

УДК 532.526

© 2002 г. В.В. Алексеев

О ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ГИБКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Рассматривается линейная задача устойчивости пограничного слоя на гибкой поверхности относительно малых двумерных возмущений в виде бегущих волн. Для описания течения жидкости используется модель пограничного слоя с самоиндуцированным давлением (трехслойная модель). Гибкая поверхность моделируется тонкой пластиной, лежащей на упругом основании. Показано, что в изучаемой системе возможны две формы потери устойчивости: неустойчивость Толлмина–Шлихтинга и неустойчивость, вызванная действием гидродинамического давления на обтекаемую поверхность. Особенность последней в отсутствии нейтрального режима возмущений и наступлении неустойчивости скачком. Проведен анализ полученных решений и установлены условия, приводящие к появлению подобной неустойчивости.

Анализ собственных колебаний пограничного слоя и обтекаемой гибкой поверхности представляет интерес при изучении влияния вибрации стенки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный. По существу он сводится к решению задачи Орра–Зоммерфельда с модифицированными граничными условиями, отражающими отклик упругой границы на действие пульсаций давления. Интерес к рассматриваемой проблеме возник после опубликования результатов экспериментов [1], в которых было установлено снижение сопротивления трения подводного снаряда, имеющего гибкое покрытие специальной конструкции.

Устойчивость пограничного слоя на гибкой поверхности рассматривалась многими исследователями. Было показано [2–4], что в случае обтекания потоком гибкой границы возможны три вида неустойчивости: класса А, класса Б и неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, причем наличие внутреннего сопротивления стенки приводит к дестабилизации волн класса А и стабилизации волн класса Б, а неустойчивость Кельвина–Гельмгольца мало зависит от внутреннего сопротивления стенки и возникает, когда эффективная жесткость упругой границы становится слишком малой, чтобы уравновесить действие сил давления. Волны класса А были идентифицированы с волнами Толлмина–Шлихтинга, волны класса Б сопоставлялись с волнами, генерируемыми на свободной поверхности воды под действием ветра. И тот и другой тип волн был обнаружен в пограничном слое.

В результате моделирования податливой поверхности в обобщенном виде путем задания отношения давления на поверхности к ее деформации было установлено [5], что способность стенки деформироваться в нормальном к поверхности направлении влияет на устойчивость ламинарного течения в значительно большей степени, чем способность деформироваться в касательном направлении. Позднее [6] задача устойчивости изучалась в сходной постановке.

Было показано [4–6], что гибкая поверхность может стабилизировать течение в результате как увеличения критического числа Рейнольдса, так и уменьшения скорости роста возмущений, но может приводить и к дестабилизации течения. Для стабилизации течения гибкая стенка должна иметь [4] малое внутреннее сопротивление, чтобы демпфировать волны класса А, и вместе с тем достаточное для подавления волн класса Б, а гибкость не должна быть настолько большой, чтобы вызвать неустойчивость Кельвина–Гельмгольца. Поэтому было высказано сомнение в том, что результаты экспериментов Крамера можно объяснить только на основе линейной теории устойчивости [4].

Последующие работы были направлены на дальнейшую детализацию в изучении влияния параметров гибкой поверхности на устойчивость течения (см. [7, 8], а также подробный обзор и сопоставление теоретических и экспериментальных результатов [7, 9]). Была предпринята попытка [7, 8] наиболее близко смоделировать поверхность, использованную в экспериментах Крамера, и было исследовано влияние параметров поверхности на устойчивость различных классов волн. Основным вывод [7, 8] состоял в том, что гибкая поверхность, в принципе, может привести к затягиванию ламинарного режима, однако на практике наличие и взаимодействие различных типов волн в пограничном слое делает это маловероятным, чем, в частности, объяснялись неудачные попытки подтвердить результаты Крамера экспериментально.

В результате изучения нелинейного развития волновых пакетов, состоящих из волн Толлмина–Шлихтинга, было показано [10], что упругость поверхности приводит к затягиванию перехода ламинарного режима в турбулентный.

В предлагаемой работе показано, что при обтекании гибкой поверхности потоком вязкой жидкости в дополнение к известным возможен еще один тип неустойчивости: система из устойчивого положения в неустойчивое переходит скачком. Разрывной характер поведения изучаемой системы вследствие податливости стенки был получен ранее [10], как следствие выбранной модели обтекаемой поверхности, приводящей к появлению особенности в дисперсионном уравнении. Ниже показано, что разрывная неустойчивость пограничного слоя происходит, когда устойчивость теряет сама гибкая поверхность под действием вызванного гидродинамического давления; при этом неустойчивость проявляет свойства как класса А, так и класса Б. Приводятся условия, при которых появляется подобная неустойчивость и предлагается объяснение механизма ее возникновения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание несжимаемой вязкой жидкостью при больших числах Рейнольдса полубесконечной пластины, обладающей гибким покрытием. В невозмущенном состоянии пластина плоская. Декартова система координат x^* , y^* выбрана так, что ось x^* лежит в плоскости невозмущенной пластины, ось y^* направлена вверх. Передней кромке пластины соответствует значение $x^* = -L$. Невозмущенное течение жидкости будем полагать двумерным и имеющим далеко вверх по потоку скорость U_∞ , параллельную оси x^* . Число Рейнольдса определим в виде $Re = U_\infty L/\nu$, где ν – кинематическая вязкость жидкости. Будем изучать двумерные возмущения в пограничном слое на гибкой поверхности и рассматривать линейную задачу устойчивости во временной постановке.

Предположим, что параметры возникающих возмущений таковы, что течение жидкости может описываться трехслойной асимптотической теорией пограничного слоя (теорией пограничного слоя с самоиндуцированным давлением). При этом предполагается, что возмущения характеризуются длиной волны $O(L\epsilon^3)$, амплитудой $O(L\epsilon^5)$ и частотой $O(U_\infty/(L\epsilon^2))$, где введен малый параметр $\epsilon = Re^{-1/8}$, характерный для трехслойной теории. Для описания нестационарных процессов теория была разработана во многих работах, из которых отметим [11–13] (см. обзор других работ, использующих трехслойную теорию [14]). Согласно этой теории при взаимодействии нестационарного пограничного слоя с внешним потоком образуются три области с существенно различными свойствами [11]. Верхняя область с характерным размером $y^* = O(L\epsilon^3)$ является областью взаимодействия с внешним потенциальным потоком. Эффекты вязкости в этой области малы, вихри в течении отсутствуют. Средняя область ($y^* = O(L\epsilon^4)$) соответствует основному пограничному слою, в котором вязкостью также пренебрегают, но течение является завихренным. В нижней области ($y^* = O(L\epsilon^5)$) вязкость играет определяющую роль в формировании структуры течения. Давление вырабатывается в нижней области и через среднюю область передается внешнему потоку. Все характерные изменения течения в слое определяются на масштабе длины $O(L\epsilon^3)$.

В каждой области вводятся соответствующие разложения искомых величин и масштабы изменения независимых переменных с использованием малого параметра ϵ и строятся решения в верхней и средней областях [11, 12]. В нижней области течение в главном приближении описывается уравнениями типа Прандтля. Получив решение

в нижней области и сращивая решения во всех трех областях, можно получить (см., например [15]) описание течения для всего пограничного слоя.

Для целей настоящего исследования достаточно ограничиться рассмотрением течения только в нижней области. Независимые переменные задаются выражениями

$$x^* = \varepsilon^3 Lx, \quad y^* = \varepsilon^5 Ly, \quad t^* = \varepsilon^2 Lt / U_\infty$$

где t^* – размерное время. Составляющие вектора скорости u^* , v^* и давление p^* представляются в виде разложений

$$u^* = U_\infty[\varepsilon U(x, y, t) + O(\varepsilon^2)], \quad v^* = U_\infty[\varepsilon^3 V(x, y, t) + O(\varepsilon^4)] \quad (1.1)$$

$$p^* = p_\infty^* + \rho U_\infty^2[\varepsilon^2 P(x, y, t) + O(\varepsilon^3)]$$

где p_∞^* – давление в невозмущенном потоке, ρ – плотность жидкости.

Подстановка выражений (1.1) в уравнения Навье–Стокса приводит для главных членов разложений к уравнениям типа Прандтля

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

Отличие состоит в том, что возмущенное давление $P(x, t)$ берется не из внешней задачи обтекания, а определяется взаимодействием течения в верхней области с нижней областью через основную часть пограничного слоя. Это взаимодействие устанавливается следующими условиями. Сращивание решений потенциальной задачи в верхней области и решений в основной области пограничного слоя приводит к условию (условие свободного взаимодействия)

$$P(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial A / \partial x_1}{x - x_1} dx_1 \quad (1.3)$$

Произвольная функция $A(x, t)$ имеет смысл величины мгновенного смещения линий тока в основной области пограничного слоя.

Сращивание разложений в нижней и основной областях пограничного слоя дает предельное условие

$$U(x, y, t) \rightarrow \lambda y + \lambda A(x, t) \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Величина λ определяется из решения Блазиуса $U_b(y_2)$ для невозмущенного пограничного слоя по формуле $\lambda = dU_b(0)/dy_2$, где $y_2 = y^*/(L\varepsilon^4)$ – вертикальная координата, соответствующая основной области пограничного слоя.

Фактически трехслойная теория осуществляет связь через основную область пограничного слоя между внешним потоком и вязким слоем, примыкающим к обтекаемой поверхности. Это взаимодействие устанавливается условием (1.4), согласующим нижнюю и основную области и соотношением (1.3), которое согласует основную область с верхней областью пограничного слоя.

Отметим, что посредством преобразования переменных [11] величину λ можно исключить из рассмотрения, поэтому в дальнейшем будем полагать, что $\lambda = 1$.

На обтекаемой поверхности, задаваемой уравнением $y = \eta(x, t)$, выполняются условия прилипания

$$U(x, \eta, t) = 0, \quad V(x, \eta, t) = \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

где $\eta(x, t)$ – вертикальное смещение поверхности пластины от ее невозмущенного положения. При этом предполагается, что каждая точка гибкой поверхности совершает колебательное движение только в вертикальном направлении.

Гибкую поверхность будем моделировать [7] тонкой пластиной, лежащей на упругом основании, движение которой описывается уравнением (в безразмерном виде)

$$m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + d \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + K \eta = F \quad (1.6)$$

где m – масса на единицу площади, d – коэффициент сопротивления, D – изгибная жесткость, T – продольное натяжение на единицу ширины, K – жесткость упругого основания, F – внешняя сила. Во всех последующих расчетах будем пренебрегать для простоты продольным усилием и жесткостью упругого основания, т.е. полагать $T = K = 0$. Влияние этих параметров оценим впоследствии косвенно.

При определении силы F , действующей на пластину, будем полагать, что все изменения в положении стенки происходят только из-за действия давления, и пренебрегать действием касательных напряжений и нормальной компонентой вязких напряжений. Тогда следует положить $F = -P(x, t)$.

Система уравнений (1.2) с условием (1.3) и граничными условиями (1.4), (1.5) определяет нелинейную краевую задачу в области с подвижными стенками для отыскания периодических по координате x решений. Задача имеет тривиальное решение $U = y$, $V = 0$, $P = 0$, соответствующее невозмущенному пограничному слою. Будем рассматривать возмущенное решение задачи (1.2)–(1.5), представив решение в виде $U = y + u$, $V = v$, $P = p$ и предполагая возмущения u , v , p малыми. Устойчивость пограничного слоя будем изучать в области, находящейся на достаточном расстоянии от начального участка пластины, где можно рассматривать возмущения в виде бегущих волн.

Было показано [13], что описание устойчивости пограничного слоя на твердой поверхности, основанное на трехслойной теории, соответствует нижней ветви кривой нейтральной устойчивости для больших чисел Рейнольдса. Поэтому дальнейшее рассмотрение будет соответствовать устойчивости пограничного слоя по отношению к длинноволновым возмущениям.

2. Линейная задача устойчивости. Отыскивая возмущения в виде бегущих волн, представим решение в виде

$$U = y - af'e^{ikx+\omega t}, \quad v = ikafe^{ikx+\omega t}, \quad p = ae^{ikx+\omega t}, \quad \eta = \eta_0 e^{ikx+\omega t} \quad (2.1)$$

где a – амплитуда давления, $f(y)$ – амплитуда функции тока, k – волновое число, η_0 – амплитуда смещения обтекаемой поверхности, ω – комплексная частота колебаний, штрих означает производную по y . Вещественная часть частоты $\omega = \omega_r + i\omega_i$ характеризует нарастание ($\omega_r > 0$) или затухание ($\omega_r < 0$) возмущений во времени.

Потребуем также, чтобы произвольная функция $A(x, t)$ удовлетворяла условию периодичности по координате x . Тогда условие (1.3) приводит к равенству

$$A(x, t) = \pm(a/k)e^{ikx+\omega t} \quad (2.2)$$

где верхний знак берется при $k > 0$, нижний – при $k < 0$.

Подставим выражения (2.1) в систему уравнений (1.2). В результате линеаризации первого уравнения (1.2) по амплитуде a возмущений получим уравнение для функции $f(y)$

$$f''' - (\omega +iky)f' + ikf + ik = 0 \quad (2.3)$$

Второе и третье уравнения системы (1.2) удовлетворяются тождественно.

Линеаризация граничных условий (1.5) около невозмущенной поверхности приводит к условиям для возмущений скорости [4]

$$u + \eta = 0, \quad v = \partial \eta / \partial t \quad \text{при } y = 0$$

Тогда граничные условия на стенке для функции тока примут вид

$$f = \eta_0 \omega / (ika), \quad f' = \eta_0 / a \quad \text{при } y = 0 \quad (2.4)$$

Предельное условие (1.4), где положено $\lambda = 1$, при учете равенства (2.2) дает

$$f' \rightarrow \mp i/k \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Краевая задача (2.3)–(2.5) отличается от задачи, сформулированной ранее [11, 12], граничными условиями на стенке. При решении задачи (2.3)–(2.5) будем следовать известной процедуре [11]. Продифференцируем уравнение (2.3) и введем переменную $z = \omega(ik)^{-2/3} + (ik)^{1/3}y$, где $|\arg z| < \pi/3$ при $y \rightarrow \infty$. В результате получим уравнение четвертого порядка

$$d^4 f / dz^4 - z d^2 f / dz^2 = 0 \quad (2.6)$$

Граничные условия

$$f = \eta_0 \omega / (ika), \quad df / dz = (\eta_0 / a)(ik)^{-1/3}, \quad d^3 f / dz^3 = -1 \text{ при } z = \omega(ik)^{-2/3} \quad (2.7)$$

$$df / dz \rightarrow \mp i(ik)^{-4/3} \text{ при } z \rightarrow \infty$$

Решение уравнения (2.6) для второй производной функции тока f запишем в виде

$$d^2 f / dz^2 = c \text{Ai}(z)$$

где $\text{Ai}(z)$ – функция Эйри, убывающая в секторе $|\arg z| < \pi/3$, c – произвольная постоянная.

Удовлетворяя граничным условиям при $z = \omega(ik)^{-2/3}$, получим решение в виде

$$f = - \left[\frac{d \text{Ai}(\zeta)}{dz} \right]^{-1} \int_{\zeta}^z \int_{\zeta}^z \text{Ai}(z_1) dz_1 dz + \frac{\eta_0}{a} (ik)^{-1/3} z, \quad \zeta = \omega(ik)^{-2/3}$$

Последнее из условий (2.7) приводит к уравнению

$$-N(\zeta) + \frac{\eta_0}{a} k^{-1/3} = \mp k^{-4/3}, \quad N(\zeta) = e^{\pi i/6} \left[\frac{d \text{Ai}(\zeta)}{dz} \right]^{-1} \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(z) dz \quad (2.8)$$

В пределе $\eta_0 \rightarrow 0$ уравнение (2.8) дает дисперсионное уравнение, полученное [12] для случая твердой стенки. Отметим, что в случае твердой стенки величина a – просто "мультипликативная постоянная" и не входит в дисперсионное уравнение.

Выражение для давления найдем из соотношения (2.8) в виде

$$a = \eta_0 k / [k^{4/3} N(\zeta) \mp 1] \quad (2.9)$$

Дисперсионное уравнение получим приравниванием давления в жидкости на обтекаемой поверхности и нормальных напряжений, развиваемых на гибкой поверхности под действием деформаций $\eta = \eta_0 e^{ikx + \omega t}$. Из уравнения (1.6), где положено $T = K = 0$, получим

$$\eta_0 (m\omega^2 + d\omega + Dk^4) = -a \quad (2.10)$$

Левая часть этого равенства является суммой инерционной, фрикционной и упругой компонент.

Подстановка выражения (2.9) в уравнение (2.10) приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{1}{N(\zeta)} = \pm k^{4/3} + \frac{k^{7/3}}{m\omega^2 + d\omega + Dk^4 \mp k} \quad (2.11)$$

Выбор знаков осуществляется по изложенному выше правилу (см. формулу (2.2)). Далее будут изучаться волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x , поэтому везде будем полагать $k > 0$ и принимать, соответственно, верхний знак в правой части уравнения (2.11).

Уравнение (2.11) отличается от дисперсионного уравнения для случая твердой стенки [12] наличием второго слагаемого в правой части. Можно показать, что предельный случай твердой стенки ($\eta_0 \rightarrow 0$) эквивалентен требованию стремления к бесконечности величин m, D, d .

Строение спектра собственных значений для случая твердой стенки хорошо известно. Спектр состоит из счетного множества комплексных чисел, определяемых, вообще говоря, нулями функции Эйри [16]. Было дано [12, 17] графическое представление поведения первых трех корней при изменении волнового числа. Решение, которое теряет устойчивость, определяется первым корнем дисперсионного уравнения, при этом нейтральному режиму соответствуют значения $\omega = -2.298i, k = 1.0005$ [12].

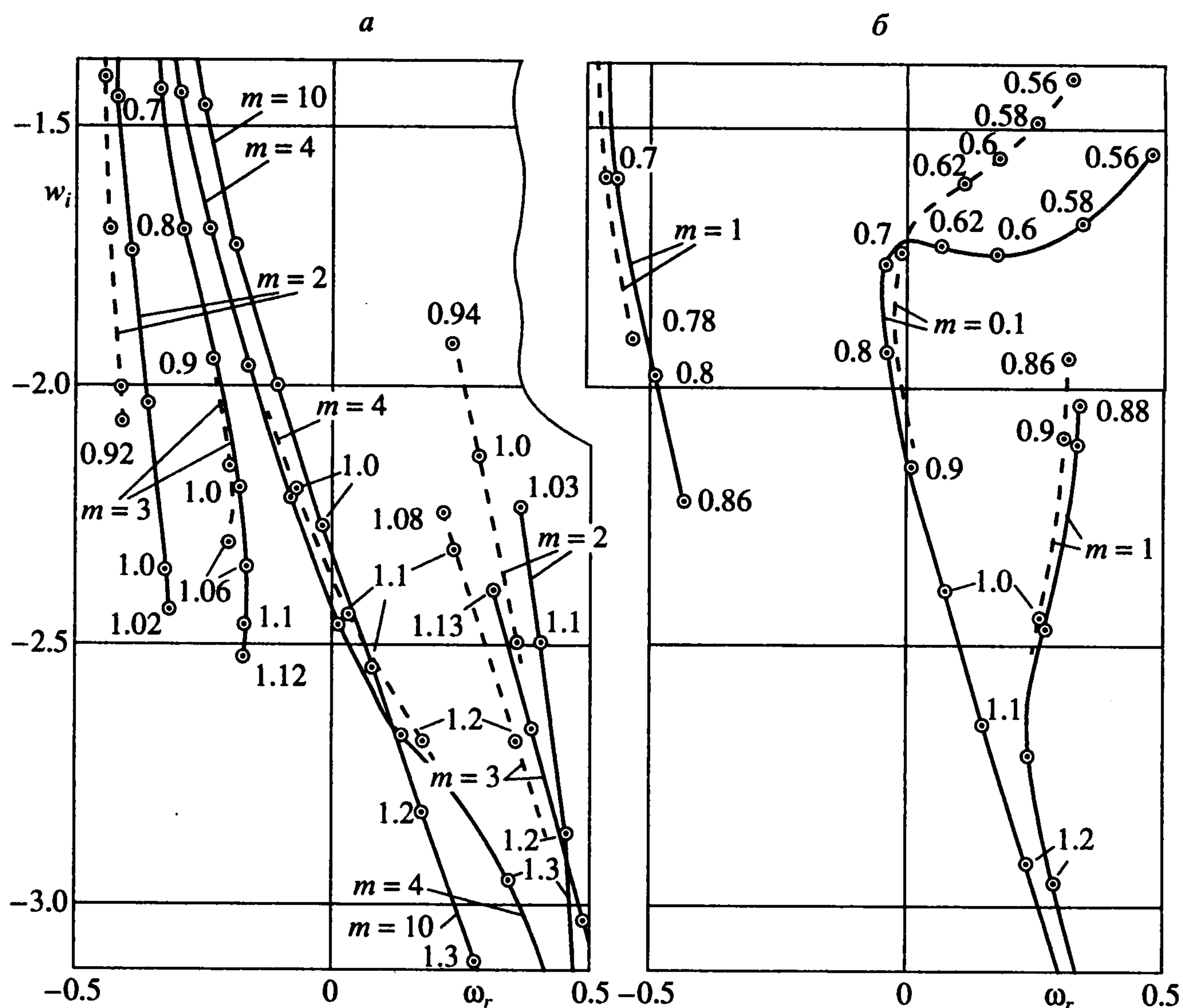
3. Численное исследование корней дисперсионного уравнения. Расчеты собственных частот $\omega(k)$ на основе уравнения (2.11) проводились при фиксированном значении коэффициента сдвиговой жесткости $D = 10$ и значениях массы пластины $m = 10, 4, 3, 2, 1, 0.1$. Рассматривался случай бездиссипативной пластины ($d = 0$) и пластины с внутренним сопротивлением ($d = 0.5, 0.1$). На фиг. 1 представлено поведение корней дисперсионного уравнения на комплексной плоскости $\omega = \omega_r + i\omega_i$ в зависимости от изменения волнового числа k как от параметра. Светлым точкам соответствуют указанные при них значения волнового числа.

На фиг. 1, а сплошными кривыми представлен случай пластины без сопротивления ($d = 0$). Кривая для $m = 10$ мало отличается от соответствующей кривой для случая жесткой стенки (не приведенной на фиг. 1, а), однако неустойчивость наступает при несколько больших значениях волнового числа (при $k = 1.02$ имеем $\omega = -0.0003 - 2.3228i$) по сравнению со случаем жесткой стенки ($k = 1.0005$). Это говорит о некоторой стабилизации течения при введении податливости стенки. При уменьшении массы пластины ($m = 4$) переход к неустойчивому режиму еще более затягивается. Для $m = 4$ при $k = 1.085$ имеем $\omega = -0.00037 - 2.4204i$. Однако в неустойчивом режиме скорость роста возмущений ω_i при значениях волнового числа больших $k = 1.24$ увеличивается для $m = 4$ по сравнению с $m = 10$.

Отметим, что уменьшение массы пластины приводит к увеличению фазовой скорости свободных изгибных волн $c_p = (D/m)^{1/2}k$. Видно, что увеличение c_p привело к увеличению волнового числа (приблизительно на 10%), соответствующего нейтральному режиму. Как указывалось выше, используемая трехслойная модель пограничного слоя соответствует нижней ветви нейтральной кривой при больших числах Рейнольдса. Однако такое же поведение волнового числа, соответствующего нижней ветви нейтральной кривой, по отношению к скорости свободных сдвиговых волн было установлено [7] при не очень высоких числах Рейнольдса (порядка $(2 \dots 4) \times 10^3$) вблизи начального участка нейтральной кривой. Так, при увеличении модуля упругости материала пластины в два раза волновое число, соответствующее нейтральному режиму, увеличивалось также на 10% ([7], фиг. 11).

Влияние сопротивления стенки ($d = 0.5$) представлено на фиг. 1, а штриховыми линиями. В случае $m = 10$ это влияние практически незначительно, при $m = 4$ оно более заметно: видно, что кривая частот смещается в сторону неустойчивого режима; например, волна, которая при $k = 1.085$ и $d = 0$ была устойчивой, при введении сопротивления теряет устойчивость, и значение частоты становится равным $\omega = 0.0132 - 2.4077i$. При $k > 1.3$ сопротивление стенки практически перестает сказываться на скорости роста возмущений.

Таким образом, введение сопротивления стенки приводит к дестабилизации течения. Такое поведение возмущений соответствует хорошо известному факту, что внутреннее сопротивление стенки дестабилизирует волны Толлмина–Шлихтинга, которые относятся к волнам класса А [3, 4, 7].



Фиг. 1

Расчеты показывают, что в устойчивом режиме для $m = 3, 2$ скорость затухания возмущений существенно больше, чем в случаях $m = 10, 4$, однако при значении $k = 1.12$ ($\omega = -0.1737 - 2.5221i$) кривая для $m = 3$ обрывается и продолжается при $k = 1.13$ из точки $\omega = 0.3109 - 2.3964i$ в правой полуплоскости, причем видна значительная скорость роста возмущений. Аналогичное поведение имеет кривая для $m = 2$, но разрыв в решении происходит раньше: при $k = 1.02$ имеем $\omega = -0.3190 - 2.4280i$, при $k = 1.03$ имеем $\omega = 0.3634 - 2.2346i$. Отметим, что в момент скачка происходит уменьшение фазовой скорости волны $c = -\omega_r/k$.

Из графиков для $m = 3, 2$ видно, что при внутреннем сопротивлении стенки ($d = 0.5$) разрывы в решениях также имеются, но происходят при меньших значениях волновых чисел, т.е. неустойчивость наступает раньше. В этом состоит определенная дестабилизация течения при введении сопротивления стенки, т.е. волны ведут себя подобно волнам класса А. Однако по отношению к скорости роста (затухания) возмущений виден противоположный эффект: в устойчивом и неустойчивом режиме сопротивление стенки стабилизирует течение. А это свойство характерно для волн класса Б [7]. Отметим, что влияние сопротивления стенки при $m = 2, 3$ более ярко выражено, чем в случае $m = 4, 10$.

Поведение частот при значениях массы $m = 1, m = 0.1$ представлено на фиг. 1, б сплошными кривыми при $d = 0$ и штриховыми при $d = 0.1$. При $m = 1$ в устойчивом режиме скорость затухания ω_r значительно больше, чем при $m = 2, 3$. Разрыв в решении наступает при $k = 0.86$ ($\omega = -0.4337 - 2.2190i$). При $k = 0.88$ кривая, соответствующая $m = 1$, продолжается в правой полуплоскости из точки $\omega = 0.3370 - 2.0283i$.

В неустойчивом режиме при $m = 1$ появилась характерная особенность: кривая частот приблизилась к мнимой оси при $k = 1.1$. Разрыв в решении при $m = 1$ и $d = 0.1$ соответствует диапазону волновых чисел $k = 0.78 \dots 0.86$.

При уменьшении массы до величины $m = 0.1$ кривая частот выходит при $k = 0.56$ из точки $\omega = 0.4729 - 1.5474i$ и пересекает мнимую ось при $k \approx 0.65$ и $k \approx 0.89$, т.е. появляется нейтральный режим возмущений. При $m = 0.1$ и $d = 0.1$ кривая частот начинается при $k = 0.56$ из точки $\omega = 0.3201 - 1.3951i$. Из сравнения с кривой для $m = 0.1$ и $d = 0$ видно, что сопротивление стенки при значениях волнового числа $k < 0.6$ уменьшает скорость роста возмущений, а при $k > 0.6$ несколько увеличивает.

Поведение корней при малых значениях волновых чисел представлено на фиг. 2 сплошными кривыми при $d = 0$ и штриховой линией при $d = 0.1$. Кривые частот выходят из точки $\omega = 0$ и находятся в левой полуплоскости, как и в случае жесткой стенки [12]. В случае $m = 0.1$, $d = 0$ кривая частот делает петлю и выходит в верхнюю полуплоскость, где примерно при $k = 0.43$ решение обрывается. Сопротивление стенки при малых волновых числах слабо сказывается на поведении частот при $m = 1 \dots 10$. В случае $m = 0.1$, $d = 0.1$ видно, что сопротивление стенки при $k < 0.41$ дестабилизирует течение (свойство волн класса А), а при $k > 0.41$ стабилизирует (волны класса Б).

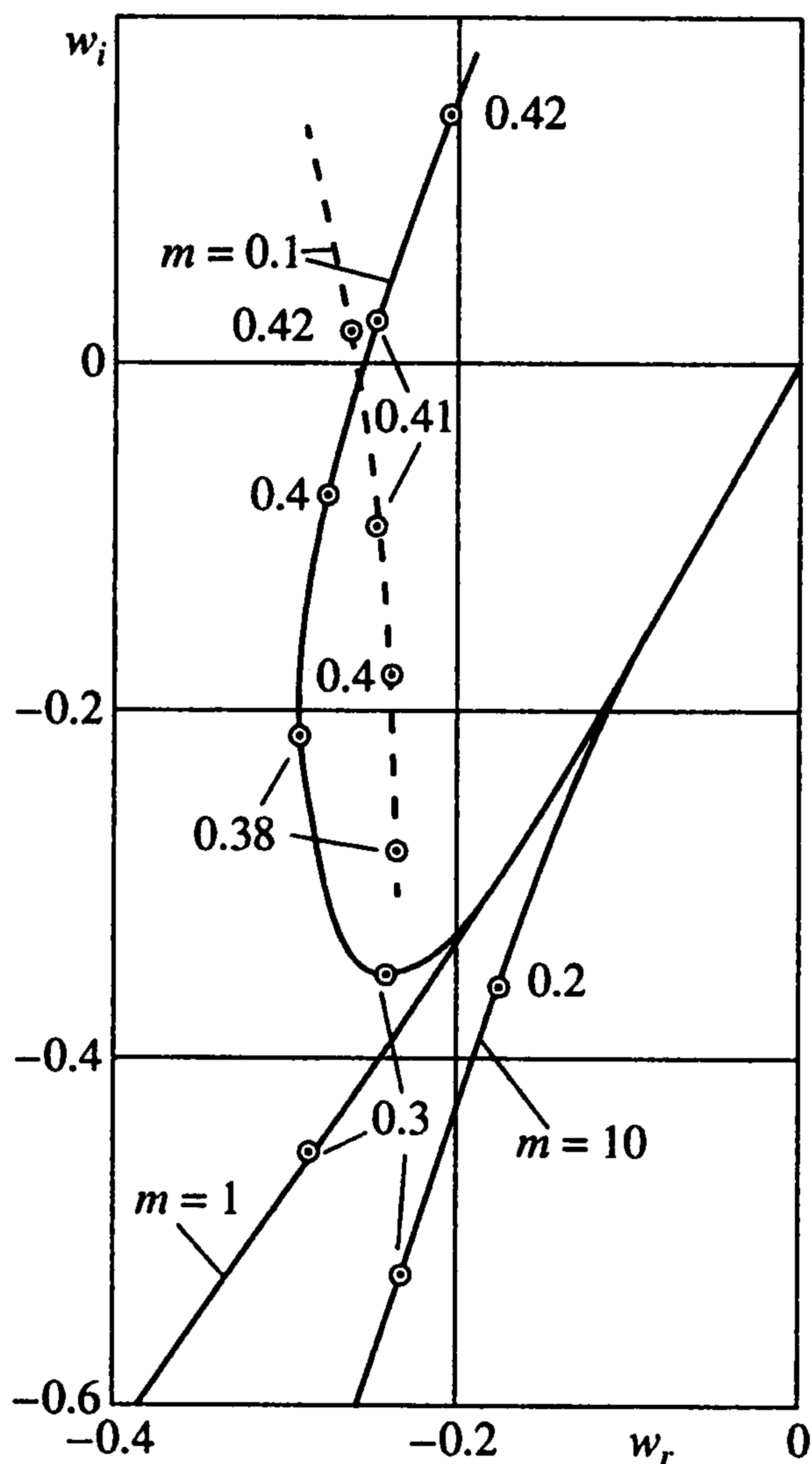
Итак, при $m = 0.1$ возможны режимы, когда волна движется с малой фазовой скоростью или совсем останавливается и превращается в стоячую волну. Такой режим движения хорошо известен в аэроупругости как "статическая дивергенция", он изучался экспериментально [18], причем медленно движущиеся волны наблюдались только в искусственно турбулизированном пограничном слое.

Таким образом, в зависимости от соотношения параметров пластины существуют две различные формы потери устойчивости: при $m = 10$, 4 переход к неустойчивому режиму характерен для возникновения волн Толлмина–Шлихтинга, а при $m = 3, 2, 1, 0.1$ нейтральный режим колебаний отсутствует и неустойчивость наступает скачком.

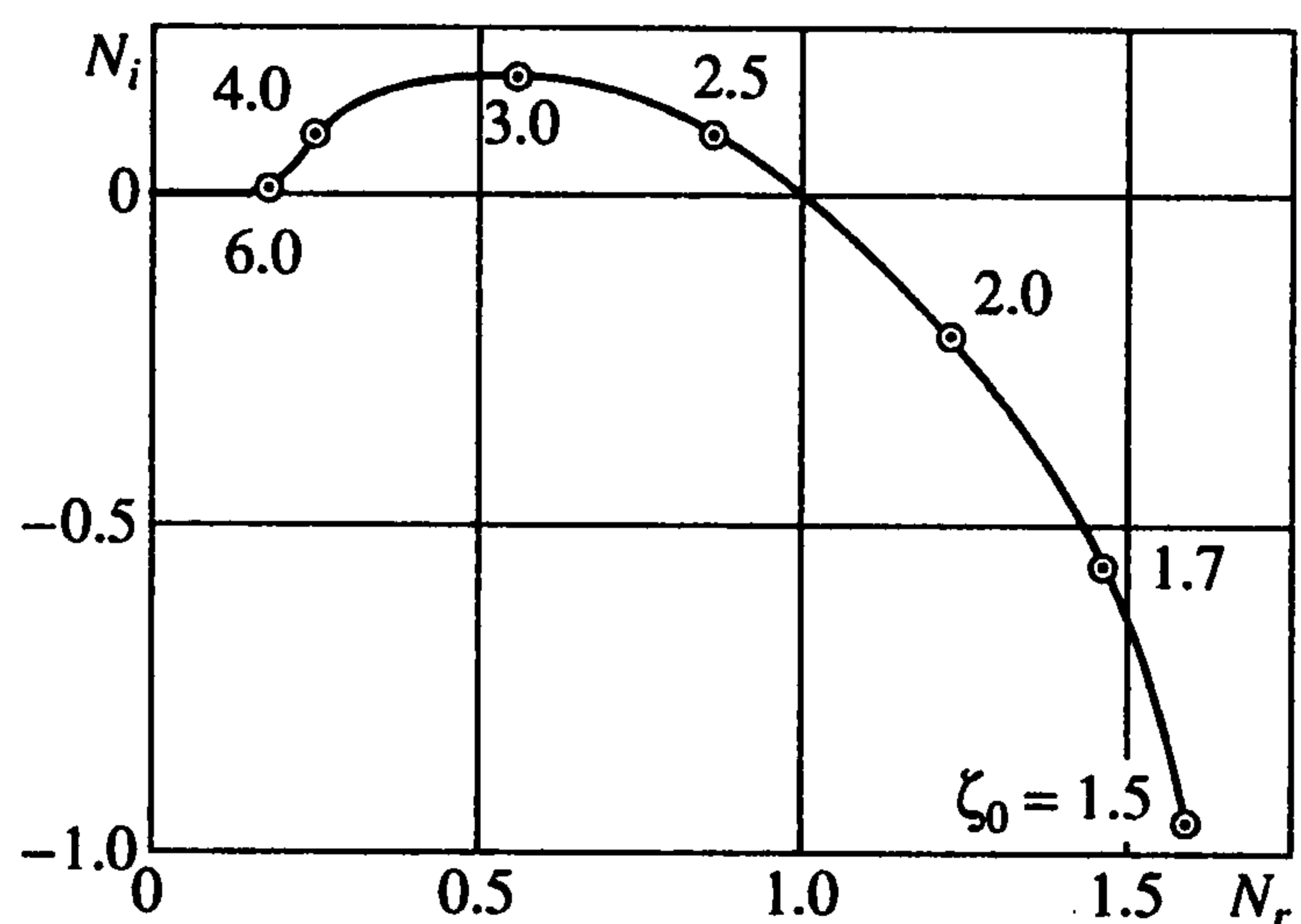
Вообще говоря, такое поведение нетипично для линейных систем. Поэтому требуется некоторое обоснование полученных решений. Возможно, с внешне похожим явлением встретились авторы работы [7], где было отмечено, что при некоторых параметрах гибкой пластины обнаруживалось резкое изменение решений при очень малом изменении волнового числа или числа Рейнольдса, а также, что иногда невозможно было найти нейтральный режим колебаний ([7], с. 490, 502). Было высказано предположение [7], что эти эффекты связаны с взаимодействием мод, т.е. модам, соответствующим волнам класса А и класса Б отвечают близкие собственные значения; этот вопрос детально не изучался.

4. Анализ форм потери устойчивости. Выше установлено, что разрывные решения имеют свойства волн как класса А, так и класса Б. Известно, что вязкость жидкости существенна при возникновении и потере устойчивости волн Толлмина–Шлихтинга (волн класса А), тогда как волны класса Б определяются, в основном, гибкостью обтекаемой поверхности и могут существовать и в невязком потоке [3, 4, 8]. Известно также, что неустойчивость волн класса Б возникает под действием на обтекаемую поверхность $\eta(x, t)$ компоненты давления, которая находится в фазе с волновым склоном $\partial\eta/\partial x$ и пропорциональна второй производной профиля скорости, вычисленной в критическом слое, где фазовая скорость волны равна скорости потока [3, 8]. В рассматриваемом случае, т.е. при использовании трехслойной модели, профиль скорости линейный, поэтому механизм генерации неустойчивости должен быть иной.

Кроме того, в пограничном слое волны класса Б распространяются с фазовой скоростью $c = -\omega_i/k$, близкой к скорости свободных изгибных волн $c_p = (D/m)^{1/2}k$. В рассматриваемом случае, например для $m = 3$ при $k = 1$ скорость волны $c = 2.20$, тогда как $c_p = 1.82$, т.е. имеется значительная разница в величинах скоростей. При этом остается невыясненной роль вязкости жидкости в возникновении разрывной неустойчивости,



Фиг. 2



Фиг. 3

что не позволяет отнести разрывные решения к волнам класса Б в традиционном смысле. Для более четкого представления о характере изучаемых волн необходимо энергетическое рассмотрение. Не останавливаясь на решении этого вопроса, ограничимся изучением формальных свойств полученных решений.

4.1. *Нейтральный режим.* Рассмотрим нейтральный режим обтекания пластины без внутреннего сопротивления. Дисперсионное уравнение (2.11) при $d = 0$ представим в виде (2.10)

$$m\omega^2 + Dk^4 = k/[1 - k^{4/3}N(\zeta)] \quad (4.1)$$

В случае нейтрального режима частота – чисто мнимая величина: $\omega = i\omega_*$, где $\omega_* > 0$, а значит, левая часть уравнения (4.1) должна быть вещественной. Для того чтобы уравнение (4.1) удовлетворялось, вещественной должна быть величина $N(\zeta)$.

Найдем значения $\zeta = \omega(ik)^{-2/3}$, при которых это возможно. Соответствующие значения ζ должны лежать на луче $\arg \zeta = -5\pi/6$. Положим $\zeta = e^{-5\pi i/6}\zeta_0$, где $\zeta_0 > 0$. На фиг. 3 представлены результаты расчета величины $N(\zeta) = N_r + iN_i$ в зависимости от изменения ζ_0 , как от параметра, при $\zeta_0 > 1.5$. При $0 < \zeta_0 < 1.5$ кривая $N(\zeta)$ лежит в нижней полуплоскости.

При $\zeta_0 > 6$ кривая $N(\zeta)$ практически сливается с вещественной осью и стремится асимптотически к нулю при $\zeta_0 \rightarrow \infty$, оставаясь в верхней полуплоскости. В этом можно убедиться, рассматривая асимптотическое разложение функции $N(\zeta)$ при больших ζ . В секторе $|\arg \zeta| < \pi$ имеем разложение

$$N(\zeta) \sim -\frac{e^{\pi i/6}}{\zeta} \left[1 - \frac{1}{\zeta^{3/2}} + \frac{9}{4} \frac{1}{\zeta^3} + O\left(\frac{1}{\zeta^{9/2}}\right) \right], \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

где дробные степени ζ принимают главные значения. Тогда на луче $\arg \zeta = -5\pi/6$

$$N(\zeta) \sim \zeta_0^{-1} [1 + e^{\pi i/4} \zeta_0^{-3/2} + O(\zeta_0^{-3})], \quad \zeta_0 \rightarrow \infty$$

Отметим, что формула (4.2) с удержанием только первых двух членов при $\zeta_0 = 6$ дает погрешность менее 1%.

Расчеты показывают, что кривая $N(\zeta)$ пересекает вещественную ось (т.е. функция $N(\zeta)$ становится вещественной) только в одной точке (при $\zeta \approx 2.2972e^{-5\pi i/6}$) и в этой точке $N(\zeta) \approx 0.99936 - 0.00001i \approx 1$.

Отсюда легко определить, что в нейтральном режиме частота и волновое число связаны соотношением $\omega = -2.2972k^{2/3}i$. Этот результат справедлив только для бездиссипативных пластин, а также для случая жесткой стенки.

Отметим, что число $\alpha = 2.2972$ или близкое к нему иногда встречается в аналогичных формулах в задачах гидродинамической устойчивости. Это число является аргументом, при котором функция Титьенса становится вещественной (см. например [13, 19]). Как оказалось, функция $N(\zeta)$ тесно связана с упомянутой функцией Титьенса.

4.2. Отсутствие нейтрального режима. Найдем условия, при которых может существовать нейтральный режим колебаний бездиссипативной пластины. Частоту колебаний представим в виде $\omega = -\alpha k^{2/3}i$. С достаточной для целей данного исследования точностью положим $N(\zeta) = 1$. Тогда уравнение (4.1) примет вид

$$-m\alpha^2 k^{4/3} + Dk^4 = k/(1 - k^{4/3}) \quad (4.3)$$

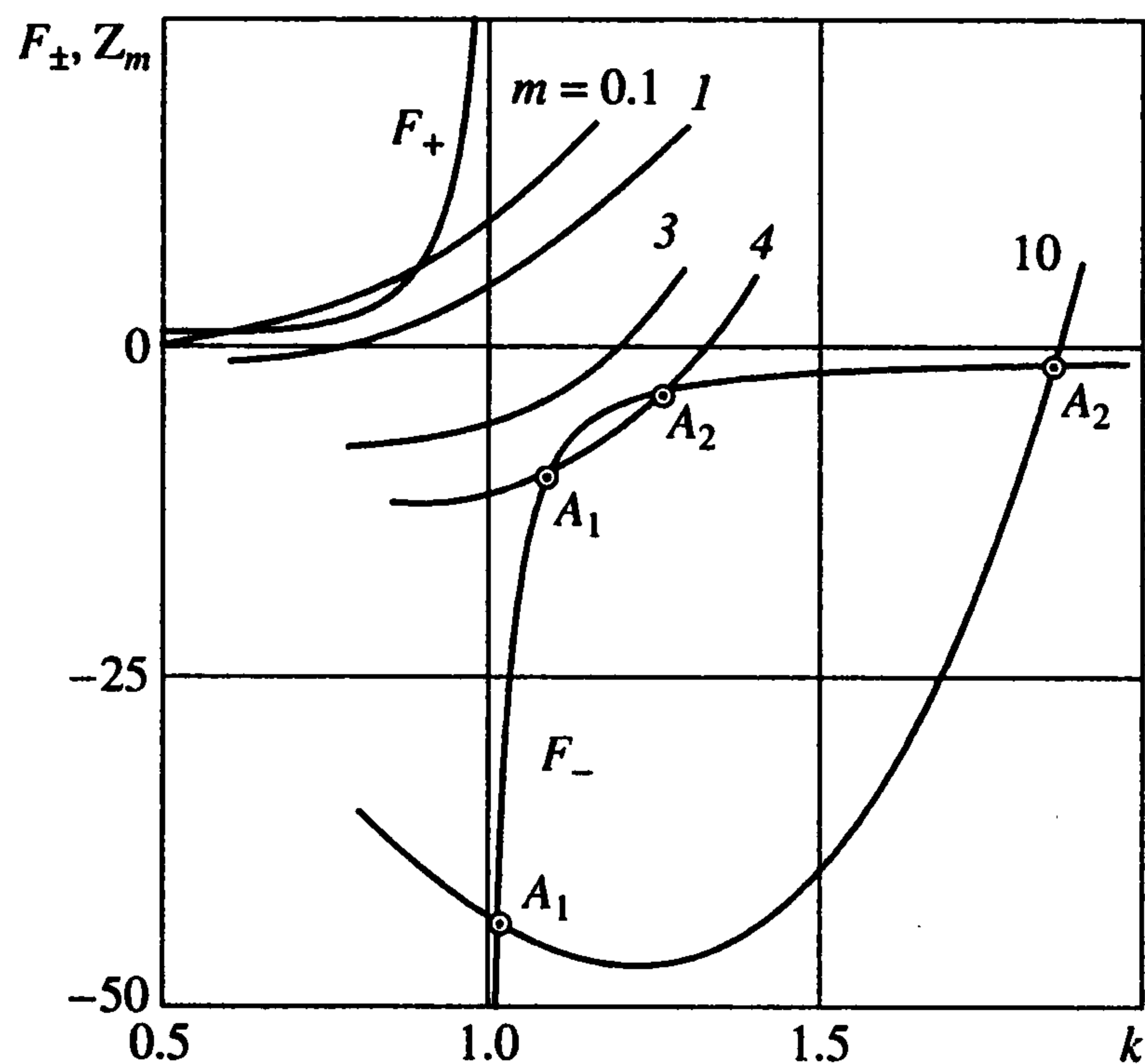
т.е. получено соотношение, которому должно удовлетворять волновое число в нейтральном режиме. Это соотношение можно рассматривать как уравнение, определяющее при заданных массе и жесткости пластины волновое число, при котором эффективная жесткость пластины (левая часть уравнения) уравновешивает индуцированное гидродинамическое давление (правая часть).

Обозначив левую часть уравнения (4.3) через $Z_m(k)$, правую часть – через $F(k)$, представим графическое решение уравнения (4.3) при $D = 10$ на фиг. 4. Нейтральные возмущения определяются точками пересечения кривых $Z_m(k)$ и $F(k)$. Определив волновое число, можно затем найти частоту колебаний.

Кривая $F(k)$ имеет положительную ветвь $F_+(k)$ при $k < 1$ и отрицательную $F_-(k)$ при $k > 1$. При $m = 10$, 4 имеются две точки пересечения кривых $F_-(k)$ и $Z_m(k)$. При уменьшении массы пластины точки пересечения сливаются, затем пересечение пропадает ($m = 3, 1$). При дальнейшем уменьшении массы m пересечение кривых вновь возникает, но уже с ветвью $F_+(k)$ при $k < 1$ ($m = 0.1$). Видим, что не при всех соотношениях между массой и жесткостью пластины имеется нейтральный режим колебаний. Уменьшение массы пластины вызывает уменьшение по абсолютной величине эффективной жесткости $Z_m(k)$. При достаточно малой величине $Z_m(k)$ не существует вещественных значений волнового числа, при которых эффективная жесткость может уравновесить индуцированное давление, и следовательно, не существует нейтрального режима колебаний. Отсутствие нейтрального режима указывает на возможность появления разрывных решений. Но из расчетов, приведенных в разд. 3 следует, что все решения при $m < 3$ – разрывные, и неустойчивость наступает скачком.

Понятно, что учет силы продольного натяжения T и жесткости упругого основания K в уравнении (4.1) привел бы к сдвигу точки касания кривых $F_-(k)$ и $Z_m(k)$ в сторону больших волновых чисел. Тогда следовало бы ожидать появления разрывных решений при больших значениях волнового числа. Однако наличие сжимающего усилия ($T < 0$) привело бы к противоположному эффекту.

Отсутствие нейтрального режима обтекания гибкой поверхности при некоторых значениях параметров было отмечено ранее [6].



Фиг. 4

4.3. *Единственность нейтрального решения.* Точки пересечения кривых $F_+(k)$ и $Z_m(k)$ при $m = 0.1$ соответствуют результатам, представленным на фиг. 1, б. При $m = 10$, 4 нейтральному решению на фиг. 1, а соответствует точка A_1 пересечения кривых $F_-(k)$ и $Z_m(k)$ на фиг. 4. Наличие точки A_2 на фиг. 4 позволяет предположить существование другого корня дисперсионного уравнения (4.1), т.е. можно предположить, что существуют две нейтральные волны, распространяющиеся со скоростями $c_{1,2} = \alpha k_{1,2}^{-1/3}$. Тогда при уменьшении массы пластины эти два корня сливаются, т.е. волны догоняют одна другую, взаимодействуют, что приводит к ситуации, аналогичной возникающей в задаче о флаттере бесконечной пластины или в случае неустойчивости Кельвина–Гельмгольца [3, 4]. Подобным слиянием и взаимодействием мод объяснялись [7] эффекты, связанные с отсутствием нейтрального режима возмущений.

В рассматриваемом здесь случае дело обстоит иначе. Одна из волн просто не существует. Покажем это. Предположим, что точки пересечения A_1 и A_2 кривых $F_-(k)$ и $Z_m(k)$ соответствуют двум различным корням дисперсионного уравнения (4.1). Тогда точка касания кривых при уменьшении массы m должна определять двойной корень уравнения (4.1). Найденная при этом частота колебаний должна удовлетворять продифференцированному по ω уравнению (4.1). Выполним это дифференцирование и представим результат в виде

$$e^{-\pi i/6} \text{Ai}(\zeta) \left[\frac{d \text{Ai}(\zeta)}{dz} \right]^{-1} = - \frac{2m\omega k^{1/3}}{(m\omega^2 + Dk^4)^2} \left[1 + \frac{\omega}{ik^2} - \frac{\omega}{ik(m\omega^2 + Dk^4)} \right]^{-1} \quad (4.4)$$

Видно, что в нейтральном режиме, когда частота – чисто мнимая величина, правая часть уравнения (4.4) чисто мнимая. Однако уже установлено (разд. 4.1), что в нейтральном режиме параметр ζ обязательно должен быть равен величине $\alpha e^{-5\pi i/6}$. Точное значение левой части уравнения (4.4) равно при этом комплексной величине $-0.40863 - 0.54438i$. Отсюда следует, что уравнение (4.4) вообще не имеет чисто мнимых решений, т.е. точка касания кривых $F_-(k)$ и $Z_m(k)$ не определяет двойной корень исходного уравнения (4.1). Следовательно, точка пересечения A_2 на фиг. 4 также не определяет корень уравнения (4.1) и соответствует ложной волне.

Итак, установлено, что в рассматриваемом случае никакого взаимодействия волн нет – каждая волна развивается индивидуально.

4.4. *Асимптотическое решение.* Рассмотрим поведение решений дисперсионного уравнения (4.1) при больших значениях волнового числа. Из расчетов следует, что при увеличении волнового числа параметр $\zeta = \omega(ik)^{-2/3}$ растет, причем $-\pi < \arg \zeta < -\pi/2$. Воспользуемся асимптотическим представлением функции $N(\zeta)$ при больших ζ в виде (4.2). Подставим разложение (4.2) с удержанием первых двух членов в уравнение (4.1) и приведем его к виду

$$\omega = -ik^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta^{3/2}} \right) + \frac{k\omega}{m\omega^2 + Dk^4}$$

Приближенное решение этого уравнения при больших k , ζ записывается в виде

$$\omega = -ik^2 + e^{\pi i/4} + O(k^{-1})$$

т.е. это решение находится в правой полуплоскости.

Таким образом, при больших значениях волнового числа решения дисперсионного уравнения (4.1) всегда определяют неустойчивую волну. Однако было показано, что при малых волновых числах решения дисперсионного уравнения лежат в левой полуплоскости (фиг. 2), а в разд. 4.2 показано, что нейтральный режим возмущений существует не всегда. Отсюда следует, что при некоторых значениях параметров пластины возможна скачкообразная потеря устойчивости. Таким образом, факт существования разрывных решений можно считать обоснованным.

5. Заключение. Установим физические причины появления разрывных решений. Экстраполируем значения частот за критическую точку $\omega(k_c)$ (т.е. за точку разрыва) и вычислим значения амплитуд гидродинамического давления a и напряжений a_s , возникающих в пластине за счет деформаций

$$a = \frac{k}{k^{4/3}N(\zeta) - 1}, \quad a_s = m(\omega_i^2 - \omega_r^2) - Dk^4 - 2im\omega_r\omega_i$$

Задавая приращения волнового числа Δk , экстраполяцию частот проведем по формуле

$$\omega(k) = \omega(k_c) + \frac{\partial \omega(k_c)}{\partial k} \Delta k, \quad k = k_c + \Delta k$$

Здесь k_c — значения волнового числа в точке обрыва решения, $\partial \omega / \partial k = -G_k / G_\omega$, где G_k , G_ω — производные по k и ω от дисперсионного соотношения $G(\omega, k) = 0$.

Расчеты для $m = 2, 3$ показывают, что при $k > k_c$ вещественные части величин a и a_s различаются, причем $a_r > a_{sr} > 0$, мнимые части практически совпадают. Вычисление сдвига фаз ϕ , ϕ_s между вертикальной скоростью поверхности пластины $v_s = \eta_0(\omega_r + i\omega_i)e^{ikx + \omega t}$ и напряжениями $(a, a_s)e^{ikx + \omega t}$ показывает, что $\phi_s < \phi < \pi/2$ при $k > k_c$.

Тогда представляется возможной следующая картина развития неустойчивости. В устойчивом режиме, т.е. при $\omega_r < 0$, суммарная энергия возмущений жидкости и колебаний пластины должна стремиться к нулю. Если имеем бездиссипативную пластину, то она должна передать свою энергию жидкости, где только и возможна диссипация энергии либо за счет вязкости, либо за счет передачи энергии основному потоку посредством напряжений Рейнольдса. Для этого пластина должна совершить работу против действия сил давления. Средний по длине волны поток энергии, передаваемой пластиной жидкости, определяется выражением

$$\langle p v_s \rangle = -(1/2)\omega_r(m|\omega|^2 + Dk^4)$$

причем он должен быть положительным. Его величина при заданном значении частоты ω регулируется сдвигом фаз $\phi < \pi/2$ и величиной компонент давления a_r , a_i . При $k < k_c$ такое взаимодействие возможно, а в точке k_c пластина больше не может обеспечить разность фаз ϕ и величину напряжений a_s , требуемые для передачи энергии. Упругие и инерционные силы, развиваемые пластиной, не могут уравновесить

действие сил давления со стороны жидкости. В частности, при $m = 2, 3$ пластина не может уравновесить компоненту давления a_r , которая находится в фазе со смещением поверхности, так как слишком мала инерционность пластины. В результате при $k = k_c$ пластина "прощелкивает", т.е. пластина мгновенно меняет свою ориентацию, и режим течения становится неустойчивым.

Аналоги такого поведения механических систем давно известны. В качестве примера можно привести задачу о защелкивании слабоискривленных упругих пластин под действием распределенной нагрузки, решенную И.Г. Бубновым в 1902 г. [20].

Отметим, что рассматриваемая скачкообразная неустойчивость отличается от неустойчивости волн класса Б, которая происходит под действием компоненты давления, находящейся в фазе с волновым склоном.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kramer M.O.* Boundary layer stabilization by distributed damping // *J. Amer. Soc. Naval Engrs.* 1960. V. 72. № 1. P. 25–33.
2. *Benjamin T.B.* Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 9. Pt 4. P. 513–532.
3. *Benjamin T.B.* The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // *J. Fluid Mech.* 1963. V. 16. Pt 3. P. 436–450.
4. *Landahl M.T.* On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. Pt 4. P. 609–632.
5. *Короткин А.И.* Устойчивость ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости на упругой поверхности // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1966. № 3. С. 39–44.
6. *Амфилохиев В.Б., Дробленков В.В., Заворохина А.С.* Рост малых возмущений в пограничном слое на упругой поверхности // *ПМТФ.* 1972. № 2. С. 137–139.
7. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt1. Tollmien–Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
8. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt2. Flow-induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–232.
9. *Riley J.J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R.W.* Compliant coatings // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1988. V. 20. P. 393–420.
10. *Савенков И.В.* Подавление роста нелинейных волновых пакетов упругостью обтекаемой поверхности // *ЖВМ и МФ.* 1995. Т. 35. № 1. С. 95–103.
11. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // *ПММ.* 1977. Т. 41. Вып. 6. С. 1007–1023.
12. *Жук В.И., Рыжов О.С.* Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
13. *Smith F.T.* On the non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1979. V. 366. № 1724. P. 91–109.
14. *Duck P.W.* The effect small surface perturbations on the pulsatile boundary layer on a semi-infinite flat plate // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 197. P. 259–293.
15. *Савенков И.В., Терентьев Е.Д.* Расчет продольной скорости в линейной задаче о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 3. С. 61–67.
16. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О волновых движениях в пространственном пограничном слое // *ПММ.* 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 912–927.
17. *Терентьев Е.Д.* Линейная задача о вибраторе, совершающем гармонические колебания на закритических частотах в дозвуковом пограничном слое // *ПММ.* 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 264–272.
18. *Gad-el-Hak M., Blackwelder R.F., Riley J.J.* On the interaction of compliant coatings with boundary-layer flows // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 140. P. 257–280.
19. *Reid W.H.* The stability of parallel flows // *Basic Developments in Fluid Dynamics* Ed. by M. Holt. N.Y., Acad. Press: 1965. V. 1. P. 249–307.
20. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Конечные прогибы и защелкивание тонких упругих пологих панелей // *ПММ.* 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 865–876.