии деформации цилиндра в окрестности края оболочки, по обобщенной теореме Лиувилля получим

$$\sigma^+(p) + \sigma^-(p) = \frac{\sigma_r^l}{\sigma_0^+(p)} \sigma_0^+(p) (p^{-1} + A_- p + B_-), \quad \sigma_0^+(0) = \left(\frac{D\delta}{\Delta} \right)^{1/2} \quad (2.23)$$

Постоянные A_- и B_- найдем из условий равновесия половины оболочки $r = R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq z < +\infty$. Пусть на единицу длины торца оболочки действует момент P_1 , вектор которого направлен по θ , и перерезывающая сила P_2 , направленная противоположно радиусу r . Тогда

$$\int_0^\pi P_2 \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \sigma_r(z, 1) \sin \theta dz d\theta + \int_0^\pi \eta^+(0) \sin \theta d\theta - 2 \int_0^{+\infty} N_\theta(z) dz \quad (2.24)$$

$$\int_0^\pi P_1 \sin \theta d\theta = \int_0^\pi \int_0^{+\infty} \sigma_r(z, 1) z \sin \theta dz d\theta + \int_0^\pi \eta^{+*}(0) \sin \theta d\theta + 2 \int_0^{+\infty} N_\theta(z) z dz$$

Здесь

$$\eta^+(0) = \int_0^{+\infty} \eta(z) dz, \quad \eta^{+*}(0) = - \int_0^{+\infty} \eta(z) z dz, \quad N_\theta(z) = \frac{E_0 h}{R} u_r(z, 1)$$

Звездочка означает дифференцирование по p , $N_\theta(z)$ – кольцевое усилие в оболочке. Подставив в соотношения (2.24)

$$\sigma_r(z, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [\sigma^+(p) + \sigma^-(p)] e^{pz} dp \quad (2.25)$$

поменяв порядки интегрирования и проинтегрировав по θ и z , в силу однородных условий смешанной задачи приходим к двум уравнениям

$$\frac{\sigma_r^l}{\sigma_0^+(0)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \sigma_0^+(p) (p^{-1} + A_- p + B_-) \frac{N_3(p)}{p^j N_1(p)} dp = 0, \quad j = 1, 2$$

где

$$N_3(p) = N_1(p) + \xi J_1(ap) J_1(bp), \quad \xi = -a\mu c^2 c_2^{-2} E_0 h R^{-1}$$

Замыкая контур L справа полуокружностями большого радиуса, проходящими между нулями функции $N_1(p)$, по теореме о вычетах получим

$$A_- = \frac{S_3^2 - S_2 S_4}{S_2^2 - S_1 S_3}, \quad B_- = \frac{S_1 S_4 - S_2 S_3}{S_2^2 - S_1 S_3}$$

$$S_1 = \sum_{m=1}^{+\infty} q_m, \quad S_s = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q_m}{a_m^{s-1}} + \frac{\zeta}{(s-2)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^{s-2}}{dp^{s-2}} \sigma_0^+(p), \quad s = 2, 3, 4$$

$$q_k = \frac{\sigma_0^+(a_k) N_3(a_k)}{N_1'(a_k)}, \quad \zeta = 1 + \frac{a\xi}{2\mu^2 \delta}$$

$$\sigma_0^{+*}(0) = -\sigma_0^+(0) \left[6 \ln 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln[K_2(it)/K_2(0)]}{t^2} dt \right]$$

Подставим выражение (2.23) в левую часть первого равенства (2.15) и найдем функцию $C(p)$. Тогда, согласно формулам (2.13), интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} f(p, l) U_q(p, r) e^{pz} dp, \quad f(p, l) = \frac{\sigma_r^l \eta_0^-(p)}{\sigma_0^+(0) p N_2(p)} (p^{-1} + A_- p + B_-) \quad (2.26)$$

$$q = 1, \dots, 5; \quad u_1 = u_r, \quad u_2 = u_z, \quad u_3 = \sigma_r, \quad u_4 = \tau_{rz}, \quad u_5 = \sigma_z$$

является решением смешанной задачи (2.21) и в сумме с решением (2.20) образует искомые функции $u_{q-}^l(z, r)$. Здесь L_- – контур интегрирования, совпадающий с мнимой осью, за исключением точки $p = 0$, которую он обходит справа по полуокружности малого радиуса; трансформанты $U_q(p, r)$ определены формулами (2.14) при $q = 1, 2$ и следующими выражениями:

$$U_3(p, r) = \mu^2 p \left\{ (1 + b^2) J_1(bp) \left[(1 + b^2) p J_0(apr) - 2a J_1(apr) r^{-1} \right] - \right. \\ \left. - 4a J_1(ap) \left[bp J_0(bpr) - J_1(bpr) r^{-1} \right] \right\}$$

$$U_4(p, r) = 2a(1 + b^2) \mu^2 p^2 [J_1(apr) J_1(bp) - J_1(ap) J_1(bpr)]$$

$$U_5(p, r) = \mu p^2 \left\{ 4ab\mu J_0(bpr) J_1(ap) - (1 + b^2) \left[2\mu + \lambda(1 - a^2) \right] J_0(apr) J_1(bp) \right\}$$

2°. Пусть теперь на оболочку при $z = l_1$ действует сосредоточенная опоясывающая нагрузка $-P$, край оболочки свободен от усилий, пригрузка отсутствует. В условиях (2.2), (2.3) положим

$$f(z) = 0, \quad g(z) = -P\delta(z - l_1), \quad R = 1 + h/2, \quad P_1 = P_2 = 0 \quad (2.27)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Поставленную задачу разобьем на основную

$$\tau_{rz} = 0, \quad \eta(z) = -PD^{-1}\delta(z - l_1), \quad -\infty < z < +\infty, \quad r = 1$$

решение которой находится по формулам (2.13) при

$$C(p) = \frac{\eta^+(p) + \eta^-(p)}{pN_2(p)} = -\frac{P}{DpN_2(p)} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - l_1) e^{-pz} dz = -\frac{Pe^{-pl_1}}{DpN_2(p)}$$

и корректирующую

$$\tau_{rz} = 0, \quad -\infty < z < +\infty, \quad r = 1$$

$$\sigma_r = -\sigma_r^\delta(z, 1), \quad z < 0, \quad r = 1; \quad \eta(z) = 0, \quad z > 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^n u_r}{\partial z^n} = -\frac{P_{n-1}^\delta}{D}, \quad z = 0, \quad r = 1, \quad n = 2, 3$$

где

$$\sigma_r^\delta(z, 1) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k e^{b_k z}, \quad P_{n-1}^\delta = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k N_3(b_k)}{b_k^{4-n} N_1(b_k)}, \quad f_k = \frac{PN_1(b_k) e^{-b_k l_1}}{DN_2'(b_k)}$$

– радиальное напряжение, момент ($n = 2$) и перерезывающая сила ($n = 3$), определяемые основной задачей.

Подставив в уравнение (2.19) трансформанты Лапласа, соответствующие условиям (2.28), благодаря асимптотическим оценкам (2.22) имеем

$$\sigma^+(p) + \sigma^-(p) = \sigma_0^+(p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\sigma_0^+(b_k)} \left(\frac{1}{p - b_k} + A_k p + B_k \right)$$

Постоянные A_k и B_k вычисляются тем же способом, что и коэффициенты A_- и B_- в задаче о натяге. Подставив последнее выражение в правую часть равенства (2.25), из условий равновесия получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\sigma_0^+(b_k)} [A_k S_j + B_k S_{1+j} - S_{4+j}(b_k)] = 0, \quad j = 1, 2$$

$$S_{4+j}(b_k) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{q_m}{a_m^j(b_k - a_m)} + \frac{\zeta \sigma_0^+(0)}{b_k^j} + (j-1) \frac{\zeta \sigma_0^{+*}(0)}{b_k} + \frac{\sigma_0^+(b_k) N_3(b_k)}{b_k^j N_1(b_k)}$$

Отсюда

$$A_k = \frac{S_2 S_6(b_k) - S_3 S_5(b_k)}{S_2^2 - S_1 S_3}, \quad B_k = \frac{S_2 S_5(b_k) - S_1 S_6(b_k)}{S_2^2 - S_1 S_3} \quad (2.29)$$

Возвращаясь к уравнениям (2.15), (2.18), находим

$$C(p) = \frac{\eta_0^-(p)}{pN_2(p)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k}{\sigma_0^+(b_k)} \left(\frac{1}{p-b_k} + A_k p + B_k \right), \quad \operatorname{Re} p < 0$$

Подставив это выражение в формулы (2.13), путем суперпозиции получим решение задачи (2.1), (2.27)

$$u_{q-}^\delta(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{g(p, l_1)}{pN_2(p)} U_q(p, r) e^{pz} dp, \quad q = 1, \dots, 5 \quad (2.30)$$

$$g(p, l) = -\frac{P}{D} \left[e^{-pl} - \eta_0^-(p) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_1(b_k) e^{-b_k l}}{\sigma_0^+(b_k) N_2'(b_k)} \left(\frac{1}{p-b_k} + A_k p + B_k \right) \right]$$

3. Постановка задачи о конечной оболочке. Рассмотрим задачу о движении с постоянной дорелевской скоростью c бесконечного кругового трансверсально-изотропного цилиндра $0 \leq r_1 \leq 1$, $-\pi < \theta_1 \leq \pi$, $-\infty < z_1 < +\infty$ относительно тонкой оболочки конечной длины, которая обжимает его с натягом l ; кроме того, на оболочку действует сосредоточенная опоясывающая нагрузка $-P$. В неподвижной системе координат $O_0 r_0 \theta_0 z_0$, $r_0 = r_1$, $\theta_0 = \theta_1$, $z_0 = z_1 + ct$, граничные условия задачи при $r = 1$ имеют вид (нулевые индексы текущих координат опущены)

$$\tau_{rz} = 0, \quad -\infty < z < +\infty$$

$$\sigma_r = 0, \quad z < -l_3, \quad z > l_4; \quad \eta(z) = -\gamma l - \frac{P}{D} \delta(z + l_3 - l_1), \quad -l_3 < z < l_4$$

$$\frac{\partial^n u_r}{\partial z^n} = -\frac{P_{n-1}}{D}; \quad z = -l_3; \quad \frac{\partial^n u_r}{\partial z^n} = -\frac{P_{n+1}}{D}, \quad z = l_4; \quad n = 2, 3$$

P_3 – момент, вектор которого направлен против θ , P_4 – перерезывающая сила, действующая в радиальном направлении, как указано на фигуре.

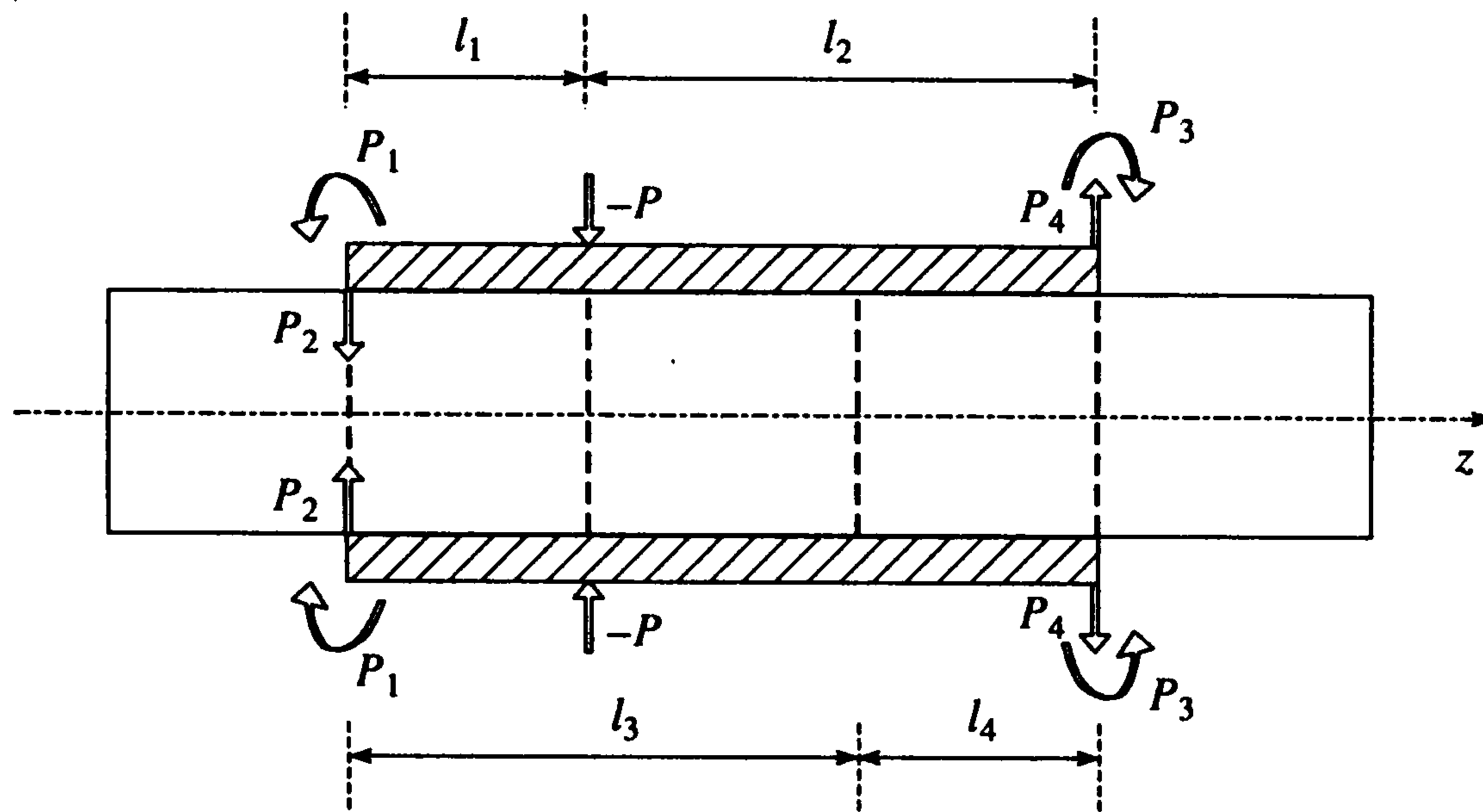
В полубесконечном цилиндре $0 \leq r_0 \leq 1$, $-\pi < \theta_0 \leq \pi$, $z_0 < 0$ решение строим в системе $Or\theta z$, $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, $z = z_0 + l_3$, в виде суммы неоднородных решений $u_{q-}^l(z, r)$, $u_{q-}^\delta(z, r)$, определяемых формулами (2.20), (2.26), (2.30), и ряда по КОР, удовлетворяющих однородным условиям (2.1)–(2.3), с особенностями при $z = +\infty$. При $0 \leq r_0 \leq 1$, $\theta = \theta_0$, $z_0 > 0$ решение будем искать в координатах $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, $z = z_0 - l_4$ в аналогичной форме для основного условия (2.1) и смешанных условий

$$\eta(z) = -\gamma l - \frac{P}{D} \delta(z + l_2), \quad z < 0; \quad \sigma_r = 0, \quad z > 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^n u_r}{\partial z^n} = -\frac{P_{n+1}}{D}, \quad z = 0, \quad n = 2, 3 \quad (3.2)$$

с особенностями в КОР при $z = -\infty$.

Коэффициенты в рядах по КОР найдем при помощи соотношений ортогональности (1.6) из условия непрерывности решений в сечении $z_0 = 0$, $0 \leq r_0 \leq 1$, считая для определенности, что оно расположено правее опоясывающей нагрузки: $l_1 < l_3$, $l_2 > l_4$; l_s ($s = 1, \dots, 4$) – положительные постоянные.



4. Подсистемы КОР. Построим две подсистемы КОР. Согласно изложенному в разд. 3, каждый элемент первой подсистемы должен удовлетворять однородным условиям (2.1)–(2.3) и иметь особенность при $z = +\infty$. Эти элементы представимы в виде суммы решения основной задачи (2.1), $\eta(z) = 0$ ($-\infty < z < +\infty$), которое находится по формулам (2.14) при $p = b_k$, и решения корректирующей смешанной задачи, определяемой условиями (2.1),

$$\sigma_r = -\sigma_r^k(z, 1), \quad z < 0, \quad r = 1; \quad \eta(z) = 0, \quad z > 0 \quad (4.1)$$

$$P_1 = -P_1^k, \quad P_2 = -P_2^k, \quad z = 0, \quad r = 1 \quad (4.2)$$

Здесь

$$\sigma_r^k(z, 1) = C_k b_k N_1(b_k) e^{b_k z}, \quad P_1^k = C_k N_3(b_k) b_k^{-1}, \quad P_2^k = C_k N_3(b_k)$$

– нормальное напряжение, момент и перерезывающая сила из k -го ($k = 1, 2, \dots$) однородного решения основной задачи, C_k – произвольные постоянные.

Условия (4.1) приводят к уравнению Винера–Хопфа

$$\eta^-(p) = K(p) \left[\sigma^+(p) + C_k b_k N_1(b_k) (p - b_k)^{-1} \right], \quad p \in L$$

Повторив ход решения уравнения (2.17) с использованием на торце условий (4.2), получим

$$C(p) = \frac{C_k b_k N_1(b_k) p^2 \eta_0^-(p)}{\sigma_0^+(b_k) p N_2(p)} \left(\frac{1}{p - b_k} + A_k p + B_k \right)$$

Таким образом, в результате корректировки решений элементы первой подсистемы КОР принимают вид

$$u_{q-}^k(z, r) = C_k U_q(b_k, r) e^{b_k z} + \frac{C_k b_k N_1(b_k)}{2\pi i \sigma_0^+(b_k)} \int_{L_-} \frac{\eta_0^-(p)}{p N_2(p)} \left(\frac{1}{p - b_k} + A_k p + B_k \right) U_q(p, r) e^{pz} dp, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Коэффициенты A_k, B_k находятся по формулам (2.29).

Вторая подсистема КОР строится аналогично. Ее элементы $u_{q+}^k(z, r)$ ($k = -1, -2, \dots$) удовлетворяют однородным граничным условиям (2.1), (3.1), (3.2) и имеют особенность при $z = -\infty$. Они получаются заменой в правой части равенства (4.3) контура L_-

на L_+ (L_+ обходит точку $p = 0$ слева), $\eta_0^-(p)$ на $\eta_0^+(p)$, $\sigma_0^+(b_k)$ на $-\sigma_0^-(b_k)$, A_k, B_k на $-A_k, -B_k$, причем

$$\eta_0^+(p) = \eta_0^-(-p), \quad \sigma_0^-(p) = \sigma_0^+(-p), \quad A_{-k} = -A_k, \quad B_{-k} = B_k$$

5. Решение задачи о конечной оболочке. Согласно изложенному в разд. 3, решение задачи о конечной оболочке будем искать в виде

$$u_{q-}(z, r) = u_{q-}^l(z, r) + u_{q-}^\delta(z, r) + \sum_{k=1}^{+\infty} u_q^k(z, r) + \sum_{k \in Z_+^C} \bar{u}_q^k(z, r), \quad z < l_3 \quad (5.1)$$

$$u_{q+}(z, r) = u_{q+}^l(z, r) + u_{q+}^\delta(z, r) + \sum_{k=-1}^{-\infty} u_q^k(z, r) + \sum_{k \in Z_-^C} \bar{u}_q^k(z, r), \quad z > -l_4$$

где $u_{q+}^l(z, r) + u_{q+}^\delta(z, r)$ – решение задачи (2.1), (3.1), (3.2). Функции $u_{q+}^l(z, r)$, $u_{q+}^\delta(z, r)$ отличаются от $u_{q-}^l(z, r)$, $u_{q-}^\delta(z, r)$ (см. разд. 2) заменой $f(p, l)$, $g(p, l_1)$ и контура L_- соответственно на $f(-p, l)$, $g(-p, l_2)$, L_+ ; Z_+^C , Z_-^C – множества номеров комплексных нулей функции $N_2(p)$, расположенных в первой и третьей четверти комплексной плоскости, черточка означает комплексное сопряжение.

Постоянные C_k найдем из восьми условий непрерывности решения при $z_0 = 0$

$$u_{q-}(l_3, r) = u_{q+}(-l_4, r), \quad 0 < r < 1, \quad q = 1, 2, 4, 5 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial^s u_{1-}(l_3, 1)}{\partial z^s} = \frac{\partial^s u_{1+}(-l_4, 1)}{\partial z^s}, \quad s = 0, 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

заменяв два из условий (5.2) ($q = 4, 5$) на линейные комбинации

$$u_{6\pm}(z, r) = \mu \frac{c^2}{c_2^2} \frac{\partial u_{2\pm}}{\partial r} + \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) u_{4\pm}(z, r)$$

$$u_{7\pm}(z, r) = \lambda \frac{c^2}{c_1^2} \left(\frac{\partial u_{1\pm}}{\partial r} + \frac{u_{1\pm}}{r} \right) + \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) u_{5\pm}(z, r)$$

трансформанты которых имеют вид

$$U_6(p, r) = \mu \frac{c^2}{c_2^2} U_2'(p, r) + \left(1 - \frac{c^2}{c_2^2}\right) U_4(p, r)$$

$$U_7(p, r) = \lambda \frac{c^2}{c_1^2} \left[U_1'(p, r) + \frac{U_1(p, r)}{r} \right] + \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2}\right) U_5(p, r)$$

Подставим выражения (5.1) в новые условия (5.2) и разложим контурные интегралы в ряды по вычетам. Поменяв в двойных суммах порядок суммирования и заметив, что

$$U_q(-p, r) = (-1)^q U_q(p, r)$$

получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty} U_q(b_k, r) [X_k + (-1)^{q-1} X_{-k} + \Sigma(b_k)] +$$

$$+ \sum_{k \in Z_+^C} U_q(\bar{b}_k, r) [\bar{X}_k + (-1)^{q-1} \bar{X}_{-k} + \Sigma(\bar{b}_k)] + \delta_{1q} L(r) = 0 \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
X_{\pm k} &= C_{\pm k} e^{\pm b_k l_{\mp}}, \quad \Sigma(b_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^q X_n T_-(b_n, -b_k) - X_{-n} T_+(-b_n, b_k) + \right. \\
&+ (-1)^q S_-(-b_k, b_n) - S_+(b_k, -b_n) \left. \right] + \sum_{n \in Z_+^C} \left[(-1)^q \bar{X}_n T_-(\bar{b}_n, -b_k) - \bar{X}_{-n} T_+(-\bar{b}_n, b_k) \right] + \\
&+ (-1)^q S_-(-b_k, \bar{b}_n) - S_+(b_k, -\bar{b}_n) \left. \right] + Q_q(b_k) + R_q(b_k) \\
L(r) &= \frac{r}{\mu} \frac{c^2}{c_2^2} \left(\frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) \left(\frac{D}{\delta \Delta} \right)^{1/2}, \quad Q_q(t) = (-1)^{q-1} \frac{P \left[e^{t(l_1 - l_3)} - e^{t(l_4 - l_2)} \right]}{Dt N'_2(t)} \\
R_q(t) &= \frac{\sigma_r^l \eta_0^+(t)}{\sigma_0^+(0) t N'_2(t)} \left(t^{-1} + A_- t - B_- \right) \left[(-1)^{q-1} e^{-tl_3} + e^{-tl_4} \right] \\
S_{\pm}(t, \tau) &= \frac{P \eta_0^{\pm}(t) N_1(\tau)}{Dt N'_2(t) \sigma_0^{\mp}(\tau) N'_2(\tau)} \left(\pm \frac{1}{\tau - t} + A_{\mp n} t + B_{\mp n} \right) e^{tl_{\pm} - \tau k_{\pm}} \\
T_{\pm}(t, \tau) &= \frac{t N_1(t) \eta_0^{\pm}(\tau)}{\sigma_0^{\mp}(t) \tau N'_2(\tau)} \left(\frac{1}{\tau - t} \mp A_{\mp n} \tau \mp B_{\mp n} \right) e^{(\tau - t) l_{\pm}} \\
q &= 1, 2, 6, 7; \quad k_- = l_1, \quad k_+ = -l_2, \quad l_- = l_3, \quad l_+ = -l_4
\end{aligned}$$

Умножим обе части первого ($q = 1$) и четвертого ($q = 7$) уравнений системы (5.4) соответственно на $U_6(b_m, r)$ и $-U_2(b_m, r)$, второго ($q = 2$) и третьего ($q = 6$) на $-U_7(b_m, r)$ и $U_1(b_m, r)$. Сложим указанные пары уравнений и полученные равенства проинтегрируем по r от 0 до 1. Тогда в силу соотношения обобщенной ортогональности (1.6)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left[U_1(b_m, r) U_6(b_n, r) - U_7(b_m, r) U_2(b_n, r) \right] r dr + \\
&+ R U_1(b_m, 1) P^n - M^m U_2(b_n, 1) = 0, \quad m^2 \neq n^2, \quad R = 1 + h/2
\end{aligned}$$

при учете условий (5.3) получим нормальную систему Пуанкаре–Коха с двусторонним определителем

$$\begin{aligned}
&X_m \pm X_{-m} \mp \sum_{n=1}^{+\infty} \left[X_n T_-(b_n, -b_m) \pm X_{-n} T_+(-b_n, b_m) \right] \mp \\
&\mp \sum_{n \in Z_+^C} \left[\bar{X}_n T_-(\bar{b}_n, -b_m) \pm \bar{X}_{-n} T_+(-\bar{b}_n, b_m) \right] = \\
&= h_{\pm}(b_m) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[S_{\mp}(\mp b_m, \pm b_n) \pm S_{\pm}(\pm b_m, \mp b_n) \right] + \\
&+ \sum_{n \in Z_+^C} \left[S_{\mp}(\mp b_m, \pm \bar{b}_n) \pm S_{\pm}(\pm b_m, \mp \bar{b}_n) \right] \\
&h_+(b_m) = -Q_1(b_m) - R_1(b_m) + \\
&+ \left[DRL(1) b_m^3 U_1(b_m, 1) - \int_0^1 L(r) U_6(b_m, r) r dr \right] \times \\
&\times \left\{ \int_0^1 \left[U_1(b_m, r) U_6(b_m, r) - U_2(b_m, r) U_7(b_m, r) \right] r dr - D(Rb_m - 1) b_m^2 U_1^2(b_m, 1) \right\}^{-1} \\
&h_-(b_m) = Q_1(b_m) - R_2(b_m); \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Ее матричные элементы, согласно выражениям (2.16), экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов.

Изложенная здесь методика естественным образом обобщается на случаи любого конечного числа оболочек кусочно-постоянной жесткости, на задачу о двух полубесконечных оболочках на цилиндре, а также на задачи для периодических систем оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б.М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 620–631.
2. Глазовский В.Б., Нуллер Б.М. Осесимметричные контактные задачи для упругого цилиндра, подкрепленного цилиндрическими оболочками // Вестн. ЛГУ. 1973. Вып. 3. № 13. С. 87–94.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
5. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
6. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
7. Белоконь А.В., Шехов В.П. Смешанные задачи теории вязкоупругости с движущимися штампами // Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1983. С. 231–246.
8. Лащенков В.К., Нуллер Б.М. Стационарная задача отрыва полубесконечной балки от упругой полосы // Исследования по упругости и пластичности. Механика разрушения. Теория и эксперимент. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1995. Вып. 17. С. 68–74.
9. Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М. О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134–144.
10. Лащенков В.К., Нуллер Б.М. Метод кусочно-однородных решений в стационарных задачах теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 2. С. 321–331.
11. Nowacki W. Teoria sprężystości. Warszawa: Państw. wyd-wo naukowe, 1973 = Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. N.Y.; L.: Acad. Press, 1963 = Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
13. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
14. Noble B. Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L., etc.: Pergamon Press, 1958 = Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.