

УДК 539.3

© 2002 г. А.С. Миляев

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ ВНУТРИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УСТУПОМ

Представлено решение плоской задачи теории упругости о напряженном состоянии полуплоскости с уступом, в произвольной внутренней точке которой приложена сосредоточенная сила. Решение построено методом интегралов типа Коши, разработанным Н.И. Мухелишвили. Для конформного отображения полуплоскости с уступом на полуплоскость использована функция Коппенфельса. Приведены графики распределения максимальных касательных напряжений в окрестности точки приложения силы и траекторий главных растягивающих напряжений. Будучи точным и выраженным в элементарных функциях, представленное решение может быть использовано как тестовая задача при отладке численных решений, а также как составная часть пакетов компьютерных программ для автоматизированных расчетов и оптимизации конструктивных решений опор, заглубленных в откосы.

Задача о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости с уступом при действии внутренней сосредоточенной силы возникает в расчетах на прочность береговых заглубленных в грунт опор наплавных гидротехнических сооружений, удерживаемых наплаву с помощью канатов, закрепленных на береговом откосе горизонтально-протяженными анкерами, а также протяженных анкерных опор кабельных кранов, подвесных канатных дорог, висячих мостов, антенных сетей и других сооружений на склонах и откосах.

В случае однородного грунта для определения напряженно-деформированного состояния откосов можно использовать модель линейно деформируемой среды.

Решение задачи о напряженном состоянии упругой полуплоскости с прямолинейной границей (без уступа), во внутренней точке которой на мнимой оси приложена сосредоточенная сила, впервые было построено Меланом [1].

1. Постановка задачи. На полуплоскость с уступом высотой h , имеющим угол наклона πc ($c = p/q$, p, q – целые числа, $p < q$), в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ действует статически приложенная сосредоточенная сила $F_z = F_x + iF_y$ (i – мнимая единица), как показано на фиг. 1. Наружные грани полуплоскости с уступом свободны от нагрузок. Материал полуплоскости характеризуется модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Требуется найти распределение напряжений в полуплоскости с уступом.

Решение этой задачи, очевидно, будет справедливым и для задачи о действии на упругое полупространство с террасой нагрузки F_z , распределенной вдоль прямой, перпендикулярной к плоскости xOy . При этом будет иметь место не плоское напряженное состояние, а плоская деформация.

Заметим, что на фиг. 1 изображено зеркальное отражение верхней полуплоскости с уступом относительно оси x , поскольку в приводимом ниже решении используется конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ верхней полуплоскости с уступом на верхнюю полуплоскость ζ . Кроме границы уступа (жирная ломаная линия в координатах xO, yO) на фиг. 1 показаны несколько координатных линий $\eta = \text{const}$ криволинейной системы координат.

2. Метод решения. Задача имеет точное аналитическое решение, которое можно построить методом интегралов типа Коши [2].

Конформно отобразим область z уступа на полуплоскость ζ посредством функции

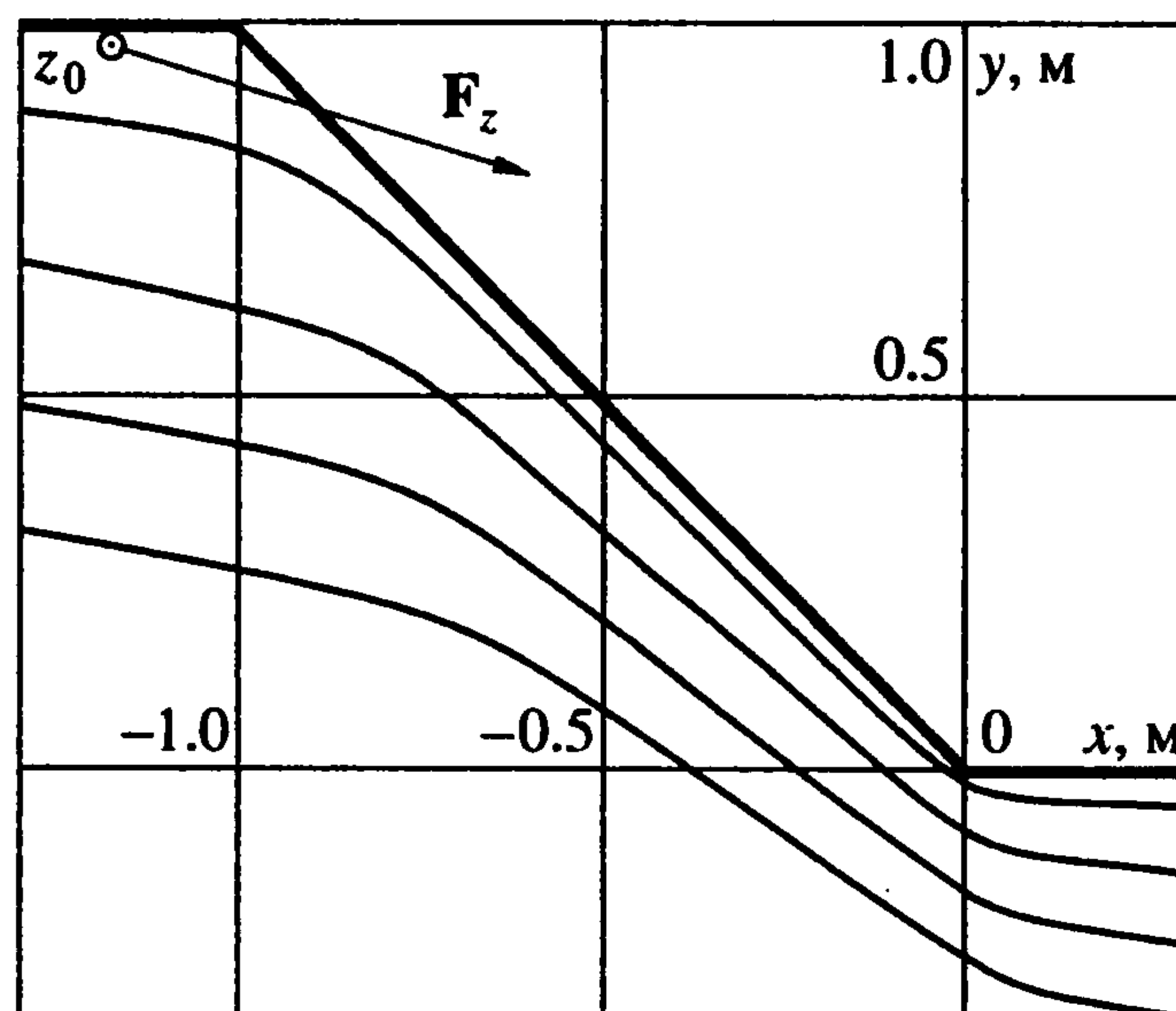
$$\omega(\zeta) = \frac{h}{\pi} \left[\frac{s^p}{c(1-s^q)} + \sum_{n=0}^{q-1} t_n^{p-q} \ln \left(1 - \frac{s}{t_n} \right) \right] \quad (2.1)$$

$$s = (1 - \zeta^{-1})^{1/q}, \quad \zeta > 0;$$

$$t_n = \exp(2n\pi i / q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, q-1$$

(s – функция, отображающая угловую область на полуплоскость, t_n – корни n -й степени из единицы).

Функция (2.1) впервые была получена [3] с помощью формулы Кристоффеля–Шварца для прямолинейных многоугольников, однако в выражение этой функции вкралась неточность. Позднее, на базе работы [3], функция (2.1) была построена заново [4], неточность устранена.



Фиг. 1

Отображение (2.1) можно рассматривать как введение на плоскости z криволинейной системы координат $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$:

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \zeta = \Omega(z), \quad \xi = \operatorname{Re} \Omega(z), \quad \eta = \operatorname{Im} \Omega(z)$$

где $\Omega(z)$ – функция, обратная к $\omega(\zeta)$;

Построить выражение для $\Omega(z)$ в элементарных функциях не удастся, поэтому в дальнейшем предполагается, что функция $\Omega(z)$ задана в табличной форме.

В целом задача будет решена, если будут найдены два комплексных потенциала $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$, удовлетворяющие граничному условию на свободной поверхности уступа при $\eta = 0$.

В плоскости ζ точке z_0 приложения силы F_z соответствует $\zeta_0 = \Omega(z_0)$, а самой силе – выражение [2]

$$F_\zeta = F_\xi + iF_\eta = \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{|\omega'(\zeta)|} (F_x + iF_y) \quad (2.2)$$

Решение задачи для сосредоточенной силы в полной плоскости z известно [2]; в криволинейной системе координат (ξ, η) это решение имеет вид

$$\Phi_1(\zeta) = \frac{-P_\zeta}{\omega(\zeta) - z_0}, \quad \Psi_1(\zeta) = \frac{\kappa \bar{P}_\zeta}{\omega(\zeta) - z_0} - \frac{\bar{z}_0 \bar{P}_\zeta}{(\omega(\zeta) - z_0)^2} \quad (2.3)$$

$$P_\zeta = \frac{F_\xi + iF_\eta}{2\pi(1+\kappa)}, \quad \kappa = \begin{cases} (1-\nu)/(1+\nu) \\ 3-4\nu \end{cases}$$

(значение в верхней строчке коэффициент κ принимает при плоском напряженном состоянии, а в нижней – при плоской деформации).

Далее индекс ζ в обозначении силы P опускаем.

Напряжения σ_ξ , σ_η , $\tau_{\xi\eta}$ в криволинейной системе координат (ξ, η) определяются формулами Колосова–Мусхелишвили [2, 5], из которых следует выражение для вектора напряжений $\sigma_\eta + i\tau_{\xi\eta}$, действующего на координатной линии $\eta = \text{const}$ и для сопряженного с ним вектора

$$\sigma_\eta + i\tau_{\xi\eta} = A_1(\zeta) + B_1(\zeta), \quad \sigma_\eta - i\tau_{\xi\eta} = A_1(\zeta) + \overline{B_1(\zeta)} \quad (2.4)$$

$$A_1(\zeta) = \Phi_1(\zeta) + \overline{\Phi_1(\zeta)}, \quad B_1(\zeta) = \frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi_1'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi_1(\zeta)]$$

Сосредоточенная сила, приложенная в точке $\zeta_0 = \Omega(z_0)$, создает на поверхности уступа $\eta = 0$ напряжения, которые можно определить с помощью выражений (2.4) при $\zeta \rightarrow t = \xi + 0i$, т.е. при $\eta \rightarrow 0$,

$$\sigma_{\eta}^{(0)} + i\tau_{\xi\eta}^{(0)} = A_1(t) + B_1(t), \quad \sigma_{\eta}^{(0)} - i\tau_{\xi\eta}^{(0)} = A_1(t) + \overline{B_1(t)} \quad (2.5)$$

Для решения поставленной задачи необходимо "снять" на линии $\eta = 0$ напряжения $\sigma_{\eta}^{(0)}, \tau_{\xi\eta}^{(0)}$, определяемые какой-либо из формул (2.5), т.е. найти такие потенциалы $\Phi_*(\zeta), \Psi_*(\zeta)$, которые на линии $\eta = 0$ вызывают напряжения $-(\sigma_{\eta}^{(0)} + i\tau_{\xi\eta}^{(0)})$ или $-(\sigma_{\eta}^{(0)} - i\tau_{\xi\eta}^{(0)})$.

Тогда решение поставленной задачи будет найдено как наложение потенциалов Φ_1, Ψ_1 и Φ_*, Ψ_* .

Вспомогательные потенциалы $\Phi_*(\zeta), \Psi_*(\zeta)$ найдем из граничных условий, соответствующих выражениям (2.5),

$$A_*(t) + B_*(t) = -(\sigma_{\eta}^{(0)} + i\tau_{\xi\eta}^{(0)}), \quad A_*(t) + \overline{B_*(t)} = -(\sigma_{\eta}^{(0)} - i\tau_{\xi\eta}^{(0)}) \quad (2.6)$$

(выражения для функций $A_*(t), B_*(t)$ получаются из выражений для функций $A_1(t), B_1(t)$ (2.4) заменой в правых частях нижних индексов 1 на индексы *).

Умножив каждый член второго выражения (2.6) на $1/[2\pi i(t - \zeta)]$ и интегрируя в бесконечных пределах по линии $\eta = 0$, получим сумму интегралов типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\eta}^{(0)} - i\tau_{\xi\eta}^{(0)}}{t - \zeta} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [A_*(t) + \overline{B_*(t)}] \frac{dt}{t - \zeta} = 0 \quad (2.7)$$

где ζ – точка полуплоскости $\eta > 0$.

Полагая, что $\Phi_*(t)$ – граничное значение искомой голоморфной при $\eta > 0$ функции $\Phi_*(\zeta)$, исчезающей на бесконечности, а $A_*(t), \overline{B_*(t)}$ – граничные значения функций $A_*(\zeta), \overline{B_*(\zeta)}$, голоморфных при $\eta < 0$ и исчезающих на бесконечности, на основании формулы Коши и ее следствий для полуплоскости $\eta > 0$ [2] из соотношения (2.7) получаем

$$\Phi_*(\zeta) = -\frac{\kappa P}{\omega(\zeta) - \bar{z}_0} + \frac{(z_0 - \bar{z}_0)\bar{P}}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} \quad (2.8)$$

(учтено второе выражение (2.4) и выражения (2.3)).

Для построения функции $\Psi_*(\zeta)$ воспользуемся первым граничным условием (2.6). Перепишем его в виде

$$\Phi_*(t) + \overline{\Phi_*(t)} + \frac{\overline{\omega(t)}}{\omega'(t)} \Phi'_*(t) + \frac{\omega'(t)}{\overline{\omega'(t)}} \Psi'_*(t) + (\sigma_{\eta}^{(0)} + i\tau_{\xi\eta}^{(0)}) = 0 \quad (2.9)$$

Умножив каждый член выражения (2.9) на $1/[2\pi i(t - \zeta)]$ и интегрируя в бесконечных пределах по линии $\eta = 0$, получим сумму интегралов типа Коши, причем четвертое слагаемое в левой части этой суммы на основании формулы Коши и ее следствий для полуплоскости $\eta > 0$ выражается голоморфной функцией

$$\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \Psi'_*(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\eta}^{(0)} + i\tau_{\xi\eta}^{(0)}}{t - \zeta} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_*(t) + \frac{\overline{\omega(t)}}{\overline{\omega'(t)}} \Phi'_*(t) \right] \frac{dt}{t - \zeta} \right] \quad (2.10)$$

Правую часть соотношения (2.10) вычисляем так же, как в случае функции $\Phi_*(\zeta)$.

Сомножитель $\omega'(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)}$ в левой части соотношения (2.10) при $\zeta \rightarrow t$ равен единице.

Действительно, дифференцируя отображающую функцию (2.1) по ζ , для $\omega'(\zeta)$ получим выражение, которое при $\zeta \rightarrow t$ становится вещественной функцией, поскольку оно либо сохраняет свой вид, либо дополняется попарно комплексно-сопряженными слагаемыми, дающими в сумме вещественную функцию.

Например, для уступов с углами наклона $\pi c = \pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/6$ ($p = 1$) имеем

$$\pi c = \frac{\pi}{2}, \quad s = (1 - \zeta^{-1})^{1/2}, \quad \omega'(\zeta) = \frac{h}{\pi s} (1 + s + s^2 + s^3) \quad (2.11)$$

$$\pi c = \frac{\pi}{3}, \quad s = (1 - \zeta^{-1})^{1/3}, \quad \omega'(\zeta) = \frac{h}{\pi \zeta^2} \left[2\zeta^2 - \zeta + \frac{1}{1-s} + \frac{2-s}{1-s+s^2} \right] \left(\frac{\zeta}{\zeta-1} \right)^{2/3} \quad (2.12)$$

$$\pi c = \frac{\pi}{4}, \quad s = (1 - \zeta^{-1})^{1/4}, \quad \omega'(\zeta) = \frac{4h}{\pi} s \quad (2.13)$$

$$\pi c = \frac{\pi}{6}, \quad s = (1 - \zeta^{-1})^{1/6}, \quad \omega'(\zeta) = \frac{h}{6\pi \zeta^2} \left(12\zeta^2 - \zeta - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-\bar{a}s} - \frac{1}{1+as} - \frac{1}{1+s} - \frac{1}{1+\bar{a}s} - \frac{1}{1-as} \right) \times \\ \times \left(\frac{\zeta}{\zeta-1} \right)^{5/6}, \quad a = 0.5 + 0.866i \quad (2.14)$$

Функции (2.11)–(2.13) при подстановке $\zeta = t$ сохраняют свой вид, становясь вещественными, а функция (2.14) становится вещественной в силу того, что четвертое и восьмое, а также пятое и седьмое слагаемые в правой части попарно комплексно сопряжены. Таким образом, если p, q – целые числа и $p < q$, то $\overline{\omega'(t)} = \omega(t)$.

Учитывая равенство $\overline{\omega'(t)} = \omega(t)$, из соотношения (2.10) находим

$$\Psi_*(\zeta) = -\frac{\kappa \bar{z}_0}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} \mathbf{P} + \left[\frac{\omega(\zeta) - z_0}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} + \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)\omega(\zeta)}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^3} \right] \bar{\mathbf{P}}$$

Наложение потенциалов Φ_1 и Φ_* , Ψ_1 и Ψ_* дает решение поставленной задачи

$$\Phi(\zeta) = -\left(\frac{\kappa}{\omega(\zeta) - \bar{z}_0} + \frac{1}{\omega(\zeta) - z_0} \right) \mathbf{P} + \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} \bar{\mathbf{P}} \quad (2.15)$$

$$\Psi(\zeta) = -\bar{z}_0 \left[\frac{\kappa}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} + \frac{1}{(\omega(\zeta) - z_0)^2} \right] \mathbf{P} + \\ + \left[\frac{\kappa}{\omega(\zeta) - z_0} + \frac{\omega(\zeta) - z_0}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^2} + \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)\omega(\zeta)}{(\omega(\zeta) - \bar{z}_0)^3} \right] \bar{\mathbf{P}} \quad (2.16)$$

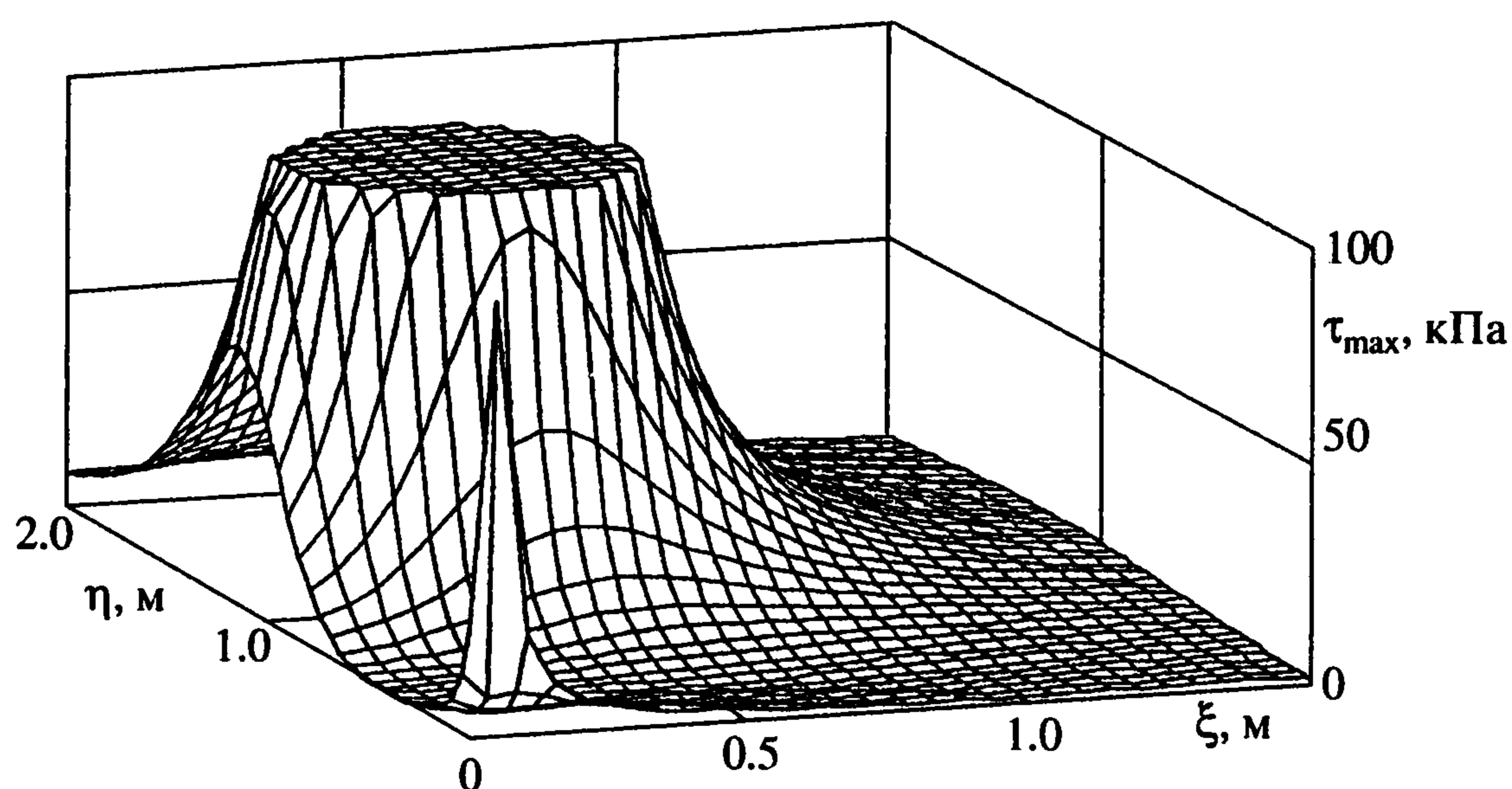
Подстановка выражений (2.15), (2.16) при $\zeta \rightarrow t$ в первое граничное условие (2.5) обращает его правую часть в нуль, что подтверждает правильность построенного решения.

3. Распределение напряжений. Напряженное состояние уступа в криволинейной системе координат (ξ, η) определяется формулами

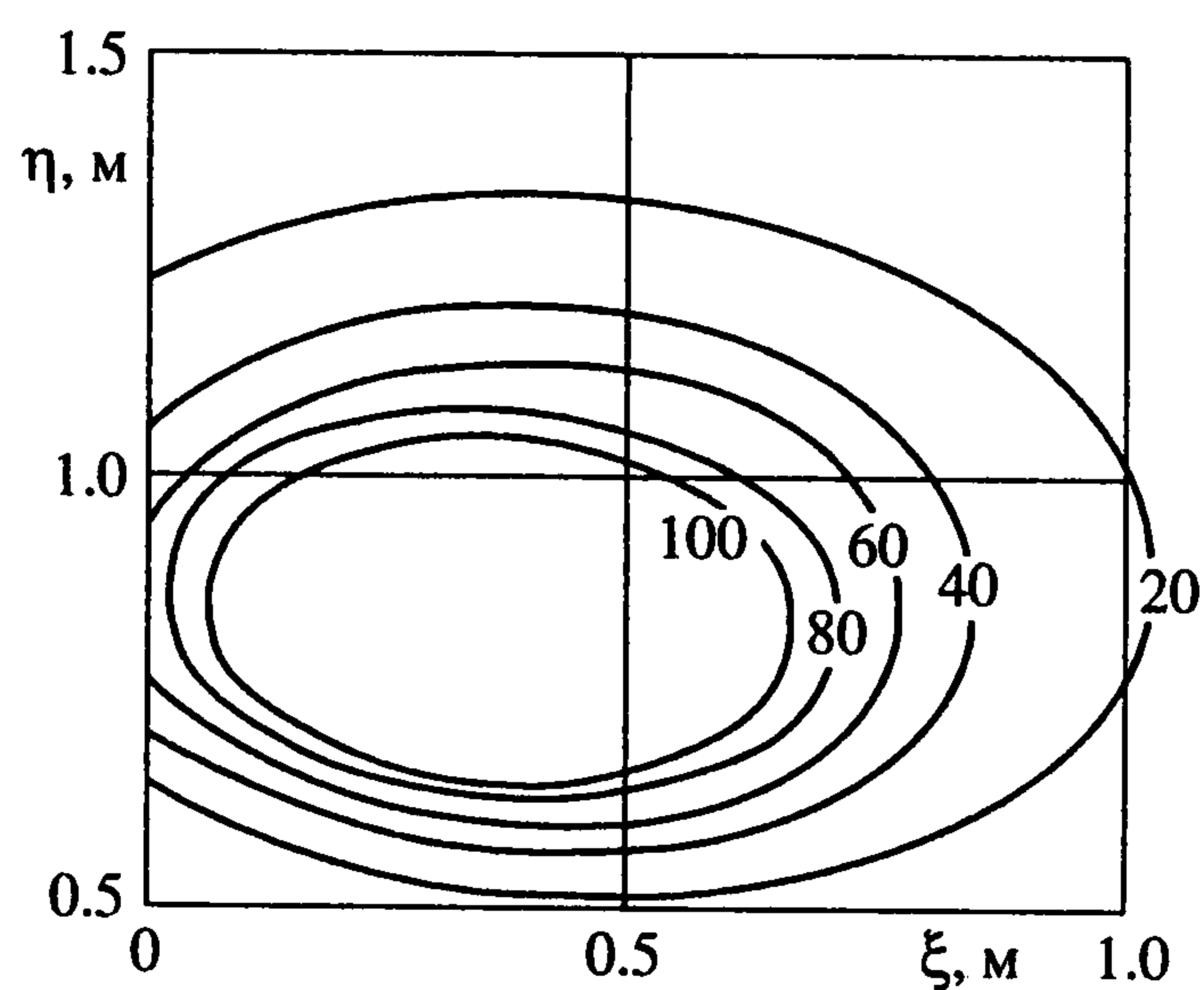
$$A(\zeta) = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}, \quad B(\zeta) = \frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta)] \quad (3.1)$$

$$\sigma_\xi = \operatorname{Re}[A(\zeta) - B(\zeta)], \quad \sigma_\eta = \operatorname{Re}[A(\zeta) + B(\zeta)], \quad \tau_{\xi\eta} = \operatorname{Im} B(\zeta)$$

Используя формулы Колосова–Мусхелишвили, можно выразить главные напряжения σ_1, σ_2 , максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}$, интенсивность нормальных



Фиг. 2



Фиг. 3

напряжений σ_i , октаэдрические нормальные σ_{oct} и касательные τ_{oct} напряжения через потенциалы $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= A(\zeta) + |B(\zeta)|, \quad \sigma_2 = A(\zeta) - |B(\zeta)|, \quad \tau_{\text{max}} = |B(\zeta)| \\ \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \\ \sigma_{\text{oct}} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

В случае плоской деформации третье главное напряжение определяется как $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$.

Видно, что поля напряжений σ_i и τ_{oct} подобны друг другу; после подстановки $\sigma_3 = \nu(\sigma_1 + \sigma_2)$ в четвертое выражение (3.2) можно убедиться, что поля напряжений σ_i и τ_{max} весьма близки между собой, а поле σ_{oct} подобно полю σ_3 .

Для построения любого из полей напряжений необходимо на полуплоскости $\zeta > 0$ ввести сетку прямоугольных координат ξ_k, η_m , которую посредством функции (2.1) преобразовать в сетку криволинейных координат $x_{k,m} = \text{Re } \omega(\xi_k, \eta_m)$, $y_{k,m} = \text{Im } \omega(\xi_k, \eta_m)$ на уступе. В узлах сетки ξ_k, η_m на полуплоскости $\zeta > 0$ по выраже-

ниям (2.15), (2.16) можно вычислить потенциалы Φ , Ψ , а по выражениям (3.1), (3.2) – все напряжения. Вычисленные напряжения действуют в узлах сетки $x_{k,m}$, $y_{k,m}$ криволинейных координат уступа.

На фиг. 2 в локальной прямоугольной системе координат представлен усеченный трехмерный график распределения максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$ при следующих исходных данных: высота уступа $h = 1$ м, угол наклона грани $\pi c = \pi/4$ ($p = 1$, $q = 4$), коэффициент Пуассона материала уступа $\nu = 0.25$, сосредоточенная сила имеет компоненты $F_x = 20$ кН, $F_y = 5$ кН, координаты точки приложения силы $x_0 = -1.191$ м, $y_0 = -0.881$ м. Точке приложения силы $z_0 = -1.191 - 0.881i$ на плоскости ζ соответствует точка $\zeta_0 = -0.05 + 0.05i$, сосредоточенной силе $F_z = 1.061 + 0.265i$ – сила $F_\zeta = 1.092 + 0.066i$. График $\tau_{\max}$ усечен с помощью условной величины τ_{10} , равной десяти средним значениям максимальных касательных напряжений в узлах сетки расчетной области уступа: $\tau_{10} = 10\bar{\tau}_{\max}$, $\bar{\tau}_{\max}$ – среднее значение. В тех точках уступа, где напряжения $\tau_{\max}$ превышают значения τ_{10} , они приравнены этим значениям.

На фиг. 3 представлена карта уровней максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$, построенная на плоскости ξ , η в окрестности точки приложения силы F_z . Линии равных значений имеют отметки в кПа. Карта уровней дает возможность оценить расположение и размеры зоны концентрации напряжений.

Совместное рассмотрение графиков на фиг. 2 и 3 позволяет заключить, что сосредоточенная сила оказывает существенное влияние на напряженное состояние уступа в окрестности ее точки приложения, вызывая концентрацию напряжений в непосредственной близости к точке приложения, а также в окрестности верхней угловой точки. Зона влияния сосредоточенной силы вытянута в направлении действия силы. Размеры зоны влияния зависят от величины сосредоточенной силы, координат точки ее приложения, геометрии уступа (высоты и угла наклона грани), а также от коэффициента Пуассона материала уступа.

4. Траектории главных напряжений. В качестве примера использования полученного решения построим траектории главных напряжений в уступе при действии внутренней сосредоточенной силы. Картина траекторий главных напряжений (т.е. линий, касательные к которым совпадают с направлениями главных напряжений) дает наглядное представление о структуре напряженного состояния, позволяя, например, указать направления возможных трещин.

В плоской задаче направляющие косинусы $n_1^{(k)}$, $n_2^{(k)}$ нормалей к площадкам главных напряжений определяются системой уравнений

$$(\sigma_\xi - \sigma_k)n_1^{(k)} + \tau_{\xi\eta}n_2^{(k)} = 0, \quad \tau_{\xi\eta}n_1^{(k)} + (\sigma_\xi - \sigma_k)n_2^{(k)} = 0 \quad (4.1)$$

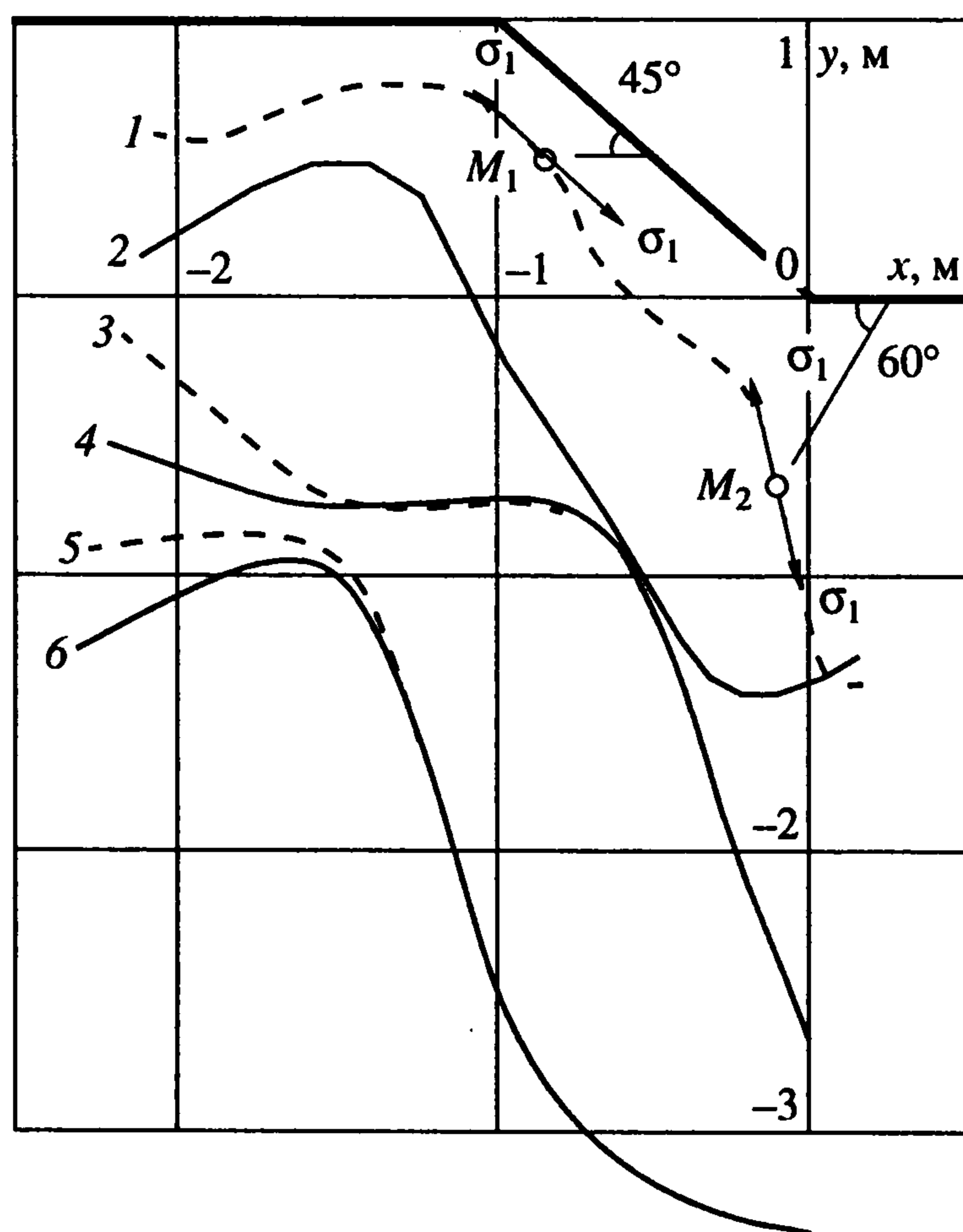
$$[n_1^{(k)}]^2 + [n_2^{(k)}]^2 = 1; \quad k = 1, 2$$

Если принять $n_1^{(k)} = \cos \alpha_k$, $n_2^{(k)} = \sin \alpha_k$, то каждое из первых двух уравнений (4.1) дает выражение для $\tan \alpha_k$. Поскольку $\tan \alpha_k = d\eta_k/d\xi$, для построения траекторий главных напряжений имеем дифференциальное уравнение первого порядка

$$d\eta_k / d\xi = (\sigma_k - \sigma_\xi) / \tau_{\xi\eta} = \tau_{\xi\eta} / (\sigma_k - \sigma_\eta), \quad k = 1, 2 \quad (4.2)$$

Задавая начальные значения $\eta_k^{(0)}$ на координатной линии $\xi = \xi_0$, можно построить интегральные кривые уравнения (4.2), исходящие из точек $\xi_0, \eta_k^{(0)}$. Изменяя в процессе интегрирования правую часть уравнения (4.2), можно контролировать правильность построения траекторий главных напряжений.

Правая часть уравнения (4.2) представляет собой комплексную функцию комплексного переменного, которая вблизи особых точек имеет большие градиенты, в связи с чем невозможно использовать стандартные программы численного интегрирования.



Фиг. 4

Для интегрирования этого уравнения автором была разработана программа, в которой начальный отрезок интегральной кривой строится методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом [6, 7], модифицированным Мерсоном [8]; остальная часть интегральной кривой отыскивается методом "предсказание – уточнение" [7, 8] также четвертого порядка точности с переменным шагом.

На фиг. 4 (здесь и на фиг. 1 окрестность уступа зеркально отражена относительно оси x) представлены траектории главных растягивающих напряжений σ_1 , построенные для тех же исходных данных, что и графики на фиг. 2, 3. Ординаты начальных точек интегральных кривых, помеченных на фиг. 4 цифрами 1, 2, ..., 6, имели значения (абсцисса ξ зафиксирована):

$$\xi = \xi_0 = -0.5, \quad \eta_n^{(0)} = 0.25n \quad (n = 1, 2, \dots, 6)$$

Как видно из фиг. 4, направления траекторий σ_1 вблизи от поверхности уступа в целом параллельны контуру уступа; отклонения имеют место за пределами наклонной грани уступа. Это позволяет предположить, что на поверхности уступа из хрупкого материала сила F_z вызовет трещины, направление которых перпендикулярно контуру уступа.

В двух точках (M_1 и M_2) на траектории, выходящей из начальной точки ($\xi_0 = -0.5$, $\eta_1^{(0)} = 0.25$), показаны главные напряжения σ_1 , а также направления максимальных касательных напряжений $\tau_{\max}$. Направления $\tau_{\max}$ в точке M_1 , расположенной вблизи наклонной грани уступа, составляют угол около 45° с нею, а направления $\tau_{\max}$ в точке M_2 , расположенной вблизи от нижнего угла уступа, составляют угол около 60° с его нижней гранью. Это позволяет предположить, что на поверхности уступа из пластичного материала сила F_z вызовет сдвиги, направление которых параллельно направлению действия силы.

Таким образом, для уступов из хрупкого материала сосредоточенная сила может привести к возникновению трещин, направленных перпендикулярно к контуру уступа, а для уступов из пластичного материала – к появлению сдвигов в направлении действия силы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im innern beanspruchten Halbscheibe // ZAMM. 1932. Bd. 12. H. 6. S. 343–346.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Korpenfels W., Stallman F.* Praxis der Konformen Abbildung. Berlin: Springer, 1959 = *Корпенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 406 с.
4. *Лаврик В.И., Савенков В.Н.* Справочник по конформным отображениям. Киев: Наук. думка, 1970. 252 с.
5. *Колосов Г.В.* Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 224 с.
6. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
7. *Kahaner D., Moler C., Nash S.* Numerical Methods and Software. New Jersey: Prentice-Hall, 1989 = *Каханер Д., Моулер К., Неш С.* Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 575 с.
8. *Lance J.N.* Numerical Methods for High Computers. L.: Iliffe, 1960 = *Ланс Дж.Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 208 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
16.IV.2001